UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

MÁRCIO DE SOUZA SANTANA

O USO DO JOGO DA VELHA SUPREMO COMO FERRAMENTA METODOLÓGICA NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Araguaína / TO
2025

MÁRCIO DE SOUZA SANTANA

O USO DO JOGO DA VELHA SUPREMO COMO FERRAMENTA METODOLÓGICA NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Norte do Tocantins - UFNT, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo C. Maranhão Neto
Coorientador: Prof. Dr. Thiago Beirigo Lopes

Araguaína / TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278u de Souza Santana, Márcio de Souza Santana.

O USO DO JOGO DA VELHA SUPREMO COMO FERRAMENTA METODOLÓGICA NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA / Márcio de Souza Santana de Souza Santana. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.

90 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: Raimundo Cavalcante Maranhão Neto.
Coorientador: Thiago Beirigo Lopes.

1. Jogos no Ensino. . 2. Metodologia de Ensino.. 3. Recurso Didático..

CDD 510

MÁRCIO DE SOUZA SANTANA

O USO DO JOGO DA VELHA SUPREMO COMO FERRAMENTA METODOLÓGICA NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Norte do Tocantins - UFNT, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07 de julho de 2025.

Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
RAIMUNDO CAVALCANTE MARANHAO NETO
Data: 01/08/2025 16:06:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Raimundo C. Maranhão Neto
Orientador UFNT

Documento assinado digitalmente
gov.br
ROGERIO DOS SANTOS CARNEIRO
Data: 01/08/2025 16:55:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rogério dos Santos Carneiro
Examinador UFNT

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 02/08/2025 13:26:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Júnior
Examinador UFNT

Documento assinado digitalmente
gov.br
WALLYSONN ALVES DE SOUZA
Data: 02/08/2025 16:32:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
Examinador(a) Externo

Araguaína / TO
2025

Dedico este trabalho a minha esposa e minhas filhas, que, com amor e sacrifício, abdicaram suas rotinas e privilégios para me apoiar durante as viagens semanais, oferecendo-me apoio incondicional. Sua compreensão e incentivo foram fundamentais para a conclusão deste mestrado, e por isso, sou eternamente grato.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, e por ter me acompanhado durante as viagens, usando de seus anjos em terra para me dar proteção. Além de ter colocado no meu caminho, tantas pessoas especiais que me apoiaram na medida do possível, tanto financeiramente quanto com palavras de incentivo, as quais sou muito grato.

Em segundo, agradeço minha esposa Pâmela Beirigo, por todo o apoio emocional e sacrifício financeiro durante esses dois anos, seu incentivo me fez persistir e concluir esse curso. Agradeço também as minhas filhas Manuela, Gabriela e Marcela, por terem paciência e entenderem a ausência do pai aos finais de semana.

Agradeço meus pais Edilson e Marly, por ter me dado ensinamentos valiosos, os quais sigo fielmente até os dias atuais. Sou grato também aos incentivos, tanto emocionais quanto financeiros, que foram de grande ajuda durante esse período.

Aos meus irmãos, Wécio e Júnior, por serem uma fonte constante de incentivo e motivação, ajudando-me a perseverar e buscar a conclusão do curso com determinação e sucesso. Também a minha prima Leidiane, por me hospedar diversas vezes em sua casa durante o curso, além aproveitar a presença da Lívia.

Aos meus colegas de curso, Carlos Eduardo, Daniel, Gabriela, Onofre, Matheus, Vitor, Wander, Janderosn e Leonardo, por todo o companheirismo e parceria durante o curso, além dos momentos de descontração que vocês proporcionaram. Em especial ao meu parceiro de viagens Rodrigo, que se mostrou um exímio copiloto e um amigo de caráter intocável.

A todos os professores do programa Profmat, em especial ao José Carlos, que por diversas vezes foi incomodado em seu horário de descanso, porém, sempre muito solícito e prestativo na sua função de coordenador, além de um professor excepcional. E ao professor Raimundo, que além de um professor inigualável, agradeço também por ter aceitado o convite para me orientar durante este trabalho de conclusão. Agradeço também as dicas valiosas do professor Rogério, que foram de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho, e ao meu co-orientador e cunhado Thiago Beirigo, que foi muito importante na construção e revisão deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro no semestre final do curso, e a todos que contribuíram direta ou indiretamente com esse momento.

RESUMO

Considerando a histórica resistência dos estudantes à matemática, evidenciada por resultados insatisfatórios em avaliações internacionais, este trabalho propõe uma abordagem metodológica inovadora para o ensino de análise combinatória, utilizando o Jogo da Velha Supremo. A proposta visa não apenas combater a aversão à matemática, mas também tornar as aulas mais envolventes e participativas, oferecendo alternativas que incentivem o aprendizado de forma dinâmica e interativa. Para isso, a análise explora o jogo, suas estratégias e seu potencial como ferramenta pedagógica. A princípio apresenta um estudo combinatório sobre o Jogo da Velha tradicional (Tic-Tac-Toe) e posteriormente sobre o Jogo da Velha Supremo, mostrando matematicamente resultados como estratégias vencedoras, bem como a vantagem (ou não) em iniciar uma partida. A metodologia abrange uma análise teórica e prática dos jogos, culminando em uma sugestão detalhada para aplicação em sala de aula. Esta proposta está estruturada em duas etapas: a primeira envolve a introdução lúdica ao jogo, explorando o condicionamento das jogadas e as possibilidades estratégicas que a sua estrutura permite. A segunda etapa foca em atividades que conectam o jogo aos conceitos matemáticos, incentivando o desenvolvimento de habilidades e estratégias eficazes para a resolução de problemas matemáticos. Os resultados incluem a identificação de estratégias vencedoras e a resposta às questões iniciais sobre o jogo. A discussão aborda o potencial do jogo como ferramenta pedagógica, destacando sua relação com os conceitos de análise combinatória e seu papel no desenvolvimento do raciocínio combinatório e estratégico. Por fim, o trabalho reforça a importância do uso de jogos no ensino da matemática e sintetiza as contribuições do estudo para a área, ressaltando a eficácia das sequências didáticas propostas para tornar o aprendizado mais divertido, interativo e eficaz. Além disso, sugere a continuidade de pesquisas e adaptações do método em diferentes contextos educacionais."

Palavras-chave: Jogos no Ensino, Metodologia de Ensino, Recurso Didático.

ABSTRACT

Considering students' historical resistance to mathematics, evidenced by unsatisfactory results in international assessments, this paper proposes an innovative methodological approach to teaching combinatorial analysis, using the Ultimate Tic-Tac-Toe game. The proposal aims not only to combat the aversion to mathematics, but also to make classes more engaging and participatory, offering alternatives that encourage learning in a dynamic and interactive way. For this purpose, the analysis explores the game, its strategies and its potential as a teaching tool. At first it presents a combinatorial study of the traditional Tic-Tac-Toe game and then the Ultimate Tic-Tac-Toe game, mathematically showing results such as winning strategies, as well as the advantage (or not) of starting a game. The methodology covers a theoretical and practical analysis of the games, culminating in a detailed suggestion for application in the classroom. This proposal is structured in two stages: the first involves a playful introduction to the game, exploring the conditioning of the moves and the strategic possibilities that its structure allows. The second stage focuses on activities that connect the game to mathematical concepts, encouraging the development of effective skills and strategies for solving mathematical problems. The results include identifying winning strategies and answering initial questions about the game. The discussion addresses the potential of the game as a teaching tool, highlighting its relationship with the concepts of combinatorial analysis and its role in the development of combinatorial and strategic reasoning. Finally, the paper reinforces the importance of using games to teach mathematics and summarizes the study's contributions to the field, highlighting the effectiveness of the didactic sequences proposed to make learning more fun, interactive and effective. It also suggests further research and adaptations of the method in different educational contexts.”

Keywords: Games in Education, Teaching Methodology, Didactic Resource.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional de Educação
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
COVID-19	*Coronavirus Disease 2019*
DCNs	Diretrizes Curriculares Nacionais
ENQ	Exame Nacional de Qualificação
IA	Inteligência Artificial
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
QR code	*Quick Response Code*
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UFNT	Universidade Federal do Norte do Tocantins

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há muito tempo, a matemática enfrenta uma significativa rejeição por parte da maioria dos estudantes, percepção facilmente observada em conversas informais entre amigos ou no cotidiano escolar, especialmente entre alunos dos anos finais da educação básica. O fato é, a relação entre os estudantes e a matemática, é uma relação extremista, ou é de ódio, ou é de amor. Essa polarização pode ser atribuída a vários fatores, incluindo a abstração dos conteúdos matemáticos, a rigidez da disciplina, a falta de contextualização dos assuntos e a repetição exaustiva dos exercícios propostos por alguns professores. Além disso, experiências negativas, falta de motivação dos professores e dificuldades em conectar a matemática ao cotidiano também contribuem para essa rejeição, e como justificativa para tal, usam apenas o termo “porque é muito difícil”. Segundo Lages (2007), o ensino da Matemática difere dos demais, pois as mesmas se referem a objetos e situações concretas, já a Matemática trata de noções e verdades de natureza abstrata. Os princípios com que se referem às proposições matemáticas exigem precisão, e por isso requer dos estudantes maior concentração e cuidado. Ele afirma também, que toda pessoa tem capacidade para compreender toda a Matemática, desde que tenha uma orientação adequada e esteja disposta a dedicar-se a isso, no entanto as pessoas têm certo preconceito para com a disciplina, talvez por aspectos culturais, assim é comum vermos pessoas dizerem que não gostam de matemática, e de certa forma se vangloriar por isso, o mesmo não ocorre com outras disciplinas das áreas de humanas ou linguagens, por exemplo.

A matemática se faz presente em nosso cotidiano, porém, na maioria das vezes é vista pelos alunos como distante da realidade deles. Assim, ao ensinar uma disciplina, é importante criar um ambiente de aprendizagem positivo e encorajador, que inspire os estudantes a se engajarem ativamente no processo de aprendizagem, cabendo portanto, ao professor buscar recursos capazes de tirar a ideia de incapacidade que, social e historicamente tem sido perpetuada por estigmas e preconceitos, transformando-a assim em algo vivo e de fácil observação, que está diretamente relacionado à problemas cotidianos.

No cenário internacional, segundo dados divulgados pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) em 2022, o desempenho dos estudantes no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) teve uma queda incomum, quando comparado com os resultados de 2018, quando ocorreu a avaliação anterior, tal queda pode ter sido influenciada pela pandemia do COVID-19, onde as escolas foram fechadas e as aulas, na maioria das escolas, foram realizadas de modo online. Apesar da queda no desempenho observada em vários países ao redor do mundo, o Brasil não seguiu essa tendência: os resultados dos estudantes brasileiros em matemática e ciências permaneceram estáveis. Considerando o contexto vivido, esse fato pode ser visto como um aspecto positivo, porém, ainda preocupante, pois menos da metade dos estudantes que realizaram a avaliação conseguiram o nível mínimo de aprendizagem em ciências e matemática.

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) é um estudo comparativo internacional conduzido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) a cada três anos. Esta avaliação fornece dados sobre o desempenho de estudantes de 15 anos, uma idade em que geralmente se completa a educação básica obrigatória na maioria dos países. Além disso, o programa examina os antecedentes dos estudantes e suas atitudes em relação à aprendizagem, bem como os fatores que influenciam seu processo de aprendizagem tanto dentro quanto fora da escola. Essas informações são essenciais para entender como os sistemas educacionais preparam os jovens para enfrentar os desafios da vida real e contribuem para a formulação de políticas educacionais mais eficazes.

O Pisa avalia leitura, matemática e ciências em 81 países, e foi observado que o Brasil melhorou em seis posições sua colocação em matemática, saindo de 71º para a 65º colocação, ainda assim ficando atrás de países como, Colômbia, Costa Rica e Chile, com índice de 73% dos alunos ficando abaixo da média do Pisa. Segundo o Inep, os resultados do Pisa oferecem uma oportunidade para que cada nação avalie o desempenho de seus estudantes em relação a outros países. Isso permite que os países aprendam com políticas e práticas educacionais bem-sucedidas em outras partes do mundo e desenvolvam suas próprias políticas e programas educacionais com o objetivo de melhorar a qualidade e a equidade dos resultados de aprendizagem. Portanto, cabe a cada país implementar as intervenções que considerar necessárias para a melhoria da educação. Isso envolve investimentos que vão desde a formação de professores, até a melhoria de aspectos econômicos, sociais e metodológicos. Assim, é fundamental realizar um esforço conjunto que valorize o corpo docente, adote metodologias mais eficazes e leve em consideração as condições socioeconômicas dos alunos.

Assim, buscando alternativas para os dados apresentados, consideramos a aplicação de jogos como ferramenta metodológica para o ensino da matemática, contribuindo assim para o desenvolvimento do raciocínio lógico e pensamento crítico, foi desenvolvida uma proposta didática que fundamenta-se no uso de jogos como metodologia de ensino para a análise combinatória. Para que o leitor compreenda melhor a motivação do autor em escrevê-la, inicialmente, justifica-se a escolha do tema. Desde o início da sua atuação como professor o autor sempre buscou uma visão mais realista da Matemática, com aplicações concretas e de fácil observação pelos alunos, sendo um adepto de recursos pedagógicos interdisciplinares, muitas vezes associando a prática de Educação Física às aulas de Matemática.

O uso de jogos como recursos pedagógicos sempre esteve presente em suas aulas no decorrer dos seus dez anos na docência, e durante esse tempo foi perceptível que as aulas municiadas de tais ferramentas eram bem mais atrativas e interessantes aos discentes. Durante um momento de descanso entre a rotina ministrar aulas e estudar para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ) do Profmat, por meio das redes sociais, o autor assistiu um vídeo sobre um jogo que lhe chamou a atenção, este mostrava o Jogo da Velha 2.0, que em função das diversas interpretações para o termo 2.0, foi renomeado para Jogo da Velha Supremo, o vídeo explicava rapidamente as regras do referido jogo. O vídeo ficou gravado na memória de tal maneira, que mesmo assistindo uma única vez, o autor logo apresentou o jogo aos seus colegas de mestrado, pois viu nele um potencial incrível de aplicação em sala de aula, e um ótimo passatempo. Durante esse período, e tentando compreender melhor as estratégias do jogo, o autor fez diversas aplicações nas turmas em que ministrava aulas de Matemática, principalmente quando trabalhava conteúdos de Análise Combinatória e Raciocínio Lógico.

Ainda cercado de muitas dúvidas sobre o tema do seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o autor viu no jogo uma grande possibilidade de desenvolver sua dissertação, e assim o fez. Inicialmente, havia muitas dúvidas sobre como deveria trabalhá-lo, mas após algumas leituras, a natureza combinatória do jogo começou a se manifestar naturalmente, permitindo vislumbrar as diversas possibilidades de exploração em sala de aula. Assim, a presente proposta se justifica de um fascínio particular do autor por jogos, pela busca por tornar as aulas mais motivantes e eficientes, e o desejo de quebrar o paradigma que a Matemática é muito difícil e abstrata, rompendo a barreira do ensino tradicional e inserindo recursos metodológicos que deslumbre nos estudantes o encantamento pela disciplina.

Desta forma, objetivando deixar as aulas mais atrativas e interativas, faremos análise combinatória de um jogo que denominaremos por “Jogo da Velha Supremo,” e apresentaremos uma proposta de atividades que faz o uso do jogo como ferramenta metodológica para o ensino de análise combinatória. Durante o trabalho também buscaremos traçar estratégias vencedoras para o referido jogo, além de responder algumas perguntas como:

- Há pelo menos uma estratégia vencedora para o jogo?
- Quem vence o jogo do meio tem alguma vantagem?
- Qual o melhor movimento inicial?
- Há possibilidade de terminar empatado, ou seja, dar velha?
- Os jogadores com melhor desempenho em matemática têm vantagens sobre outros jogadores?

O intuito em realizar uma abordagem específica sobre o tema surgiu a partir do grande descontentamento aparente, vivenciado diariamente em sala de aula, e como tentativa de quebrar o velho paradigma de que matemática é uma disciplina muito difícil de ser compreendida. Assim ao usar o jogo da velha como ferramenta metodológica para ensinar matemática de forma lúdica e interativa, busca-se desenvolver habilidades fundamentais para a compreensão dos conceitos matemáticos, promovendo assim uma relação mais positiva dos alunos com a disciplina, desafiando a percepção tradicional de que a Matemática é complicada e desinteressante.

Assim, o primeiro capítulo explora o potencial dos jogos como ferramentas pedagógicas para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Ele analisa as diferentes formas pelas quais os jogos podem ser integrados ao currículo escolar, destacando suas potencialidades e desafios. O estudo se apoia em práticas exemplares que ilustram o impacto positivo e apontam desafios para a implementação e manutenção dos jogos na educação, oferecendo pontos de vista valiosos para educadores e pesquisadores interessados em explorar essa abordagem inovadora. O objetivo é apresentar meios de tornar o aprendizado mais interativo, envolvente e eficaz.

No segundo capítulo é realizado um estudo sobre o jogo da velha tradicional, também conhecido por Tic-Tac-Toe, apresentando um contexto histórico de sua aplicação, e após definidos os principais tópicos da análise combinatória, é realizado diversos cálculos, como número de jogadas possíveis, números de jogos que terminam em cada etapa, possibilidade de vitória para cada jogador, entre outros aspectos, além disso, é apresentado uma estratégia baseada em princípios da análise combinatórias, quando aplicada corretamente, pode potencializar as chances de vencer o jogo.

O terceiro capítulo apresenta um jogo derivado do jogo da velha que chamamos aqui de Jogo da Velha Supremo, no qual cada quadrado do tabuleiro original contém um novo jogo da velha completo, condicionando a jogada do oponente. Nesse capítulo também fazemos uma comparação com um outro jogo da velha, chamado Jogo da Velha Ultimate, que apresenta o mesmo tabuleiro e condicionamento para jogadas, porém com algumas regras específicas que diferem do Jogo da Velha Supremo. Este capítulo também detalha as regras para jogar essa versão expandida e explora estratégias com maior potencial de vitória. Adicionalmente, são apresentados cálculos que estimam o número possível de jogadas até a quarta etapa do jogo.

O quarto capítulo dedica-se a apresentar uma proposta metodológica detalhada para a aplicação do Jogo da Velha Supremo como ferramenta pedagógica no ensino da matemática. Desdobrando-se em etapas sequenciais, o método visa otimizar a assimilação das regras do jogo, o desenvolvimento de estratégias eficazes e a transferência dessas habilidades para a resolução de problemas matemáticos. Partindo de uma introdução lúdica ao jogo, explorando as nuances do condicionamento de jogadas e das possíveis estratégicas inerentes à sua estrutura, culminaremos com a aplicação prática em atividades que correlacionam o jogo com conceitos matemáticos específicos, transformando o Jogo da Velha Supremo em um catalisador para o aprendizado significativo. Além de apresentar uma abordagem inovadora para o ensino de análise combinatória, este trabalho também traz uma contribuição prática significativa: a criação da versão digital do Jogo da Velha Supremo, desenvolvida pelo próprio autor por meio de ferramentas de inteligência artificial. Essa versão digital foi concebida com o objetivo de facilitar a assimilação das regras, permitindo que estudantes e professores experimentem o jogo de maneira interativa e dinâmica. A possibilidade de visualizar, em tempo real, o condicionamento das jogadas e os desdobramentos estratégicos do jogo contribui de forma decisiva para a compreensão dos conceitos envolvidos, tornando o processo de aprendizagem mais acessível e envolvente.

O quinto e último capítulo, apresenta uma síntese dos principais resultados e reflexões obtidos ao longo do trabalho, destacando a análise do Jogo da Velha Supremo como ferramenta metodológica para o ensino de Análise Combinatória. Neste capítulo, o leitor encontrará uma avaliação crítica sobre a eficácia da proposta didática desenvolvida, suas possíveis contribuições para tornar o ensino da matemática mais atrativo e acessível, bem como as limitações e desafios enfrentados durante a implementação. Além disso, são discutidas as possibilidades de aplicação do método em diferentes contextos educacionais e sugeridos caminhos para futuras pesquisas, reforçando o papel do professor como agente transformador por meio de metodologias inovadoras e contextualizadas.

1 O USO DOS JOGOS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Neste capítulo, exploraremos como os jogos podem ser utilizados como ferramentas pedagógicas para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. Analisaremos as diferentes formas pelas quais os jogos podem ser integrados ao currículo escolar, destacando suas potencialidades e desafios. Apoiando-se em práticas exemplares que ilustram o impacto positivo e apontam desafios para implementação e manutenção dos jogos na educação, oferecendo pontos de vista valiosos para educadores e pesquisadores interessados em explorar essa abordagem inovadora.

1.1 DEFINIÇÃO DE JOGO

Entende-se jogo, como uma atividade lúdica e recreativa praticada com o intuito de diversão e entretenimento, geralmente relacionado a regras informais, competição, sorte ou simulação, geralmente associados a praticas culturais transmitidas por tradição. Conhecemos atualmente diversos tipos de jogos, como os de tabuleiro, brincadeiras, jogos de azar, jogos digitais entre outros. Assim, podemos definir jogar como uma ação que tem por finalidade a busca pelos aspectos supracitados, usando ou não instrumentos matérias para tal.

Os jogos constituem uma importante parte cultural da humanidade, se fazendo presentes no cotidiano do indivíduo desde a infância até a fase adulta, e representando uma forma de expressão, interação, divertimento e aprendizado, sendo capaz de transcender barreiras culturais e atravessar gerações. Neste contexto, os jogos desempenham papel significativo na formação de identidades culturais, na criatividade e na socialização dos indivíduos.

Apesar da definição de jogo ser bastante intuitiva, no meio acadêmico, ela pode se mostrar mais complexa, ao longo da história diversos pensadores e escritores buscam uma definição para o termo, porém, as principais definições sugerem que um jogo deve ter regras, variação de resultados, estes estão atrelados a valores, pois geralmente há um vencedor, a presença de metas e objetivos a serem alcançados e interatividade entre os participantes, tanto na forma de parceria colaborativa ou na forma de oposição competitiva.

Para Freire ([2004?]), “jogo e trabalho, lúdico e tarefa, são fenômenos complementares” assim, em uma visão mais filosófica do que vem a ser um jogo, afirma que

> Quando jogamos, usufruímos das coisas, daquilo que a vida coloca à nossa disposição. Ao usufruir, consumimos, tiramos, deixamos uma falta. Essa falta precisa ser reposta, caso contrário as ações humanas não serão sustentáveis. A maneira de repor o que falta é trabalhar. Trabalho é produção, é compromisso, e que esse trabalho seja voltado para melhorar a qualidade de vida e para repor aquilo que usufruímos quando jogamos, contemplamos, festejamos (Freire, [2004?]).

O autor afirma que jogo é tudo aquilo que sua percepção afirma ser, e cita diversas situações que podem ser consideradas jogo, como por exemplo um grupo de crianças correndo, adultos conversando descontraidamente, um casal dançando, dentre outras coisas. A visão do autor fica bem clara quando foge aos conceitos tradicionais e afirma que “qualquer atividade que não tenha uma utilidade aparente, que não se destine a cumprir uma tarefa, que não tenha um objetivo externo, pode ser considerada como um jogo” (Freire, 2004).

Segundo Kishimoto (1990), os jogos físicos surgiram entre os romanos com o propósito de formar soldados e cidadãos disciplinados, leais e devotos. Há registros de diversas modalidades de jogos, como competições de atletismo, luta livre, jogos com bola, saltos entre outros, que objetivavam preparação militar, desenvolvendo a disciplina e obediência, além de muitos deles serem fonte de entretenimento e demonstrar o poder imperial.

Com o passar do tempo, os jogos de modo geral foram ganhando variações e tornando-se mais acessíveis à população, sendo também implementado novos meios e recursos para praticá-los. Isso possibilitou que pessoas de diferentes camadas da sociedade pudessem ter acesso a essas atividades, promovendo assim uma maior inclusão e diversidade nos jogos. Além do mais, o desenvolvimento tecnológico oferece novas ferramentas que possibilitou melhora na divulgação dos jogos, permitindo assim, que jogos de diferentes culturas espalhassem por todo o mundo, enriquecendo o campo com novas modalidades e estilos de jogo.

Segundo Kishimoto (1990. p. 44):

> Esse processo de valorização do jogo, mais recente, chega ao Brasil na década de oitenta, com o advento das brinquedotecas, a criação de associações de brinquedotecas, a multiplicação de congressos, o aumento da produção científica sobre o tema e o interesse crescente dos empresários em aumentar seu faturamento, investindo em novos produtos.

Percebemos que na fala do autor, já há a presença da indústria de brinquedos, que também foi grande impulsora da notoriedade e expansão dos jogos a nível global. Nesse processo de difusão é natural que os jogos passem a ser usados em ambientes educacionais, a inserção e integração de jogos no processo educacional têm sido cada vez mais apreciada, pois oferecem uma abordagem mais interativa e cativante para o ensino-aprendizado. Os jogos educacionais podem ser usados para ensinar e desenvolver conceitos e habilidades de diversas áreas do conhecimento, desde matemática até habilidades sociais e emocionais, incentivando a resolução de problemas, o pensamento crítico e a cooperação entre os estudantes, promovendo um ambiente mais dinâmico e motivador.

Os meios tecnológicos também exercem uma função crucial nesse cenário, possibilitando a criação de jogos educacionais personalizados e adaptáveis, podendo ser moldados de acordo com as necessidades individuais dos estudantes. Como resultado, os jogos se tornaram uma ferramenta valiosa na educação, contribuindo para tornar o processo de ensino-aprendizado mais atraente, participativo e eficaz.

1.2 JOGOS NA EDUCAÇÃO

A educação no Brasil historicamente enfrenta desafios persistentes, mesmo com o avanço das novas tecnologias que oferecem ferramentas inovadoras para o ensino-aprendizagem, frequentemente podemos observar programas televisivos, revistas, jornais e trabalhos acadêmicos destacando dados alarmantes, não apenas na área da matemática, conforme o ranking PISA, mas em praticamente todas as áreas do currículo escolar. Apesar das tecnologias digitais estarem cada vez mais presentes e trazendo mudanças metodológicas, as limitações, tanto no preparo docente quanto em investimentos adequados, ainda dificulta seu pleno aproveitamento. Dessa forma, os problemas educacionais no país não são recentes, mas sim uma questão histórica que permanece em constante desafio.

Poderíamos apontar e investigar diversos motivos para tal situação, porém, esse não é o foco deste trabalho, pelo contrário, avaliaremos algumas sugestões de metodologia de ensino, principalmente no campo da matemática, e argumentaremos sobre sua eficácia por meio de estudos já realizados no campo acadêmico.

Uma das alternativas amplamente discutidas no cenário educacional atual, é o uso de metodologias ativas, tais como ensino híbrido, sala de aula invertida, e inserção de jogos em sala de aula. Essas metodologias são estratégias de ensino que incentivam os estudantes a aprenderem de forma autônoma e participativa, promovendo um ambiente de aprendizagem centrado no aluno, tornando-o agente ativo na construção do conhecimento. Essas metodologias têm como objetivo desenvolver habilidades como, resolução de problemas, pensamento crítico, colaboração e autonomia, tornando os estudantes mais preparados para enfrentar problemas reais.

Dentre as metodologias citadas, tomaremos como objeto de estudo a utilização de jogos em sala de aula, objetivando trazer ludicidade para a sala de aula, atraindo assim a atenção dos estudantes, promovendo engajamento e participação, tornando as aulas mais interativas e favorecendo a criatividade dos estudantes. Além disso, essa abordagem contribui para diminuir bloqueios, tanto cognitivos quanto emocionais.

A utilização dos jogos em sala de aula, conhecida como gamificação[1], permite a motivação dos estudantes por meio de recompensas e competições saudáveis, estimulando a criatividade e propondo-os a resolver problemas, pensar de modo coletivo, além de facilitar a retenção e assimilação de informações, uma vez que os conceitos são apresentados de maneira mais envolvente, tendo a participação direta do aluno no processo de construção dos mesmos.

A ideia de inserir jogos como ferramenta metodológica no processo educacional é amplamente defendida no meio acadêmico, sendo possível encontrar diversos autores que defendem esse modelo de ensino. Grando (2004) destaca que os jogos fazem parte do contexto cultural e das práticas sociais dos alunos, sendo atividades lúdicas que promovem prazer e engajamento, além de citar aspectos cognitivos, para ela, os jogos contribuem para o desenvolvimento global do aluno, estimulando não só o raciocínio lógico, mas também habilidades sociais e emocionais. Ainda segundo Grando (2004, p.18):

> O jogo propicia um ambiente favorável ao interesse da criança, não apenas pelos objetos que o constituem, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Segundo a autora, inserir crianças em atividades de abstração é fundamental para o desenvolvimento da criança, pois a abstração possibilita que os alunos avancem do concreto para o simbólico, formulando hipóteses e criando estratégias de solução de problemas. Por meio dessas atividades, as crianças aprendem a generalizar ideias, identificar padrões e construir conhecimentos que vão além das situações imediatas e práticas do cotidiano.

Grando não limita o uso dos jogos apenas ao ensino de crianças; ela também reconhece a importância dos jogos para adolescentes. Em seus estudos, ela argumenta que os jogos podem ser adaptados para diferentes faixas etárias, inclusive para alunos do ensino fundamental II e médio. Segundo ela, para adolescentes, os jogos continuam sendo ferramentas eficazes para

---

[1] Gamificação consiste na aplicação de elementos e dinâmicas de jogos em contextos não lúdicos, visando aumentar o engajamento, a motivação e a participação dos indivíduos por meio de mecanismos como pontuação, recompensas e desafios.

promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, a resolução de problemas e a socialização, além de tornarem o aprendizado mais dinâmico e motivador. Ela ressalta que, para adolescentes, é importante escolher jogos que desafiem o pensamento abstrato e incentivem a elaboração de estratégias mais complexas. O papel do professor permanece fundamental, mediando as discussões e promovendo a reflexão sobre os conceitos matemáticos envolvidos, adequando o nível de complexidade dos jogos à maturidade dos alunos (Grando, 2004).

Nesse contexto, Borges (2020) afirma que "o trabalho com jogos em sala de aula, além de ser prazeroso e divertido, faz com que haja uma aceitação maior no que diz respeito aos conteúdos programados", porém o autor alerta sobre a necessidade de um estudo prévio sobre a aplicabilidade e finalidade dos jogos a serem utilizados:

> Os jogos e brincadeiras auxiliam o professor como uma estratégia metodológica para ajudá-los nesse processo. Além de chamar atenção dos alunos, desenvolve a aprendizagem e estimula o raciocínio lógico. Para que o trabalho com jogos dê resultado, contudo, é necessária uma avaliação prévia de quais jogos e como serão utilizados e as finalidades propostas por eles (BORGES, 2020, p.09).

Assim como toda aula requer um bom planejamento, antes de introduzir os jogos em sala de aula, o professor deve ter em mente os objetivos e resultados a serem alcançados, combinando com uma boa metodologia, a fim de alcançar os mesmos. Ainda segundo Borges (2020), "o jogo por si só não pode ser aplicado de forma solta, apenas como forma de preencher o tempo, deve ser sempre relacionado aos conteúdos estudados ou a serem estudados". De maneira análoga, Grando (2004, p.25) afirma que "é necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. O interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto, é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem[...]".

Portanto, a aplicação eficaz dos jogos em sala de aula requer planejamento cuidadoso para integrar o conteúdo curricular e monitorar o progresso dos estudantes. Caso essa preocupação prévia e durante a aplicação não seja levada em consideração, há grande possibilidade de que ao aplicar os jogos em sala, o professor não consiga introduzir nenhum conceito previsto, e a aula passe a ser vista pelos estudantes apenas como um momento de brincadeira e descontração, o que acaba frustrando e desmotivando o educador.

A inserção dos jogos como proposta metodológica é defendida também nas principais leis que regem a educação no país. Na Constituição Federal de 1988, apesar de não sugerir explicitamente, traz no artigo 206 que "o ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: II - liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar o pensamento, a arte e o saber; III - pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas”. (BRASIL, 1988. p.184). No trecho acima, percebemos que as metodologias inovadoras, como o uso de jogos, se enquadram nesses princípios. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), não cita diretamente o uso de jogos, porém reafirma que o ensino deve ter como princípios, os citados na Constituição Federal, além de incentivar a inovação e diversidade metodológica.

Tais metodologias também estão presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que define as aprendizagens essenciais para todas as etapas da educação básica, serve como referência para a elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas em todo o país, indicando as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada etapa, buscando estabelecer um padrão nacional na qualidade do ensino. Assim, ela sugere o uso de jogos para o desenvolvimento de tais habilidades, e incentiva a interdisciplinaridade, permitindo que os estudantes vejam conexões em diferentes áreas do conhecimento, desde a educação de crianças menores de 04 (quatro) anos até ao final do ensino médio (Brasil, 2017).

Essa abordagem é coerente com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), que são normas obrigatórias fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), e direcionam atividades para todos os níveis da Educação Básica. Sobre o ambiente educativo democrático, as DCNs afirmam que:

> Para que a instituição educativa se constitua em um ambiente educativo democrático, local de diferentes aprendizagens, é necessário considerar também as diversas fases de desenvolvimento da criança, jovens e adultos respeitando as suas individualidades enquanto sujeitos de direitos. Assim, os jogos e as brincadeiras devem ter por princípios o respeito integral aos direitos do outro, a convivência democrática, a sociabilidade socioambiental e a solidariedade (Brasil, 2013.p.527).

Assim, percebemos a importância de criar um ambiente educativo democrático, de modo que a inclusão de jogos e brincadeiras como ferramentas pedagógicas auxiliam e melhoram esse processo, pois não promovem apenas e aprendizagem lúdica, mas ensinam valores como cooperação, respeito e solidariedade. Além disso, tal inclusão deve considerar as individualidades de cada estudante, assim os jogos podem ser adaptados a cada fase do desenvolvimento do indivíduo, respeitando as necessidades e potencialidades de cada um.

As DCNs ainda reforçam que a abordagem não deve se restringir apenas a educação infantil, devendo ser aproveitada em todas as etapas da Educação Básica, e em todas as áreas do conhecimento:

> A ludicidade como estratégia pedagógica, por exemplo, não deve restringir-se ao universo da educação infantil, podendo perpassar vários momentos do processo de ensino aprendizagem nas escolas indígenas que ofertam o Ensino Fundamental. De acordo com esta orientação, as brincadeiras, as danças, as músicas e os jogos tradicionais de cada comunidade e das diferentes culturas precisam ser considerados componentes curriculares ou instrumentos pedagógicos importantes no tratamento das "questões culturais", tornando mais prazeroso o aprendizado da leitura, da escrita, das línguas, dos conhecimentos das ciências, das matemáticas, das artes (Brasil, 2013. p.386 – 387).

Assim, percebemos que a inclusão de jogos e brincadeiras é essencial em todo o currículo escolar, pois além de deixarem as aulas mais dinâmicas, atrativas e interativas, contribui também de forma significativa com as individualidades de cada estudante. Assim, ao incorporar elementos culturais como jogos e brincadeiras, a escola promove um ambiente de ensino mais inclusivo e prazeroso, enriquecendo o aprendizado e valorizando a diversidade cultural e social dos estudantes.

Tal ludicidade é uma ferramenta rica, que auxiliam o educador e promove maior engajamento nas aulas, assim exploraremos sua aplicação nas aulas de matemática, trazendo reflexões acerca de como tornar o ensino da matemática mais atrativo, interativo e acessível, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos de forma lúdica e mais divertida.

1.3 JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

De acordo com a BNCC o conhecimento matemático, por sua grande abrangência na sociedade e por sua potencialidade em formar cidadãos críticos, é necessário para todos os estudantes da Educação Básica. Assim, o ensino de Matemática é um tema amplamente debatido, pois muitas vezes enfrenta uma significativa resistência entre os estudantes. Embora a matemática seja uma ciência exata, o que pode tornar seu ensino excessivamente abstrato e dificultar a compreensão dos estudantes não é sua natureza exata, mas sim a forma como os conceitos são apresentados em sala de aula. Quando o ensino não se conecta ao cotidiano dos alunos ou não utiliza recursos concretos e contextualizados, a aprendizagem tende a se tornar mais abstrata e desafiadora. Assim, busca-se abordagens pedagógicas capazes de sanar tais problemas, relacionando a matemática a situações práticas e a integrando a outras áreas de conhecimento, promovendo assim, maior aceitação da disciplina, e compreensão dos conceitos matemáticos.

Segundo a BNCC,

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (Brasil, 2017. p. 265).

Apesar disso, talvez por falha no sistema de formação de professores que apenas apresentam conteúdos de forma metódica, os estudantes não conseguem enxergar a Matemática com sua devida importância. Isso ocorre porque a abordagem tradicional muitas vezes ignora a aplicação prática e a relevância da Matemática na vida cotidiana. Além disso, a falta de contextualização dos conceitos matemáticos dificulta que os alunos compreendam como esses conceitos são essenciais para entender e resolver problemas reais, ou ainda, mesmo com contextualização, os discentes não se interessam pela aula. Portanto, é fundamental que os educadores adotem métodos inovadores que integrem teoria e prática, permitindo que os estudantes percebam a Matemática como uma ferramenta poderosa e indispensável para o desenvolvimento pessoal e profissional.

Há muitas décadas diversos autores da educação e ensino da matemática se dedicam a buscar métodos e metodologias mais eficazes com relação ao ensino dessa disciplina, e muitos autores defendem que o uso de jogos em sala de aula retém mais a atenção dos alunos e consequentemente, melhoram a aprendizagem, uma vez que os jogos são reconhecidos por aumentar a curiosidade dos estudantes, tornando as aulas mais dinâmicas e participativas, podendo assim, facilitar a compreensão de conceitos matemáticos mais abstratos. Segundo Sousa (2022), os jogos não apenas atraem os alunos, mas também ajudam a desenvolver habilidades essenciais como argumentação, análise e reflexão. A prática de jogos em sala de aula pode contribuir significativamente para a formação dos alunos, especialmente na superação das dificuldades enfrentadas na disciplina.

Ainda segundo Sousa (2022, p. 19-20),

> O uso de jogos pode ser desenvolvido de diversos modos como meio facilitador na aprendizagem dos discentes, com diversas possibilidades de introdução de conteúdos, e podendo alternar com outros modos de ensino para criar conceitos matemáticos de forma agradável, através desse método pode-se obter uma excelente ferramenta, diferentemente quando aplicado do modo tradicional, usando apenas conteúdos e exercícios.

Para o autor, os jogos podem e devem ser incorporados com outras metodologias e não usados de maneira isolada, e sua implementação deve ser planejada, contemplando o currículo, com objetivos de aplicação e avaliação bem definidos. Isso significa que os jogos devem ser integrados nos planos de aula como uma forma de ferramenta metodológica capaz de introduzir novos conceitos, reforçar aprendizados ou promover revisão de temas já abordados. Além disso, outra característica importante a se observar é que a fácil avaliação e adaptação dos jogos, permite ao educador entender o que de fato surtiu resultado, sendo possível assim melhorar a sua aplicação, garantindo que os resultados educacionais sejam alcançados de maneira eficaz.

Para Grando (2004), o jogo vai além da interação com o brinquedo, pois envolve a definição e o cumprimento de regras, frequentemente estabelecidas em conjunto pelos participantes, contribuindo para a construção de uma lógica própria para o desenvolvimento da atividade. Essa prática é dinâmica e prazerosa, incentivando o engajamento dos jogadores e promovendo a socialização, uma vez que o contato com diferentes formas de pensar e agir fortalece as relações interpessoais. Além disso, o jogo possibilita que o aluno identifique seus limites e habilidades, aprendendo a lidar de forma positiva com a derrota, um aspecto fundamental para o desenvolvimento do autocontrole. Ainda segunda a autora, no contexto educacional, o jogo funciona como um recurso eficaz para o ensino da matemática, auxiliando na compreensão de conceitos complexos por meio do pensamento crítico, análise, formulação e verificação de hipóteses, estimulando a autonomia e o trabalho colaborativo. Durante as partidas, é comum que as crianças se auxiliem mutuamente, explicando regras e sugerindo estratégias, o que reduz a competitividade e valoriza a troca e o compartilhamento do conhecimento.

Diante das constantes mudanças no ambiente educacional, que teve a pandemia como um agravante significativo, fazendo com que a maioria dos estudantes retornassem às aulas presenciais mais desmotivados, tem sido constante a busca dos educadores por novas metodologias, que sejam capazes de reverter esse quadro. A pandemia trouxe desafios sem precedentes para o campo educacional, e o ensino remoto possibilitou uma grande diversidade de ferramentas nessa área, provocando novas maneiras de aprendizagem e de interação entre docentes e discentes, porém de modo geral mostrou muitas limitações e fragilidades no sistema educacional público do país, uma vez que maioria dos estudantes ainda não tem acesso a tais recursos, o que acentuou ainda mais os problemas de aprendizagem. Nesse contexto, os educadores têm procurado abordagens inovadoras que possam reacender o interesse dos alunos e melhorar a qualidade do ensino. A integração de jogos educacionais, tecnologia interativa e práticas colaborativas são algumas das estratégias que vêm sendo exploradas para aumentar a motivação e o engajamento dos estudantes, além de promover um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e inclusivo.

Anteriormente ao cenário pandêmico, Moura (1990) afirma que "a escola tem sofrido modificações no sentido de possibilitar formas de ensinar, diferentes daquela em que o conhecimento, como conjunto de regras bem estruturadas, tinha na pessoa do professor o único árbitro" e ainda segundo o autor, tais mudanças permitem a inserção de novas metodologias que permitem ao estudante a construção do conhecimento por meio da interação.

As mudanças na abordagem educacional destacadas por Moura (1990), tem impacto significativo no ensino de Matemática, que tradicionalmente era ensinada de forma rígida, em que os estudantes apenas decoram fórmulas repetem exaustivamente cálculos, apenas replicando um procedimento padrão, sem conseguir enxergar um real sentido no que estão fazendo. No entanto, as novas metodologias, como o uso de jogos, permitem aos estudantes assimilar conceitos à situações práticas, fazendo com que o conhecimento seja construído por meio da interatividade e resolução de problemas, desenvolvendo assim, habilidades essenciais como pensamento crítico e raciocínio lógico. Além disso, a interação entre discentes é modificada, fazendo com que sejam parceiros no processo de construção de conhecimento, o que pode resultar em uma compreensão mais duradoura e profunda dos conceitos matemáticos.

Complementando essa perspectiva, Grando (2004) enfatiza que o uso de jogos no ensino de Matemática não apenas torna o aprendizado mais envolvente, mas também possibilita que os alunos desenvolvam autonomia intelectual ao criar, testar e adaptar estratégias durante as atividades lúdicas. Para a autora, os jogos funcionam como mediadores na construção do conhecimento, permitindo que os estudantes avancem do pensamento concreto para o abstrato, ao mesmo tempo em que promovem a socialização e o trabalho colaborativo em sala de aula. Grando destaca ainda que a intervenção do professor é fundamental para transformar o potencial dos jogos em aprendizagem significativa, promovendo momentos de reflexão, análise e sistematização dos conceitos matemáticos explorados. Dessa forma, o jogo deixa de ser apenas uma ferramenta motivacional e passa a ser um recurso metodológico potente para a compreensão profunda e duradoura dos conteúdos matemáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs),[2] no que se refere ao ensino de matemática, já indicavam que os jogos de estratégia baseiam-se na solução de exemplos práticos, promovendo o desenvolvimento de habilidades específicas que são essenciais para a resolução de problemas, além de estimular os modos típicos do pensamento matemático. Para complementar, os PCNs salienta que

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (Brasil, 1998, p. 46).

Assim, percebemos que a incorporação de jogos de estratégia no ambiente escolar manifesta uma perspectiva inovadora e eficiente para o aprendizado de matemática, pois não só tornam as aulas mais dinâmicas e envolventes, mas também estimulam o desenvolvimento de habilidades essenciais, como raciocínio lógico e resolução de problemas.

Sobre tais habilidades e competências, a BNCC cita que a Matemática deve ser reconhecida como uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas ao longo da história, e é uma disciplina viva que contribui significativamente para solucionar problemas científicos e tecnológicos, alicerçando descobertas e construções, inclusive com impactos profundos no mundo do trabalho. Além disso, o estudo da Matemática deve ser encorajado como uma ferramenta para desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes. Ao recorrer aos conhecimentos matemáticos, os indivíduos podem compreender melhor o mundo ao seu redor e atuar de forma mais eficaz, utilizando a Matemática como uma base sólida para tomar decisões informadas e enfrentar desafios complexos. Para isso, o ensino da Matemática deve fazer uso de processos e ferramentas matemáticas, dentre elas das tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas habituais do cotidiano, validando assim estratégias e resultados.

Diante disso, os jogos são ferramentas essenciais para promover o engajamento dos estudantes em sala de aula, principalmente os jogos de estratégia que oferecem uma variedade de benefícios com relação ao ensino de Matemática, principalmente no desenvolvimento cognitivo e aspecto motivacional dos estudantes. Esse tipo de jogos estimula o raciocínio lógico

---

[2] Os PCNs deixaram de ser válidos como documento orientador principal, sendo substituídos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) em 2017. Embora os PCNs não sejam mais a referência central, eles ainda podem ser utilizados como material complementar, mas não são mais obrigatórios.

e dedutivo permitindo que os alunos formulem hipóteses e estratégias e posteriormente, criem argumentos para verificar sua validade. Ao integrar jogos de estratégia ao ensino de Matemática, é possível diminuir o medo e a ansiedade dos alunos com relação à disciplina, podendo tornar o ensino mais atrativo e eficaz.

Sobre os jogos de estratégias, Grando (2004, p. 38) afirma que:

> “Esses tipos de jogos são importantes para a formação do pensamento matemático e propiciam passos para a generalização (estratégias do jogo). O conceito matemático pode ser identificado na estruturação do próprio jogo, na medida em que não basta jogar simplesmente para construir as estratégias e determinar o conceito. É necessária uma reflexão sobre o jogo, uma análise do jogo. Um processo de reflexão e elaboração de procedimentos para a resolução dos problemas que aparecem no jogo. Observando as regularidades presentes na ação do jogo, ou mesmo na resolução das situações-problema de jogo, é possível ao aluno: ter previsões de jogadas, levantar hipóteses, corrigir "jogadas erradas" e elaborar estratégias vencedoras.”

Dentre os jogos e recursos citados, destacamos o jogo do xadrez que é um jogo estratégico e pode ser usado como ferramenta metodológica capaz de desenvolver o raciocínio lógico, reconhecimento de padrões e pensamento crítico e criativo por meio da análise de situações. O xadrez exige que os jogadores analisem situações, antecipem movimentos e tomem decisões baseadas em estratégias bem pensadas. Essas habilidades são diretamente transferíveis para a resolução de problemas matemáticos, onde a capacidade de analisar, planejar e executar planos é fundamental. Além disso, vale ressaltar os aspectos sociais presentes no jogo, como sociabilidade e interatividades que permitem que pessoas se encontrem e interajam de forma respeitosa, sem distinção de cor, gênero, idade, condição social, sendo assim, acessível a todos. Podemos destacar também valores como honestidade, respeito, cooperação e respeito às regras, que são fundamentais para o desenvolvimento do jogo.

Segundo Moura (2021) “o jogo de xadrez apresenta-se como um recurso auxiliar nas aulas de Matemática, com considerável potencial colaborador no processo de ensino-aprendizagem, dessa disciplina”. E após um estudo de caso com 60 alunos de uma escola municipal em Caxias no Maranhão, “percebeu-se que os participantes que sabiam jogar xadrez tiveram melhor resultado, comparado aos que não sabiam jogar esse jogo.” Ainda segundo o autor, vários alunos relataram que “sua concentração melhorou após a prática do jogo de xadrez.” Sabemos que a concentração é essencial para a compreensão de conteúdos matemáticos, assim, a partir dos resultados obtidos pelo autor, sugere-se que a inserção dos jogos que estimulam o raciocínio lógico e a criação de estratégias, favorecem o aprendizado de matemática.

Podemos fazer uma analogia entre o Jogo da Velha Supremo e o jogo de xadrez, pois, apesar dos tabuleiros serem completamente diferentes, são jogos combinatórios jogados em turnos, ou seja, cada jogador realiza uma jogada por vez, o que permite a cada um pensar estrategicamente sobre suas ações e as possíveis reações do oponente, além de que em maioria dos casos a prevenção é parte crucial da estratégia adotada. Os jogos de tabuleiro que usam estratégia, como o xadrez, desempenham um papel fundamental no ambiente escolar, pois além de proporcionarem momentos de lazer e descontração, favorecem o desenvolvimento de habilidades importantes, como o raciocínio lógico e o pensamento matemático. Essas características tornam os jogos ferramentas eficazes para estimular o aprendizado e o desenvolvimento cognitivo dos alunos, o Jogo da Velha Supremo pode proporcionar resultados semelhantes.

A aplicação do Jogo da Velha Supremo em sala de aula pode contribuir significativamente para o desenvolvimento das competências relacionadas ao uso de estratégias matemáticas e à resolução de problemas em diversos contextos. A dinâmica do jogo, que envolve raciocínio lógico, análise estratégica e interpretação de situações, permite aos estudantes utilizarem conceitos matemáticos para tomar decisões em tempo real. Por exemplo, ao decidir qual espaço do tabuleiro ocupar, os jogadores precisam considerar as consequências futuras, promovendo a articulação de conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar e resolver problemas. Tal processo estimula o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes, alinhando-se à competência de utilizar a Matemática para compreender situações cotidianas e científicas.

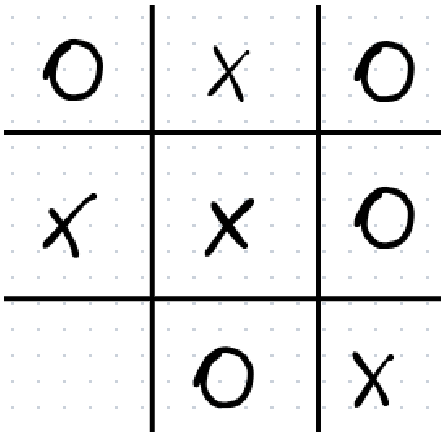
Além disso, o Jogo da Velha Supremo incentiva a construção de modelos matemáticos e o uso de diferentes representações, como o raciocínio geométrico para identificar padrões no tabuleiro ou o uso de estratégias computacionais na versão digital. A necessidade de planejar jogadas e prever movimentos do adversário promove a investigação de conjecturas e validação por meio da experimentação, habilidades essenciais para estabelecer argumentações consistentes. Dessa forma, o jogo também pode desenvolver a capacidade de comunicação matemática ao exigir que os estudantes expliquem suas estratégias e raciocínios, utilizando registros matemáticos variados. Por meio dessas práticas, os alunos além de resolver problemas específicos do jogo, também ampliam sua compreensão sobre conceitos matemáticos aplicáveis a desafios do mundo contemporâneo, como sustentabilidade e tecnologia.

Portanto, o jogo demonstra ser uma valiosa ferramenta pedagógica para o ensino da matemática, enriquecendo o aprendizado através de uma abordagem lúdica e estratégica. A regra de condicionamento de jogadas, que obriga o oponente a jogar em um tabuleiro menor específico com base na jogada anterior (que será apresentada no terceiro capítulo), estimula o pensamento lógico e a capacidade de antecipação, qualidades essenciais para a resolução de problemas matemáticos complexos. Além disso, o jogo incentiva o desenvolvimento de estratégias elaboradas, onde os jogadores precisam considerar não apenas a vitória imediata em um tabuleiro menor, mas também a influência de suas ações no direcionamento do jogo do oponente, promovendo assim uma compreensão mais profunda das relações causa-efeito e do planejamento estratégico. Assim, se bem aproveitados, o jogo se mostra uma ferramenta pedagógica com atributos únicos para o ensino de matemática podendo ser aproveitado em outras áreas dessa ciência.

2. O JOGO DA VELHA E ANÁLISE COMBINATÓRIA

Historicamente o jogo da velha, também conhecido como *Tic – Tac – Toe*, é um dos mais tradicionais jogos de tabuleiro praticados no mundo inteiro, tanto por crianças quanto por adultos. A facilidade tanto em preparar o tabuleiro – formado por quatro retas paralelas duas a duas e perpendiculares, também duas a duas – quanto no modo de jogar, talvez seja o que tornou o jogo tão popular. Na Figura 1, temos representado um exemplo de tabuleiro com 8 marcações.

Figura 1: Jogo da Velha com marcações



Fonte: Dados da Pesquisa.

Segundo Guaraldo (2013), o jogo se popularizou na Inglaterra no século XIX, quando mulheres se reuniam aos finais de tarde para bordar e conversar, no entanto, algumas mais idosas, em função da baixa visão já não conseguiam mais bordar e se entretinham com o jogo que em tradução livre era chamado "nós e cruzes" (em referência ao bordado). Porém, escavações realizadas no Egito encontraram referências de que o jogo já era praticado desde o século XIV antes de Cristo. Ainda segundo Guaraldo (2013), achados arqueológicos comprovam que o jogo da velha e outros jogos similares foram desenvolvidos de forma independente em diferentes regiões do planeta. No Brasil, supõe-se que o jogo foi popularizado por Pedro Álvares Cabral em 1500, e recebeu esse nome por ser praticado por idosas inglesas.

O jogo é um excelente exercício de estratégia e raciocínio lógico, sendo frequentemente utilizado como introdução a conceitos básicos dos jogos. Ele é praticado por duas pessoas, em que uma usa “X” e a outra “O” que em turnos alternados marcam quadros em um tabuleiro 3x3, tendo como principal objetivo alinhar três símbolos, seja na vertical, horizontal ou diagonal, e evitar que o adversário faça o mesmo. O primeiro que conseguir alinhar três símbolos é considerado o vencedor, caso nenhum consiga, o jogo termina empatado, nesse caso, comumente, dizemos que “deu velha”.

Tal jogo é uma importante ferramenta de desenvolvimento cognitivo, pois os jogadores desenvolvem o pensamento crítico, seja planejando suas jogadas, seja tentando prever e antecipar os movimentos do adversário. Assim, a busca de uma estratégia vencedora estimula a criatividade e desenvolve o pensamento lógico, além de promover interação social entre os participantes e ensinar valores sobre ganhar ou perder. Apesar de na maioria das vezes ser apresentado como um passatempo, o Jogo da Velha mostra-se uma importante ferramenta educativa, podendo ser praticado por pessoas de todas as idades, proporcionando aos participantes muita diversão e aprendizado, seja qual for o ambiente em que o mesmo for aplicado.

2.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA APLICADO AO JOGO DA VELHA

Apesar de sua simplicidade, do ponto de vista matemático o Jogo da Velha gera um amplo campo de discussão, seja na área da lógica estrutural, da análise combinatória e/ou do raciocínio lógico. Caso dois jogadores com boas estratégias se enfrentem, dificilmente um jogo terá um vencedor, porém, segundo Zuhri (2021), afirma que há 255168 jogos possíveis e jogáveis do jogo da velha, e em 51% destes, o vencedor é aquele que inicia jogando. O autor ainda afirma que estrategicamente, o Jogo da Velha é um jogo simples, e que “se ambos os jogadores jogarem a estratégia ótima, o jogo sempre levará a um empate” (Zuhri, 2021).

Apesar de diversas interpretações, podemos definir uma estratégia ótima, aquela que levará o jogador a vitória, ou que impossibilite que seu oponente seja vitorioso. Uma dessas estratégias foi estabelecida por Crowley e Siegler (1993, apud Zuhri, 2021, p. 1), que ditam oito regras a serem aplicadas hierarquicamente:

1. Vitória: complete uma sequência de três.
2. Bloqueio: Bloqueie o oponente de uma sequência de três.

> 3. Bifurcação: Crie duas possíveis sequências de três.
> 4. Bloqueio de Garfo: Impeça o oponente de fazer um garfo.
> 5. Centro: Jogue no centro se estiver vazio.
> 6. Canto oposto: Jogue no canto oposto do adversário.
> 7. Canto: Jogue o canto se estiver vazio.
> 8. Lado: Jogue o lado se estiver em branco.

Segundo Zuhri (2021), seguindo essas oito regras o jogador fará uma jogada perfeita, porém, vale ressaltar que mesmo assim não lhe é assegurado a vitória, pois o oponente também poderá realizá-la. Por meio de Inteligência Artificial (IA), reunimos dicas importantes em sites brasileiros que praticamente seguem o mesmo modelo proposto por pelos autores, porém, no modelo obtido por meio de IA, é fornecido uma proposta para quando se joga primeiro, e outra quando se é o segundo a jogar. No primeiro caso, a IA sugere começar pelos cantos, e observar a jogada do oponente, se ele marcar o centro, as chances de vencer diminuirão consideravelmente, assim a sugestão é que jogue para empatar. A segunda dica é criar múltiplas oportunidades de vitória - o que os autores chamam de bifurcação – para isso, tente jogar em três cantos do jogo. A terceira dica é responder às jogadas do oponente, se possível, prevendo suas possíveis jogadas e buscando sempre criar novas oportunidades de vitórias. No segundo caso, em que se joga em segundo, o primeiro passo é sempre escolher o centro, pois assim, maximiza as chances de bloquear o adversário, e garante pelo menos o empate, caso o oponente não siga a estratégia correta, é possível até sair vencedor. Ainda segundo Zuhri (2021), do total de jogos jogáveis, o primeiro jogador sai vitorioso em 51,4% deles, o segundo em 30,5% e 18,1% terminam em empate. A seguir abordaremos temas relevantes para a compreensão desses dados.

2.2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é um ramo da matemática que se dedica ao estudo de métodos e técnicas para contar, e organizar elementos de conjuntos. Considera-se que este campo seja de extrema importância na resolução de problemas que envolvem contagem, especialmente quando envolvem probabilidade e estatística.

O ensino da análise combinatória na educação básica é cobrado desde os anos iniciais (como prevê a BNCC), e se aprofunda de maneira progressiva durante os anos de estudo, porém, sua efetivação só se dá no Ensino Médio, quando os conceitos e princípios são abordados de maneira mais direta, como evidenciado a seguir:

> “Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas. Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os

> casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. [...]" (Brasil, 2018, p. 275).

A BNCC ainda enfatiza que as habilidades devem conversar com habilidades de outras áreas do conhecimento, dando enfoque para interdisciplinaridade, que consiste na combinação de conteúdos de diferentes disciplinas, buscando a compreensão de um conteúdo a partir de diferentes pontos de vista.

Podemos observar as habilidades de contagem presentes na BNNC para o 1º ano do Ensino Fundamental, que integram a análise combinatória e os processos de contagem na série, destacando a resolução de problemas

> "(EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação. (EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos. (EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade" (BRASIL, 2018, p. 279).

Portanto, segundo a BNCC, além de conhecer os números e aprender realizar contagem e comparação entre quantidades distintas ou não, os estudantes também devem reconhecer os números como códigos de identificação, poderíamos citar como o exemplo, a série que o mesmo estuda, apesar de que usar o algarismo um, não indica, na maioria das vezes, que é o primeiro ano de sua vida escolar.

Ainda segundo o documento, a matemática precisa garantir que os alunos façam uma associação do mundo real a representações matemáticas, associando-as a conceitos e propriedades, podendo assim fazer, "induções e conjecturas" (BRASIL, 2018, p. 279).

No campo da análise combinatória, principalmente nos processos de contagem destacam-se dois princípios fundamentais: o aditivo e o multiplicativo.

2.2.1 PRINCÍPIO ADITIVO

O princípio aditivo é um conceito fundamental na análise combinatória, utilizado para contar o número total de eventos que podem ocorrer em situações onde as opções são inclusivas e exclusivas. Por definição temos que, se um evento A pode ser realizado de m maneiras diferentes, e um evento B pode ser realizado de n maneiras também distintas, e ambos não podem ocorrer simultaneamente, então o número total de maneiras de escolher um evento entre os dois é dado por $m + n$. A definição se aplica para um número maior de eventos.

Exemplo 1: Se em uma urna há seis bolinhas com números ímpares e quatro bolinhas com números pares, o total de maneiras de se sortear uma bolinha com número que seja ímpar, ou que seja par é 6 + 4, portanto, 10 maneiras.

O exemplo ilustra como o princípio aditivo simplifica a contagem em cenários de escolhas excludentes. Ao garantir que os eventos "sortear um número ímpar" e "sortear um número par" não ocorram simultaneamente, a soma direta das possibilidades (6 + 4) torna-se uma estratégia eficaz e intuitiva.

2.2.2 PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

O princípio multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da Contagem (PFC), é outro conceito essencial na análise combinatória, utilizado para contar o número total de maneiras de realizar uma série de eventos independentes. Segundo esse princípio, se um evento A é constituído por duas etapas, em que a primeira pode ser realizada de m maneiras diferentes, e a segunda pode ser realizada de n maneiras também distintas, o total de maneiras diferentes de se realizar ambos os eventos é $m \cdot n$. O mesmo se aplica para um número maior de eventos.

Exemplo 2: Tomamos o clássico exemplo do viajante: Um viajante pretende ir da cidade A até a cidade C, passando pela cidade B. Sabe-se que de A até B, há três possibilidades de transportes, (ônibus, táxi e moto), e que de B até C, há quatro opções de transportes (trem, ônibus, barco e moto). Desse modo, de quantas maneiras distintas o viajante pode fazer a viagem?

Solução:

Observemos inicialmente que, de acordo com a definição, o evento é sair da cidade A e chegar à cidade C.

As etapas são:

i. Ir de A à B: 3 possibilidades
ii. Ir de B à C: 4 possibilidades

Portanto, o total de maneiras de realizar o evento é: 3 · 4 = 12 maneiras.

O exemplo demonstra como o princípio multiplicativo resolve problemas envolvendo etapas sequenciais e independentes. A independência entre as etapas é crucial para aplicação do princípio. Se houver dependência de escolhas (por exemplo, um transporte de B para C que só está disponível se um meio específico for usado de A para B), a contagem exigiria ajustes.

2.2.2.1 DIAGRAMA DE ÁRVORE

Na solução de problemas de contagem, principalmente os que envolvem o PFC, a árvore de possibilidades ou diagrama de árvore, é um dos métodos mais visuais e eficazes de representar as possibilidades de realização de um evento. Observemos a sua aplicação:

Exemplo 3: Ana tem 3 camisetas (vermelha, azul e verde) e 2 calças (jeans e cáqui). Qual o número de combinações possíveis que ela pode fazer usando uma camiseta e uma calça?

Solução: Para determinar quais combinações diferentes de roupas você pode usar, aplicamos o princípio multiplicativo:

As etapas do evento são:

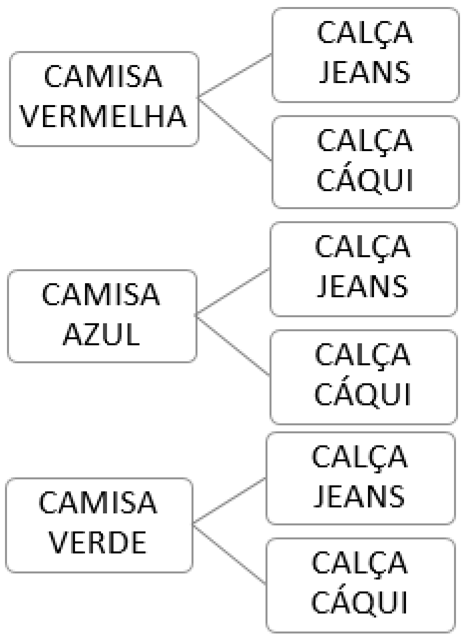
i. Escolher uma camiseta: 3 possibilidades

ii. Escolher uma calça: 2 possibilidades

Assim, o total de combinações possíveis é: $3 \cdot 2 = 6$.

Observe agora na Figura 2, a mesma solução por meio do diagrama de árvore:

Figura 2: Diagrama de árvore



Fonte: Autor (2025).

Portanto, Ana pode formar 6 combinações diferentes de roupas. As possibilidades são:

1. Camiseta vermelha com calça jeans
2. Camiseta vermelha com calça cáqui
3. Camiseta azul com calça jeans
4. Camiseta azul com calça cáqui
5. Camiseta verde com calça jeans
6. Camiseta verde com calça cáqui

O uso do diagrama de árvore neste exemplo destaca a clareza visual proporcionada por essa ferramenta na resolução de problemas de contagem. Ao representar graficamente cada escolha e suas ramificações, o diagrama possibilita não apenas calcular o total de combinações, mas também visualizar todas as opções possíveis de forma organizada. Ele é especialmente útil em situações em que se deseja garantir que nenhuma possibilidade seja esquecida ou repetida, além de facilitar a compreensão do processo de escolha sequencial.

2.2.3 FATORIAL (!)

Seja *m* um número inteiro não negativo. Define-se fatorial de m, e indica-se por *m!*, o produto de todos os números naturais menores ou iguais a *m*. A definição matemática é:

$$m! = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para todo m} \geq 2.$$

Por convenção, o fatorial de zero e de um são definidos como 0! = 1, e 1! = 1.

Exemplo 4:

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

O cálculo de *m!* se torna mais difícil à medida que *m* aumenta, por exemplo:

- 10! = 3 628 800
- 20! = 2 432 902 008 176 640 000

Observe que seria inviável escrevermos 50!, por exemplo. Assim para facilitar a escrita desses números muito grandes, podemos escrever simplesmente:

- $m! = m \cdot (m - 1)!$,

De maneira análoga:

- $(m + 1)! = (m + 1) \cdot m!$

Essa propriedade chamada fatorial recursivo é amplamente utilizada para cancelar termos comuns em frações, tornando possível resolver problemas combinatórios que, à primeira vista, pareceriam inviáveis devido à magnitude dos números envolvidos. Assim, seu uso é uma ferramenta poderosa para tornar a análise combinatória mais acessível e eficiente.

- $\frac{15!}{12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\ 730$
- $\frac{156!}{154!} = \frac{156 \cdot 155 \cdot 154!}{154!} = 156 \cdot 155 = 24\ 180$

O conceito de fatorial é fundamental na análise combinatória, pois expressa o produto sequencial dos números naturais até um dado valor, facilitando o cálculo de permutações, combinações e outras contagens complexas.

2.2.4 PERMUTAÇÕES

Seja o conjunto M, tal que M $=\{\ m_1,\ m_2, m_3, m_4, \ldots, m_m\ \}$, formado por m elementos distintos. Chama-se permutação uma organização de todos os elementos de M, em *m* posições. Pelo PFC, o total de maneiras de se organizar esses elementos é dado por:

$$m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Portanto,

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Exemplo 5: Qual o número de anagramas[3] da palavra PAI?

Solução: Os anagramas da palavra pai são:

PAI – PIA – AIP – API – IAP – IPA, portanto 6 anagramas.

Podemos perceber que $6 = P_3 = 3!$. Assim, para facilitar os cálculos, o número de anagramas de uma palavra com *m* letras distintas, pode ser calculado por P_m.

Exemplo 6: Qual o número de anagramas da palavra ANA?

Poderíamos deduzir facilmente que o número de anagramas também é seis, pois a palavra também é formada por três letras. Porém, nesse caso temos a repetição da letra A, o que reduz o número de anagramas. Para facilitar a visualização, escreveremos ANA, de modo que uma das vogais A esteja em destaque: AN**A**. Assim podemos escrever os anagramas: AN**A**, A**A**N, NA**A**, N**A**A, **A**NA e **A**AN. Observemos agora, que dois a dois os anagramas são iguais, exceto pela vogal A em destaque, portanto, podemos concluir que se não tivesse sido alterado as cores, os anagramas não teriam diferença, logo são o mesmo anagrama. Assim, ao invés de seis, podem ser formados apenas três anagramas distintos. Quando temos uma permutação de *m* elementos, em que um deles se repete *k* vezes e outro *q* vezes, temos uma permutação com elementos repetidos. O número de permutações possíveis pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$P_m^{k,q} = \frac{m!}{k!\,q!}$$

Portanto, o número de anagramas da palavra ANA, é dado por:

[3] Anagrama é uma palavra ou expressão formada a partir de outra palavra ou expressão, utilizando todas as letras uma única vez, podendo a nova palavra fazer sentido ou não.

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3 \text{ anagramas.}$$

Este exemplo ilustra de forma clara a importância de considerar elementos repetidos nas permutações, pois a simples contagem pelo fatorial do número total de letras pode superestimar o número de anagramas distintos. Assim, ao reconhecer que as letras repetidas geram permutações idênticas, aplicamos a fórmula de permutação com elementos repetidos, que ajusta o total dividindo pelo fatorial das quantidades de repetições. Esse conceito é fundamental para resolver problemas combinatórios envolvendo repetições, garantindo uma contagem precisa e evitando duplicidades.

2.2.5 ARRANJOS

Suponhamos agora, que dado o conjunto M = $\{ m_1,\ m_2, m_3, m_4, \dots, m_p \}$, queiramos organizar um número k de elementos do conjunto M, em k posições e com $k \leq p$. A essa organização, dá-se o nome de arranjo. Um número de arranjos possíveis, pode ser determinado pela fórmula:

$$A_{p,k} = \frac{p!}{(p-k)!}$$ *(Lê-se, arranjo de p elementos tomados k a k).*

Exemplo 7: Em um torneio de futebol em que há 12 times disputando, de quantas maneiras distintas podem ser premiados o primeiro, segundo e terceiro lugar?

Solução: Observe que temos um conjunto de 12 times, dos quais serão premiados 3. Assim, o número de premiações possíveis corresponde ao arranjo de 12, tomados 3 a 3.

$$A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320\ maneiras.$$

O exemplo evidencia a aplicação prática dos arranjos na contagem de possibilidades quando a ordem importa. Premiar o primeiro, segundo e terceiro lugar em um torneio é um caso clássico em que a posição faz diferença, portanto, utilizamos arranjos para calcular o número de maneiras distintas de distribuir as premiações. A fórmula do arranjo, que considera a seleção e a ordenação de um subconjunto de elementos, permite calcular de forma eficiente o total de combinações possíveis sem precisar listar todas elas.

2.2.6 COMBINAÇÕES

Tomando novamente o conjunto M = $\{ m_1,\ m_2, m_3, m_4 \dots, m_p \}$, o número de subconjuntos de M com exatamente k elementos, é chamado de combinação de p elementos tomados k a k. Vale ressaltar que $k \leq p$, e por se tratar de um subconjunto, a ordenação não faz diferença, por exemplo, $\{ m_2, m_1\} = \{m_1, m_2\}$, logo são o mesmo subconjunto. Nas condições dadas, o número de subconjuntos possíveis, é dado por:

$C_{p,k} = \frac{p!}{(p-k)!k!}$ (Lê-se, combinação de p elementos tomados k a k).

Exemplo 8: De um grupo de 12 acionistas de uma empresa, serão sorteados 3 para formar uma comissão de fiscalização orçamentária, em ambos os sorteados terão a mesma função dentro da comissão. De quantas maneiras a comissão poderá ser formada?

Solução: De modo geral, durante a resolução de questões, os estudantes sentem dúvida sobre quando usar arranjo ou combinação. Para que não haja esse tipo de dúvida, devemos observar se a ordem da escolha (ou sorteio) dos elementos fará alguma alteração na formação do subconjunto. Nesse caso específico, observemos que qualquer que seja a ordem de sorteio dos acionistas, eles terão a mesma função, logo {A, B, C} = {B, C, A} por exemplo. Assim, o total de maneiras de se formar a comissão, é dado pela combinação de 12 elementos (total de acionistas) tomados 3 a 3 (número de acionistas que serão sorteados).

$$C_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!\,3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!\,3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220\ maneiras.$$

Este exemplo destaca a importância de distinguir entre arranjos e combinações, especialmente ao analisar se a ordem dos elementos selecionados influencia ou não o resultado final. No caso da formação da comissão, onde todos os acionistas sorteados têm a mesma função, a ordem não altera a composição do grupo, caracterizando um problema de combinação. Assim, o uso da fórmula de combinação é apropriado para calcular o número total de comissões possíveis. Compreender essa diferença é fundamental para aplicar corretamente os conceitos da análise combinatória, evitando erros comuns e garantindo resultados precisos em situações práticas, como a seleção de equipes, comissões ou grupos onde a ordem não importa.

2.3 APLICAÇÃO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA AO JOGO DA VELHA

Como mencionado anteriormente, apesar da simplicidade do jogo da velha, no que diz respeito à análise combinatória, temos um amplo campo de discussão. Analisaremos aqui alguns tópicos como, estados possíveis do tabuleiro, estados de jogos alcançáveis, número de jogos possíveis, e vantagem em jogar primeiro. Para isso, utilizaremos a análise combinatória para realização dos cálculos necessários, e apresentaremos dados obtidos por Zuhri (2021) que realizou um estudo mais aprofundado em relação ao tema.

2.3.1 POSSÍVEIS ESTADOS DO TABULEIRO

O tabuleiro do jogo da velha é formado por nove quadros, podendo cada um deles apresentar três possíveis estados: preenchido com "X", preenchido com "O", ou vazio. Assim por meio do PFC, podemos determinar que os número possíveis de estado de preenchimento, ou não, do tabuleiro **é**:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9 = 19\,683$$

Portanto, há 19.683 maneiras distintas de se preencher, ou não, os espaços do tabuleiro. Porém, cabe a observação que esse não é o número de jogos possíveis, uma vez que entre essas combinações há, por exemplo, uma formação sem nenhuma marcação, 18 com apenas uma marcação, 72 com duas marcações, e assim sucessivamente.

Por meio da permutação, podemos determinar o total de maneiras de se preencher os nove quadros do Jogo da Velha de maneira alternada entre os dois jogadores. Para efeito de cálculo, consideramos que o jogador "X" iniciará jogando, desse modo, teremos 5 marcações "X" e 4 marcações "O". Dessa forma, o número total de marcações possíveis, corresponde a permutação de 9 elementos entre "X" e "O", em que um se repete cinco vezes, e outro quatro, que é dado por:

$$P_9^{5,4} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!\,4!} = \frac{3024}{24} = 126$$

Assim, há apenas 126 maneiras de se preencher completamente o tabuleiro alternando as jogadas entre os jogadores "X" e "O", de maneira análoga, quando se inicia com "O", teremos também 126 estados. Portanto, pelo princípio aditivo, obtemos 252 estados em que o tabuleiro fica com os nove quadros preenchidos, de modo alternado entre "X's" e "O's". Vale ainda ressaltar, que aqui não estamos considerando as regras do jogo, pois em muitas dessas formações o jogo teria acabado antes de se preencher completamente os nove quadros.

2.3.2 ESTADOS DE JOGOS ALCANÇÁVEIS

Como vimos, dos 19.683 possíveis estados do tabuleiro, apenas 252 têm os nove quadros preenchidos quando os jogadores "X"e "O" marcam alternadamente, porém como citado em muitos casos o jogo poderia ter acabado antes de se preencher todos os quadros.

Assim, considerando as regras do jogo, estudaremos o número de permutações possíveis após cada jogada, para tanto definiremos $n_x, n_o, e\ n_b$, como o número de quadros preenchidos com "X", "O" e em branco (sem preenchimento), respectivamente, logo $n_x + n_o + n_b = 9$. Portanto, faremos a permutação de 9 elementos com um número diferente de repetições a cada jogada e, chamaremos de fase *n*, o estado do jogo após *n* jogadas. Assim temos a permutação de 9 elementos, com repetição de "X's", "O's" e "espaços brancos", logo usaremos a seguinte fórmula:

$$P_9^{n_x,n_o,n_b} = \frac{9!}{n_x!\,n_o!\,n_b!}$$

- Fase 0: Nessa fase temos $n_x = 0, n_o = 0\ e\ n_b = 9$, pois ainda não há marcações com "X" ou "O", apenas nove quadros em brancos:

$$P_9^{0,0,9} = \frac{9!}{0!\,0!\,9!} = 1$$

- Fase 1: De maneira análoga temos, $n_x = 1, n_o = 0\ e\ n_b = 8$:

$$P_9^{1,0,8} = \frac{9!}{1!\,0!\,8!} = 9$$

- Fase 2: $n_x = 1, n_o = 1\ e\ n_b = 7$:

$$P_9^{1,1,7} = \frac{9!}{1!\,1!\,7!} = 72$$

- Fase 3: $n_x = 2, n_o = 1\ e\ n_b = 6$:

$$P_9^{2,1,6} = \frac{9!}{2!\,1!\,6!} = 252$$

- Fase 4: $n_x = 2, n_o = 2\ e\ n_b = 5$:

$$P_9^{2,2,5} = \frac{9!}{2!\,2!\,5!} = 756$$

- Fase 5: $n_x = 3, n_o = 2\ e\ n_b = 4$:

$$P_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3!\,2!\,4!} = 1260$$

- Fase 6: $n_x = 3, n_o = 3\ e\ n_b = 3$:

$$P_9^{3,3,3} = \frac{9!}{3!\,3!\,3!} = 1680$$

- Fase 7: $n_x = 4, n_o = 3\ e\ n_b = 2$:

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$$

- Fase 8: $n_x = 4, n_o = 4\ e\ n_b = 1$:

$$P_9^{4,4,1} = \frac{9!}{4!\,4!\,1!} = 630$$

- Fase 9: $n_x = 5, n_o = 4\ e\ n_b = 0$:

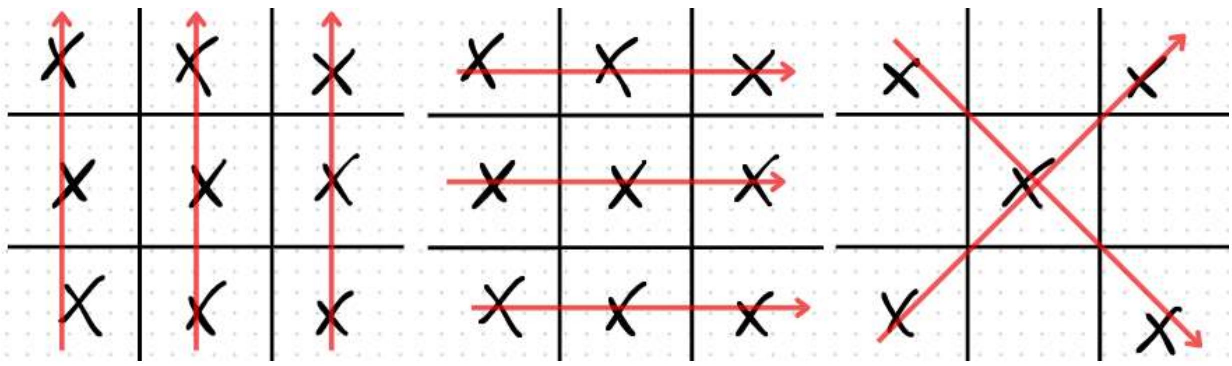
$$P_9^{5,4,0} = \frac{9!}{5!\,4!\,0!} = 126$$

Somando os resultado obtidos em cada fase, obtemos:

1 + 9 + 72 +252 + 756 + 1260 + 1680 + 1260 + 630 + 126 = 6046

Portanto, a análise mostra que há 6046 estados de jogos possíveis, porém ainda há outra observação a se fazer, uma vez que assim que um jogador alinhar três símbolos iguais o jogo para, dessa forma dentre os 6064 jogos calculados acima, há alguns que não são alcançáveis, “principalmente aqueles que estão um turno a mais de um estado vencedor. Para contar esses estados, devemos definir todas as formações vencedoras de três em linha,” ZUHRI (2021, p.3). Vale ressaltar que chamamos de fase o que o autor definiu por turno. Na Figura 3, há as possíveis formações vencedoras em que cada uma está indicada por uma flecha vermelha.

Figura 3: Formações vencedoras do Jogo da Velha



Fonte: Dados da Pesquisa

Observamos que há oito possíveis formações vencedoras, sendo três verticais, três horizontais e duas diagonais, os seis espaços restantes podem ser preenchidos obedecendo as regras e de modo que $n_x + n_o + n_b = 9$, tendo que $n_x = n_o$ ou $n_x = n_o + 1$. Segundo o autor, com um pouco de tentativa e erro, descobre-se que há quatro casos em que um estado vencedor não pode ser alcançado.

> Um estado vencedor para X, mas com a mesma quantidade (3) de O's nos espaços restantes, um estado vencedor para X, mas com 3 O's e 1 outro X nos espaços restantes, um estado vencedor para O, mas com 4 X's, e o último caso é um estado vencedor para O, mas com 5 X's e um outro O nos espaços restantes (ZUHRI, 2021, p. 4).

Assim, podemos multiplicar cada caso pelo número de formações vencedoras possíveis e adicioná-las, obtendo a quantidade de estados vencedores inalcançáveis. Com os 3 espaços preenchidos, permutamos os 6 elementos restantes de acordo com cada caso citado acima. Para tanto, usaremos o modelo do cálculo anterior:

$$8 \cdot P_6^{n_x,n_o,n_b} = 8 \cdot \frac{6!}{n_x!\,n_o!\,n_b!}$$

- Para $n_x = 0, n_o = 3\ e\ n_b = 3$:

$$8 \cdot P_6^{0,3,3} = 8 \cdot \frac{6!}{0!3!3!} = 8 \cdot 20 = 160$$

- Para $n_x = 1, n_o = 4\ e\ n_b = 1$:

$$8 \cdot P_6^{1,4,1} = 8 \cdot \frac{6!}{1!4!1!} = 8 \cdot 30 = 240$$

- Para $n_x = 4, n_o = 0\ e\ n_b = 2$:

$$8 \cdot P_6^{4,0,2} = 8 \cdot \frac{6!}{4!0!2!} = 8 \cdot 15 = 120$$

- Para $n_x = 5, n_o = 1\ e\ n_b = 0$:

$$8 \cdot P_6^{5,1,0} = 8 \cdot \frac{6!}{5!1!0!} = 8 \cdot 6 = 48$$

Assim, pelo método aditivo tempos que:

$$160 + 240 + 120 + 48 = 568$$

Agora subtraímos esse número do número de jogos alcançáveis encontrados anteriormente:

$$6046 – 568 = 5478$$

Obtemos assim, o número de jogos possíveis e alcançáveis em um jogo da velha, ou seja, 5478 jogos.

2.3.3 JOGOS JOGÁVEIS

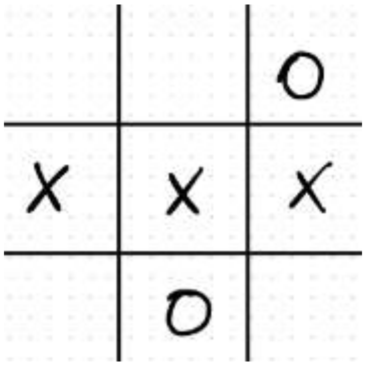
Ao considerarmos o preenchimento alternado do tabuleiro do jogo da velha, com “X’s” e “O’s”, temos pelo PFC:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362880$$

Portanto, há 362880 formas possíveis de preencher de modo em que dois jogadores se revezam, porém, nesse cálculo não é considerado as regras do jogo, pois há muitos desses que terminariam antes, tanto com vitória de um dos oponentes ou empate. Assim, desses a maioria irão além de um jogo que já foi ganho por algum jogador, ou não seja possível mais alcançar a vitória no jogo. Sabendo que só é possível conseguir uma vitória após a quinta etapa, para o jogador que iniciar, e após a sexta para o segundo jogador, vamos calcular o número de jogos jogáveis, para isso, contaremos o número de jogos que terminam em cada etapa, a partir da quinta. Assim, somaremos os jogos que terminam na etapa 5, na 6, na 7, na 8, e na 9, de modo que esses não contenham jogos que já terminaram.

Na 5ª etapa, apenas o jogador "X", que iniciará a partida pode ser vencedor, assim haveria 5 marcas no tabuleiro, sendo 3 "X's" e 2 "O's". Observe na Figura 4 um jogo vencido nesta etapa:

Figura 4: Jogo vencido na 5ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

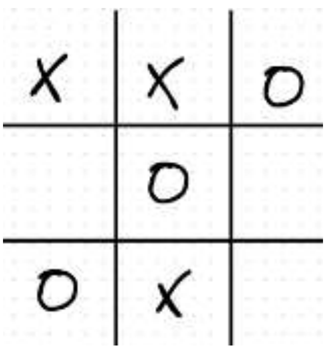
Para calcularmos o número de jogos possíveis, observamos que há 8 formações vencedoras para "X", portanto, o número de maneiras de organizar os três "X's" nos três quadros é dado por 3!, e podemos colocar os 2 "O's" nos seis espaços restantes do tabuleiro, assim teríamos a seguinte configuração $P_6^{0,2,4}$, uma vez que há seis espaços disponíveis, em que dois terão "O's" e outros quatro permanecerão brancos. Portanto, há duas maneiras (2!) de organizar os "O's", logo, pela regra do produto o número de jogos que terminam na quinta etapa é dado por:

$$8 \cdot 3! \cdot \frac{6!}{0!\,2!\,4!} \cdot 2! = 1440$$

Portanto, há 1440 jogos possíveis que terminam na 5ª etapa, na qual apenas o jogador "X" pode ser o vencedor.

Na 6ª etapa, apenas o jogador "O" pode vencer o jogo, pois caso o jogador "X" vença, o jogo não iria até a etapa 6. Observe na Figura 5, uma possível partida vencida por "O" nesta etapa:

Figura 5: Jogo vencido na 6ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

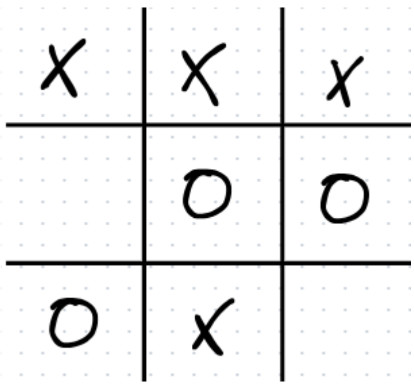
Segundo Zuhri, daqui é possível concluir que o jogador “X” poderá vencer apenas em uma etapa de número ímpar e o jogador “O”, apenas em uma etapa de número par. Observamos que também há 8 formações vencedoras para “O”, e para cada uma delas há 3! maneiras de organizá-los, logo essas formações podem ser organizadas de $8 \cdot 3!$ formas distintas. Para determinar o número de maneiras de organizar os “X’s”, observamos que há três elementos para seis quadros restantes, assim teríamos $P_6^{3,0,3}$com 3! maneiras cada. Porém, é necessário observar que esses jogos não podem incluir jogos em que “X” venceu na etapa anterior, nem onde “O” obteve uma formação vencedora após isso. Assim, para determinar o número de jogos inválidos, devemos considerar apenas formações verticais e horizontais, uma vez que uma formação diagonal não permite outra formação vencedora. Para cada uma dessas orientações (vertical e horizontal) existem 3! maneiras de “X” e “O” terem formações vencedoras simultâneas, além de ser possível organizar os “X's” de 3! maneiras distintas, o mesmo vale para o número de maneiras de organizar os “O's” no tabuleiro, que também é dado por 3!. Logo pelo PFC, o número de jogos inválidos é dado por $2 \cdot (3! \cdot 3! \cdot 3!)$, em que 2, corresponde ao número de orientações possíveis no tabuleiro. Subtraímos os jogos inválidos do cálculo anterior, para determinarmos o números de jogos que terminam na 6ª etapa.

$$\left(8 \cdot 3! \cdot \frac{6!}{3!0!3!} \cdot 3!\right) - 2 \cdot (3! \cdot 3! \cdot 3!) = 5328$$

Assim, existem 5328 jogos possíveis que podem terminar na 6ª etapa, onde apenas o jogador “O” pode ser o vencedor.

Como mencionado anteriormente, na etapa de número 7, o “X” é o único vencedor possível, uma vez que caso isso não ocorresse, o jogo terminaria na etapa anterior. No tabuleiro haveriam quatro “X’s” e três “O’s”, como no exemplo da Figura 6:

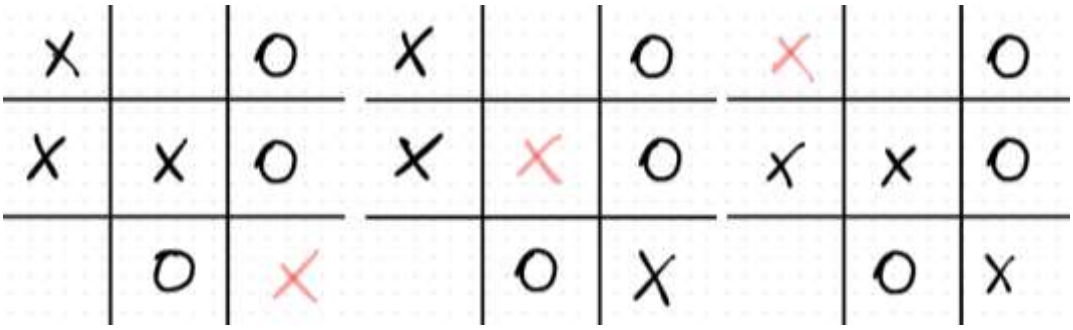
Figura 6: Jogo vencido na 7ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

No entanto, o cálculo para as formações vencedoras requer um pouco mais de atenção. Observa-se novamente que há 8 formações vencedoras para “X”, porém, não há 4! maneiras de organizá-los no tabuleiro, pois na 7ª etapa, o 4º “X” deve ser colocado na formação de três em linha, caso contrário, o jogo não finalizaria nessa etapa. Assim, temos 3 maneiras de colocar o 4º “X”, e 3! maneiras de colocar os três primeiros “X” nos outros quadros. A Figura 7 mostra as possibilidades de colocar o 4º “X”, considerando a formação vencedora em diagonal.

Figura 7: Possíveis maneiras de colocar o 4º X na 7ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

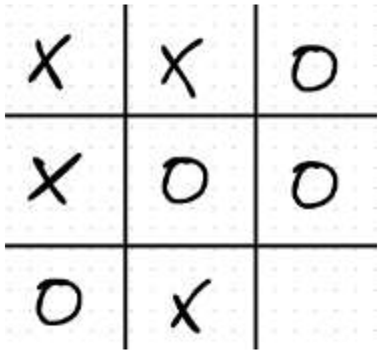
Observamos que um dos “X’s” não estará alinhado com os demais, assim o número de maneiras de colocá-lo em um dos outros seis quadros é dado por $P_6^{1,0,5}$. Para os “O’s”, restam cinco quadros, assim o número de maneiras de organizá-los é dado por $P_5^{0,3,2}$ com 3! maneiras distintas de fazê-lo ordenadamente. Assim como na etapa 6, também há jogos inválidos, pois terminariam na etapa anterior. Esses jogos contém formações vencedoras, uma para “X” e outra para “O”, porém apenas em combinações de duas linhas horizontais ou duas verticais, uma vez que formações diagonais não permitem outra formação vencedora. Percebemos que há três possibilidades para escolher uma fila vencedora para “X” e “O” em cada orientação, e 3! maneiras de colocar os três quadros com “X” e 3! para preencher com “O”, além de que os “X’s”, “O’s” e quadros em brando também podem permutarem de 3! formas distintas. Assim, devemos subtrair os jogos inválidos, da quantidade anterior. O número de jogos inválidos é dado por $2 \cdot (3! \cdot 3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3)$. O cálculo é semelhante ao da etapa 6, porém, deve-se salientar que o “X” não alinhado deve estar em algum dos três quadros restantes, portanto $P_3^{1,0,2}$ em que o 4º “X” deve estar alinhado com outros dois, como mencionado anteriormente. Logo o número de jogos que acabam na 7ª etapa é dado por:

$$\left(8 \cdot 3 \cdot 3! \cdot \frac{6!}{1!\,0!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot 3!\right) - 2 \cdot (3! \cdot 3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3) = 47952$$

Dessa forma, há um total de 47952 jogos possíveis que podem concluir na 7ª etapa, na qual somente o jogador “X” pode sair vitorioso.

Na 8ª etapa, o único vencedor possível é o “O”, os cálculos são análogos aos da etapa anterior, novamente temos 8 padrões vencedores, serão marcados no tabuleiro quatro “X’s” e quatro “O’s”, de modo que o último “O” deve estar alinhado com outros dois em uma fila de três, garantindo assim uma formação vencedora, como pode ser observado na Figura 8:

Figura 8: Jogo vencido na 8ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

Há três maneiras de marcar o último “O” e 3! maneiras de colocar os três primeiros. Ainda, um “O” não estará alinhado com os demais, tendo seis quadros possíveis para posicioná-lo, assim, temos $P_6^{1,0,5}$. Os quatro “X’s” podem ser marcados nos cinco espaços restantes com $P_5^{4,0,1}$ permutações e 4! maneiras de colocá-los. Para o cálculo dos jogos inválidos, faremos de maneira análoga as duas etapas anteriores, também há 3! maneiras de escolhermos uma fila vencedora, tanto para “X”, quanto para “O”, e 4! maneiras de organizar os “X’s”, além de 3! formas de organizar os três primeiros “O’s”, porém, há um “O” extra, que será marcado em um dos três quadros que sobram, assim temos $P_3^{1,1,1}$. O último “O”, tem que formar uma fila de três e novamente há 3 possibilidades. Sendo assim, o número total de jogos que terminam na 8ª etapa é dado por:

$$\left(8 \cdot 3 \cdot 3! \cdot \frac{6!}{1!\,0!\,5!} \cdot \frac{5!}{4!\,0!\,1!} \cdot 4!\right) - 2 \cdot (3! \cdot 3 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3!) = 72576$$

Logo, o número de jogos possíveis que finalizam na 8ª etapa, na qual apenas “O” pode ser vencedor é de 72576 jogos.

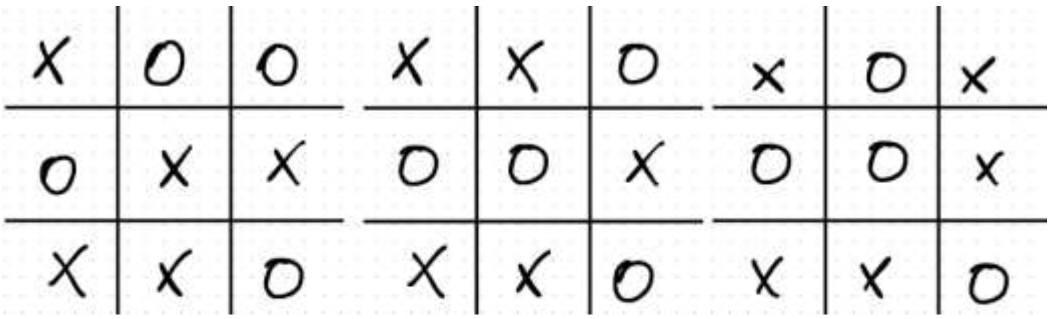
A 9ª etapa, por ser a última, pode resultar em vitória do jogador ou empate, há nessa etapa uma grande variedade de possibilidades, o que torna o cálculo dessas jogadas um processo mais complexo. Uma alternativa é usar o número de jogos de todas as etapas anteriores e para fazer esse cálculo, uma vez que todos os jogos que são uma continuação de etapas anteriores são inválidas, podemos subtrair do número total de jogos jogáveis (9!) os jogos que são continuação dos jogos finalizados nas etapas 5, 6, 7 e 8. Na 5ª etapa, os quatro quadros restantes podem ser preenchidos de 4! maneiras formando jogos inválidos. Após a 6ª, os três quadros restantes podem ser preenchidos de 3! maneiras, e assim por diante. Assim o número total de jogos que terminam na 9ª etapa pode ser obtido por:

$$9! - (1444 \cdot 4!) - (5328 \cdot 3!) - (47952 \cdot 2!) - (72576 \cdot 1!) = 127872$$

Portanto, há 127872 jogos que terminam na 9ª etapa, esse número inclui as vitórias de “X” e empates, vale destacar que não há empates nas etapas anteriores, pois nesse caso o jogo continuará até a etapa de número 9.

Vamos agora calcular, quantos desses jogos terminam com vitória do jogador “X” e quantos terminam empatado. Para isso, vamos calcular o número total de empates possíveis em um jogo da velha e subtraí-lo do número de jogos que terminam no turno 9. Segundo Zuhri (2021), “há três padrões de empate distintos no jogo da velha”, os mesmos estão apresentados na Figura 9:

Figura 9: Padrões de empates no Jogo da Velha



Fonte: Dados da Pesquisa

Segundo o Zuhri, todo os jogos da velha que terminam empatados apresenta um dos padrões acima ou uma rotação ou reflexão deles, de modo que contando as essas há no total 16 estados finais para o tabuleiro em os jogos terminam empatados. Observa-se também que há cinco “X’s” e quatro “O’s” no tabuleiro, portanto 5! maneiras de organizar os “X’s” e 4! maneiras de organizar os “O’s”. Logo, o número de jogos que terminam em empate é dado por:

$$16 \cdot 5! \cdot 4! = 46080$$

Consequentemente, o número de jogos que terminam na etapa 9, com vitória de “X” é:

$$127872 - 46080 = 81792$$

Finalmente, os resultados dessa análise detalhada podem ser sintetizados em uma tabela, apresentando as porcentagens em relação ao total de jogos disponíveis.

Tabela 1: Jogo da velha jogáveis por etapa

Jogos	**Possibilidades**	**Porcentagem**
Ganhe na 5ª etapa	1440	0,56%
Ganhe na 6ª etapa	5328	2,09%
Ganhe na 7ª etapa	47952	18,79%

Ganhe na 8ª etapa	72576	28,44%
Ganhe na 9ª etapa	81792	32,05%
Empates	46080	18,06%
Total de jogos jogáveis	**255168**	**100%**

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir da tabela 1, e dos cálculos observados, podemos chegar a uma conclusão importante. Lembrando que X foi vencedor das etapas ímpares e “O” vencedor nas etapas pares, observa-se que:

- Número de jogos vencidos por “X”: 1440 + 47952 + 81792 = 131184
- Número de jogos vencidos por “O”: 5328 + 72576 = 77904
- Número de jogos que terminaram empate: 46080

Podemos observar algo que é intuitivo aos adeptos do jogo, o jogador que inicia o jogo tem probabilidade maior de vencer, pois terá sempre mais opções de jogadas que o oponente. Organizando os dados obtidos em uma nova tabela com valores percentuais, temos:

Tabela 2: Jogo da Velha jogáveis por vencedor

Jogos	Possibilidades	Porcentagem
Ganhos por “X”	131184	51,4%
Ganhos por “O”	77904	30,5%
Empate	46080	18,1%
Total de jogos jogáveis	**255168**	**100%**

Fonte: Dados da Pesquisa

Analisando estritamente a parte combinatória do jogo, em relação ao número de jogos jogáveis, podemos perceber que o jogador que inicia jogando tem aproximadamente 51% de chances de ser vencedor, enquanto o segundo jogador tem aproximadamente 31% de chances, e a porcentagem dos jogos que terminam empate é cerca de 18%. Essa diferença se dá também ao fato de que ao iniciar, o jogador diminui as opções de formações vencedoras do oponente, além de realizar uma marcação a mais em relação ao adversário. Salientamos também, que seguindo as estratégias apresentadas no início do capítulo, ou seja, realizando uma jogada perfeita, o jogo terminará com vitória de quem iniciou ou empate, porém, caso duas pessoas iniciantes que desconhecem essas regras, possivelmente o primeiro jogador sairia vitorioso.

3 JOGO DA VELHA SUPREMO

Como vimos o jogo da velha, por sua simplicidade de acessibilidade, tornou-se mundialmente conhecido ao longo de várias gerações, e apreciado por diversas culturas. No entanto, a busca por novas experiências lúdicas levou a criação de variações que vão além das regras e da dinâmica tradicional do jogo. Neste capítulo, apresentaremos uma versão mais complexa do jogo da velha, a qual chamamos de Jogo da Velha Supremo, explicaremos as regras, e estudaremos estratégias facilitadoras do jogo, além de fazer uma analogia com um outro que apresenta o mesmo tabuleiro, porém as regras diferem. O jogo, ao contrário do tradicional, não desafia apenas as habilidades estratégicas dos jogadores, mas também traz elementos inovadores que tornam cada partida mais dinâmica e envolvente, uma vez que o jogo possibilita diferentes estratégias, que podem ser alteradas de acordo com cada jogada do adversário.

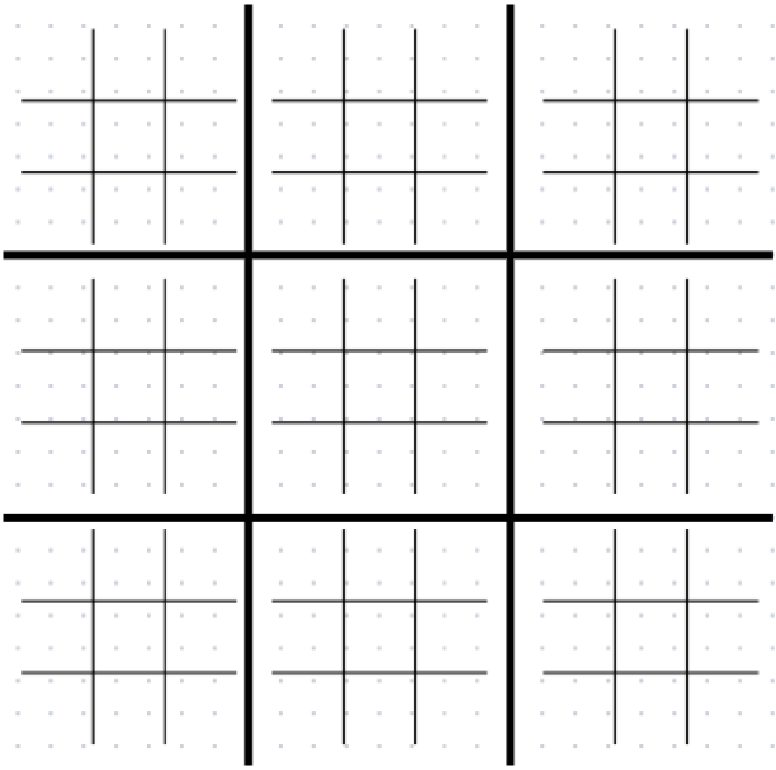
Essa versão do jogo da velha inclui novas regras que incentivam a criatividade e a busca de estratégias pelos participantes. Perceberemos no decorrer do capítulo, que nesse jogo a melhor estratégia se sobressai, e dificilmente o jogo termina empatado, mesmo que praticado por dois oponentes experientes e conhecedores das regras. Em razão da inserção de múltiplas dimensões de jogabilidade[4] e condições de vitória variadas, este jogo se torna mais desafiador e estratégico que o tradicional. Exploraremos os métodos que sustentam esse jogo, destacando como eles estimulam o pensamento crítico, proporcionando uma alternativa atraente tanto para os amantes do jogo tradicional quanto para novos jogadores em busca de desafios. Avaliaremos seu impacto como ferramenta metodológica no ensino de Análise Combinatória, além de realizar cálculos matemáticos, buscando analisar diferentes estratégias que possam ser adotadas, e avaliar qual delas se mostra mais eficaz.

3.1 O TABULEIRO

O tabuleiro do Jogo da Velha Supremo também é uma adaptação do jogo tradicional, porém em cada um dos quadros do tabuleiro tradicional é inserido outro jogo da velha, como mostra a Figura 10.

[4] Jogabilidade refere-se à qualidade da experiência do jogador ao interagir com o jogo, englobando aspectos como mecânicas, regras, fluidez e resposta do sistema às ações do jogador.

Figura 10: Tabuleiro do Jogo da Velha Supremo



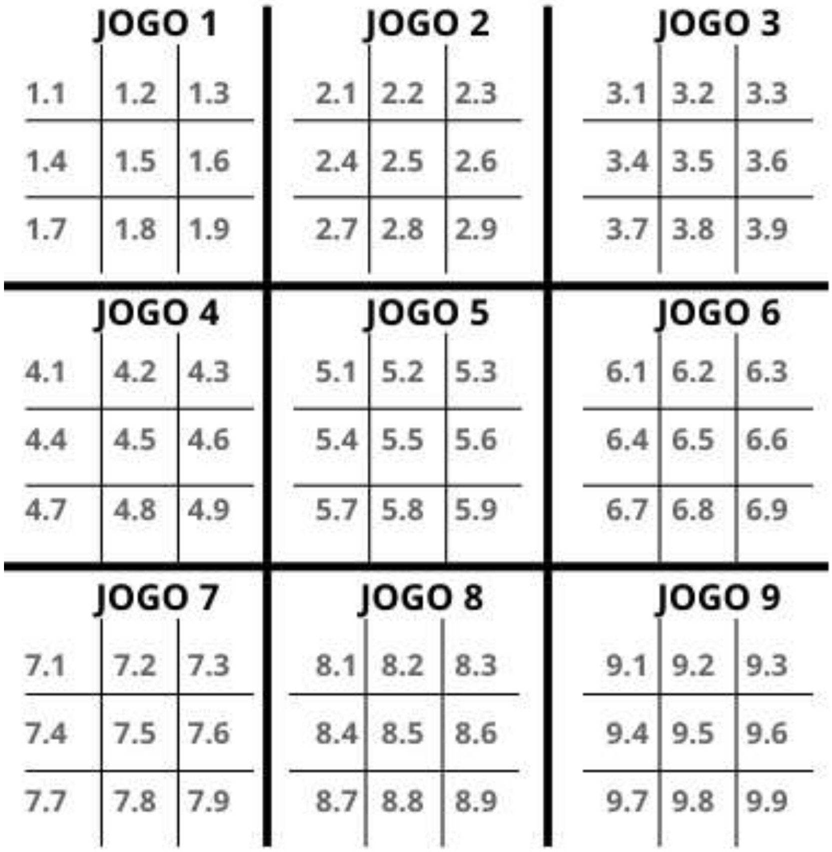
Fonte: Dados da Pesquisa

3.2 REGRAS DO JOGO

O jogo é disputado por dois jogadores: um utiliza o símbolo “X” e o outro o símbolo “O”. Os dois jogadores podem decidir quem irá começar, da forma que preferirem, geralmente, definido por “Pedra, papel ou Tesoura”. O objetivo é ganhar três jogos pequenos alinhados, como no jogo tradicional, porém, cada jogada de um jogador, condiciona a jogada do oponente. Para facilitar o entendimento do leitor, consideremos agora o tabuleiro com os índices **a.b** em cada quadro (observar na Figura 11), este pode ser usado por iniciantes, até que todos compreendam as regras. Porém, após assimilação das regras pelos jogadores, o ideal é usar o tabuleiro sem marcações, como o da Figura 10.

Considere cada índice **a.b** na imagem abaixo, em que **a** indica o número do jogo que o jogador deve marcar, e **b** é o número do jogo que o seu oponente será condicionado a jogar. Assim, se o primeiro jogador escolher o ponto 9.4 por exemplo, o segundo terá uma das opções: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 ou 4.9, de tal modo que o quadro escolhido também condicionará a próxima jogada do oponente, e assim, cada nova jogada é condicionada pela anterior, e condiciona a seguinte.

Figura 11: Tabuleiro do Jogo da Velha Supremo com índices



Fonte: Dados da Pesquisa

O jogador que vencer um jogo **a**, alinhando três “X’s” ou três “O’s”, como no tradicional, marcará esse jogo para si, fazendo um “X” ou “O” grande no jogo **a**, de tal modo que este será fechado, não podendo mais nenhum dos jogadores usá-lo. Caso um jogador seja condicionado a jogar em um jogo fechado, este poderá escolher qualquer um dos quadros dos demais jogos para marcar. Se um jogo **a**, ficar empatado, este servirá como coringa, e pode ser utilizado por qualquer um dos jogadores para fazer um jogo no tabuleiro maior. Vencerá o jogo, o jogador que conseguir vencer três jogos pequenos alinhados, ou use o coringa para alinhar com outros dois.

O jogo ainda é pouco conhecido e divulgado no Brasil, mas na Europa existem estudos relacionados, como o realizado por Guillaume Bertholon, Rémi Géraud-Stewart, Axel Kugelmann, Théo Lenoir e David Naccache. Esses autores apresentam uma variação do jogo da velha tradicional, denominada Ultimate Tic-Tac-Toe, e demonstram que há estratégias vencedoras que envolvem entre 29 e 43 movimentos, evidenciando a complexidade e a profundidade estratégica dessa versão ampliada do jogo. O jogo é bastante parecido com o Jogo da velha Supremo, inclusive praticado no mesmo tabuleiro, e assim como no Jogo da Velha

Supremo, cada jogada também é condicionada por uma jogada anterior, porém, parte das regras se diferem. A principal diferença inclusive, é uma regra fundamental para a estratégia vencedora apresentada pelos autores, que é não fechar um jogo pequeno quando um jogador alinha três marcas iguais, ganhando o jogo, quando isso ocorre os dois jogadores ainda podem continuar usando o jogo ganho, e por mais que o oponente consiga alinhar três marcas, não fará diferença no jogo, pois este será vencido pelo primeiro que conseguir alinhar três marcas. No jogo mencionado, os jogadores ainda podem utilizar o jogo ganho sem alteração de seu estado, ainda condicionando as jogadas do seu oponente. Assim, como no Jogo da Velha Supremo, no Ultimate, vence quem conseguir alinhar três jogos menores, seja na vertical, horizontal ou diagonais.

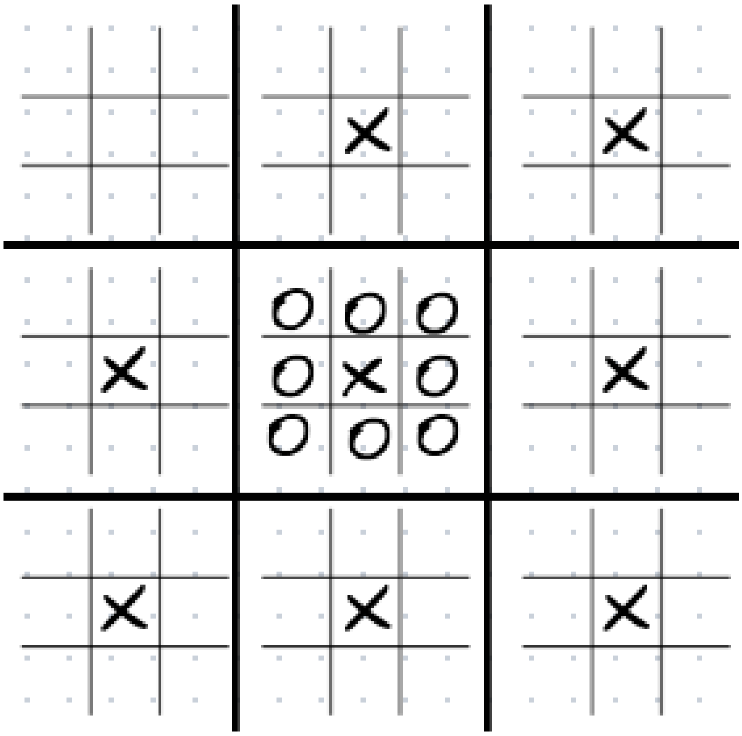
Outra diferença notória, é o fato de não haver jogo coringa caso um jogo menor termine em empate, com isso deduzimos que a probabilidade de uma partida terminar empatada, será maior. Os autores também mencionam que há a possibilidade de que um jogo menor seja totalmente preenchido e termine sem um vencedor, nesse caso os demais jogos podem ser preenchidos normalmente, porém os autores não mencionam o que ocorre quando um jogador é condicionado a jogar num jogo em que não há mais quadros disponíveis.

Em ambos os jogos, há 81 quadros disponíveis, em que o primeiro jogador deve escolher um para iniciar, a partir daí, todas as outras jogadas são condicionadas pela jogada imediatamente anterior, podendo ocorrer, por exemplo, que uma partida termine com um jogo ainda em branco, ou que um jogador não seja condicionado a jogar em um determinado jogo, e o oponente vença-o.

3.3 ESTRATÉGIA VENCEDORA NO TIC-TAC-TOE ULTIMATE

No decorrer desse trabalho esperamos encontrar pelo menos uma estratégia vencedora para o Jogo da Velha Supremo, e apresentaremos os passos adotados pelos autores para chegar em uma estratégia vencedora. Como mencionado anteriormente, no jogo apresentado pelos autores, é possível direcionar o oponente para uma jogo fechado, dessa forma a estratégia dos autores que jogam com “X”, é obrigar o adversário sempre a jogar no meio, dessa forma ele marca sempre marca em um dos demais jogos, uma vez que “X” inicia jogando e escolhe o quadro **5.5**. A imagem seguinte mostra como fica a disposição das marcas no tabuleiro após 16 jogadas, em que a próxima jogada é novamente do jogador “X”.

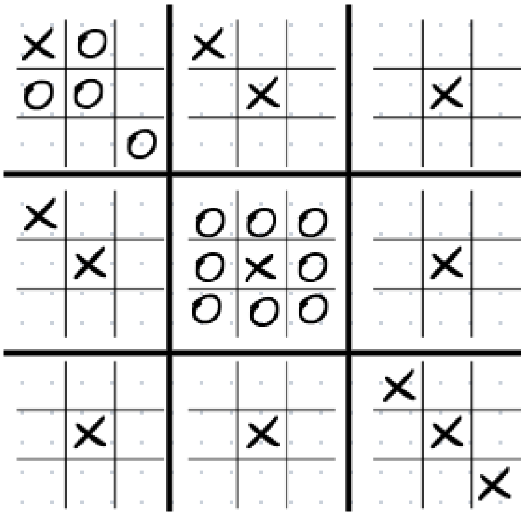
Figura 12: Tabuleiro do Jogo da Velha Ultimate após 16 etapas



Fonte: *Dados da Pesquisa*

Observe que o jogo de número 5, tem apenas uma marca “X” e todas as demais com marcas “O”, tal fato não seria possível no Jogo da Velha Supremo, uma vez que após um jogo pequeno ser vencido, os jogadores não podem mais usá-lo. Na sequência o jogador “X” escolhe o jogo que ainda está com todos os quadros em brancos (na Figura 12, o jogo 1), e mantém o adversário sempre nele. Para tanto, quando “O” joga em um ponto **a.b**, “X” joga no ponto **b.a**, em que a é o jogo escolhido por “X” para manter o adversário. Assim, após a 25ª etapa, há no máximo um jogo com três “X”, e “O” jogou em apenas dois jogos. Os autores chamam essa etapa de meio-jogo. Na Figura 13 apresentamos uma das configurações possíveis para o jogo nessa etapa.

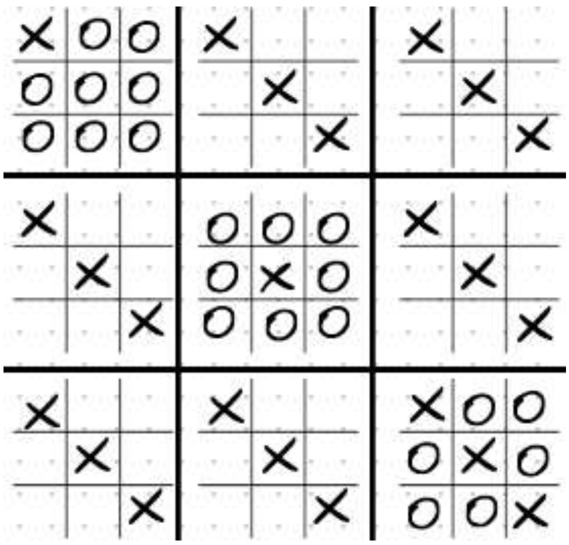
Figura 13: Tabuleiro do Jogo da Velha Ultimate após 25 etapas na estratégia vencedora



Fonte: *Dados da Pesquisa*

Pelas configurações observadas no tabuleiro, a última jogada de “X” foi o quadro 9.9, assim “O” tem a opção de enviá-lo para um jogo com apenas um “X” (3, 6, 7 e 8), ou para um com dois “X” (4 e 2), no segundo caso “X” venceria o jogo pequeno. Na etapa seguinte da estratégia, “X” condicionará seu oponente para o jogo 1, ou caso não seja possível, condicionará para o jogo 8. Dessa forma, “X” vencerá os demais jogos pequenos, exceto o 1, consequentemente, vencerá a partida. Na figura 14 apresentamos uma das possibilidades de configurações do tabuleiro após o etapa 45.

Figura 14: Tabuleiro do Jogo da Velha Ultimate após 45 etapas na estratégia vencedora



Fonte: *Dados da Pesquisa*

A análise é análoga para os demais casos em que o único jogo sem marcação não seja o 1, após a etapa 16. Além disso, pelas regras do apresentadas, “X” teria vencido na etapa 43, porém o jogo pode continuar até que todo o tabuleiro seja preenchido, ou seja, até a etapa 81.

3.4 ESTRATÉGIA VENCEDORA NO JOGO DA VELHA SUPREMO

Para o Jogo da Velha Supremo, durante sua aplicação surgiram algumas hipóteses iniciais para uma estratégia vencedora, porém, a comprovação das mesmas pode levar muito tempo. Uma das hipóteses observadas foi a de que o jogador que vencer o jogo de número 5, tem maior probabilidade de vencer, porém, observando em termos quantitativos, dos 101 jogos aplicados anteriormente e durante a pesquisa 56 tiveram como vencedor o jogo que venceu o central, em 41 venceu o jogador que não ganhou o jogo central, e outros 3 terminaram empatados e 1 foi interrompido antes que houvesse um ganhador. Esses dados mostram que aproximadamente 58% dos jogos que tiveram vencedores, foram vencidos por quem ganhou o jogo de número 5, enquanto o percentual dos que vencedores que não usaram o jogo central foi de aproximadamente 42% dos jogos finalizados.

Uma outra estratégia observada durante a aplicação, foi o fato de que os jogadores se sobressaiam, sempre que possível, mantendo os oponentes no jogo que jogavam, jogando por exemplo, 1.1, 2.2, 3.3, e assim por diante. Porém, tal estratégia também não mostrou-se tão eficiente, uma vez que dos jogos realizados dessa maneira, poucos conseguiram vencer. Além disso, foram observadas estratégias como jogar primeiro, ganhar dois jogos do canto seguindo a estratégia do jogo tradicional, entre outras, porém as regras de condicionalidade dificultam seguir fielmente uma estratégia.

Diante das dificuldades em analisar a eficácia das estratégias adotadas pelos jogadores, partimos para uma análise mais voltada à matemática, usando a análise combinatória para quantizar as possibilidades e investigar se há um algoritmo capaz de fazer um jogador garantir a vitória em uma partida. Para isso, é preciso observar que há nesse jogo uma série de condicionais, para efeito de cálculos, consideremos que “X” inicia jogando.

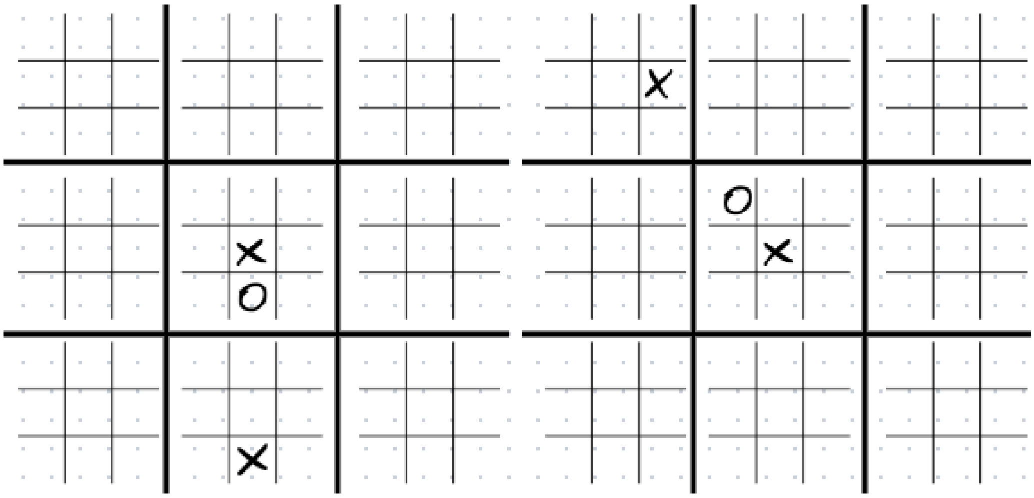
Matematicamente, podemos analisar que se um jogador ganhar os jogos dos cantos (1,3,7 e 9), ele vencerá se ganhar qualquer um dos outros jogos. Já se a estratégia usada for ganhar os jogos pares (2,4,6 e 8), este só poderia vencer a partida caso ganhasse também o jogo cinco. Assim, verificaremos a estratégia de manter o oponente sempre nos jogos pares, e buscar ganhar os jogos ímpares, além de proteger o jogo central de número 5, uma vez que só é possível vencer uma partida alinhando dois jogos pares, se o jogo central também for vencido.

Como percebemos, no jogo da velha tradicional, das oito formações vencedoras possíveis metade delas usa o jogo central, partiremos daí para buscarmos um método com maior probabilidade de vitória no Jogo da Velha Supremo. Considerando que o jogador “X” inicie a partida, este jogará no quadro de índice 5.5, assim temos duas possibilidades para sua segunda jogada:

- Se for num jogo par, mantem-se o oponente no mesmo jogo.
- Se for num jogo ímpar, direcionar o adversário para qualquer jogo par.

Daí em diante, sempre que possível direcione o oponente para um jogo par, exceto quando for possível jogar no jogo 5, o primeiro objetivo é vencê-lo. Ao ceder os jogos pares pro oponente, e evitando que ele vence um jogo ímpar, garantimos que o adversário não poderá ganhar, pois mesmo que ele vença todos os jogos pares, necessita obrigatoriamente de pelo menos um jogo ímpar para ser vitorioso na partida. Observe na Figura 15, exemplos de configurações possíveis dos casos citados.

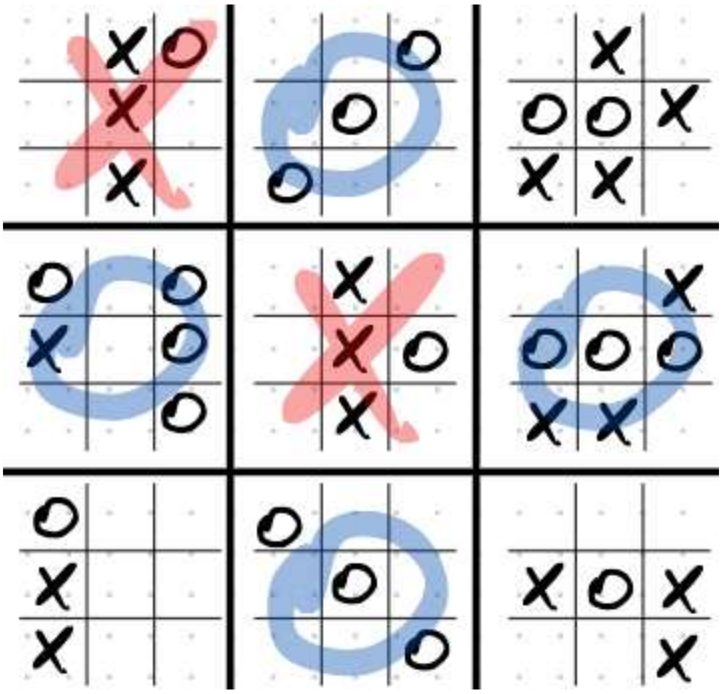
Figura 15: Exemplos de configurações até a 3ª etapa



Fonte: *Dados da Pesquisa*

Da mesma forma, deve-se defender ao máximo que o adversário vença o jogo de número 5, pois caso isso ocorra, seguindo a estratégia inicial, a partida finalizará. Por outro lado, se “X” vencer o jogo central, as chances de vitória de “O” diminuem em 50%, uma vez que para vencer agora, “O” deverá vencer no mínimo dois jogos ímpares, alinhados na vertical ou horizontal. Percebe-se também que se “X” ganhar outro jogo ímpar (além do 5), as chances de vitória de “O” passa a ser de 25%, uma vez que ele só poderá alcançar duas das oito formações vencedoras possíveis.

Figura 16: Exemplo de aplicação da estratégia



Fonte: *Dados da Pesquisa*

Observamos que na configuração apresentada na Figura 16, “O” só poderá vencer o jogo caso ganhe dois dos três jogos ainda abertos, mesmo que tenha vencido uma quantidade maior de jogos que o oponente. E para que “X” seja o vencedor, basta que vença o jogo de número 9, ou bloquei o adversário impedindo que vença dois jogos ímpares. Nesse casso, o bloqueio pode ser mais simples do que aparenta ser, uma vez que a quantidade de jogos fechados facilita que “O” o faça escolher um dos movimentos pretendidos. Pode-se observar, por exemplo, que se “O” tiver que jogar no jogo 7, as únicas opções para que “X” não escolha sua próxima jogada são os quadros 7.3 e 7.9, caso ele escolha o primeiro (7.3), “X” pode manter “O” no jogo 3, finalizando a partida na jogada seguinte, pois será mandando pro jogo 9, ou poderá escolher sua próxima jogada. Caso “O” escolha a segunda opção (7.9), “X” marcará 9.3, vencendo a partida.

Dessa forma, entende-se que o método apresentado seja uma abordagem eficaz para aumentar as chances de vitória no Jogo da Velha Supremo. Contudo, diferentemente do jogo tradicional, não é possível garantir que a aplicação dessa estratégia levará à vitória, devido à imprevisibilidade das jogadas do adversário, que pode adotar táticas semelhantes ou forçar desvios estratégicos. Para potencializar o desempenho, é essencial combinar essa abordagem com flexibilidade estratégica, prática constante e uma leitura precisa do jogo em andamento. Além disso, habilidades como observação detalhada, antecipação de ataques do adversário e tomada rápida de decisões são fundamentais para adaptar-se às circunstâncias da partida e superar os desafios impostos pelo oponente.

3.5 JOGADAS POSSÍVEIS

Percebemos que, em um cenário hipotético e absurdo, em que todos os quadros sejam preenchidos, poderíamos pensar num número de maneiras de se preencher esses 81 quadros, como 81!, porém, como cada jogada condiciona o oponente a um quadro específico do tabuleiro, de modo que o número de jogadas possíveis para um jogador depende cada vez mais das condições deixada por todas as jogadas anteriores. Tal cenário é absurdo porque quando um jogo empata, é usado como coringa, assim o jogador que fizer a última jogada, alinhando o terceiro coringa com outros dois jogos que também terminaram empatados será o vencedor, desse modo é impossível que todos os quadros do tabuleiro sejam preenchidos.

Como o jogador X iniciará, ele terá 81 opções para marcar o primeiro quadro, já a partir daí, há uma condição a se observar: Se ele iniciar no quadro com índice **a.b**, com a = b e se ele marcar qualquer outro quadro com índice **a.b**, com a ≠ b. Assim faremos, separadamente, a análise de cada situação e suas consequências.

No primeiro caso, se o jogador "X" iniciar no quadro com índice **a.b**, com a = b, assim "X" terá nove opções de iniciar o jogo, e o jogador "O" poderá realizar sua jogada de oito formas distintas, uma vez que terá que jogar no mesmo jogo. Assim "X" terá nove opções distintas para realizar sua segunda jogada, independente da jogada de "O", porém, esse número varia dependendo da estratégia escolhida. A quantidade de possíveis jogadas na 4ª etapa, ou seja, a segunda jogada de "O", depende da jogada anterior de "X", de modo que:

I. Se "X" jogar em outro quadro com a = b, ele poderá fazer isto apenas de uma maneira, e "O" terá oito maneiras distintas para marcar um dos quadros.
II. Se "X" jogar num quadro com a ≠ b, com b diferente do índice da jogada inicial, poderá jogar de sete maneiras distintas e "O" terá nove maneiras distintas para marcar um dos quadros.
III. Se ele jogar num quadro com a ≠ b, porém, voltando "O" para o jogo inicial, também poderá fazer isto apenas de uma maneira e "O" terá sete maneiras distintas para marcar um dos quadros.

Assim, calcularemos o número possível de jogadas até a 4ª etapa, considerando que a primeira foi realizada num quadro a = b:

I. $9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 8 = 576$

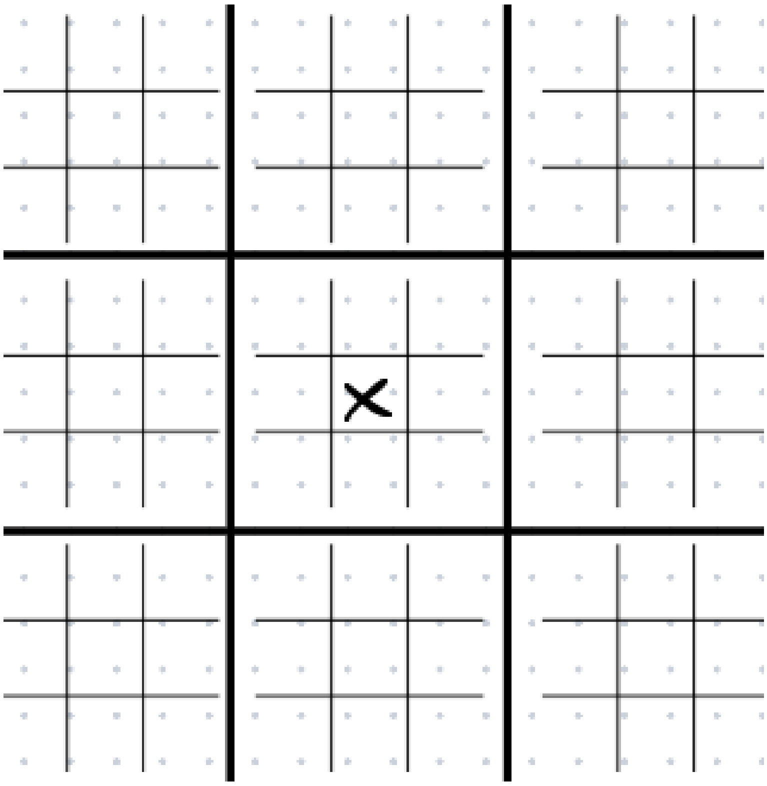
II. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9 = 4.536$

III. $9 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 7 = 504$

Logo, somando as possibilidades de I, II e III, temos: $576 + 4.536 + 504 = 5.616$.

Na Figura 17, consideramos a situação hipotética, em que "X" iniciou no quadro **5.5**, para exemplificar cada item acima. Inicialmente temos:

Figura 17: Jogo iniciado no campo com índice 5.5



Fonte: *Dados da Pesquisa*

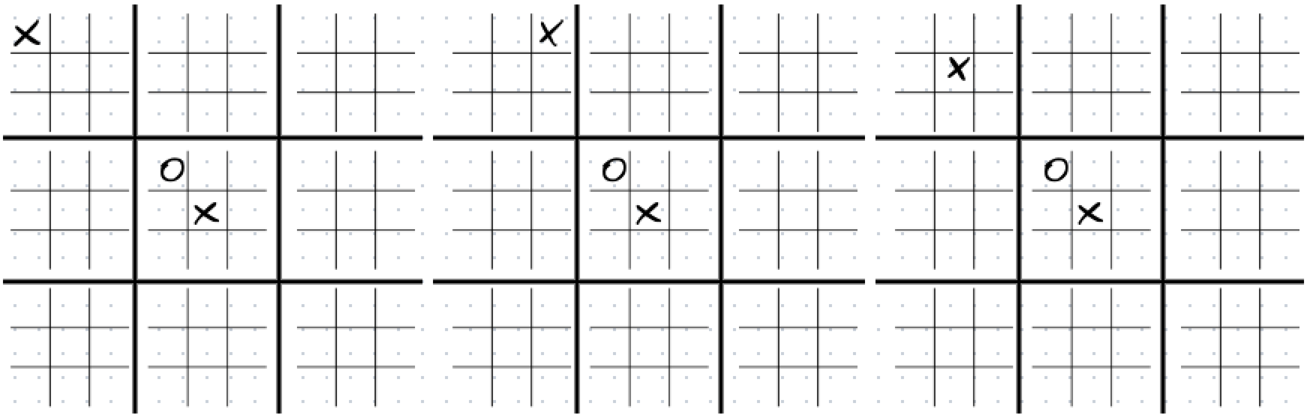
Observe que "O" só poderá jogar no jogo número 5, assim qualquer quadro que ele marcar leva o jogador "X" a um jogo em branco, para estudo de caso, vamos considerar que "O" marcou o quadro 5.1. Para a segunda jogada de "X", consideremos os casos (exemplificados na Figura 18).

I. "X" marcará 1.1, assim há 8 opções de jogadas para "O".

II. "X" marcará 1.3, assim há 9 opções de jogadas para "O".

III. "X" marcará 1.5, restando para "O", apenas 7 opções de jogadas.

Figura 18: Possíveis jogadas de "X" na 3ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

Já no segundo caso, em que “X” inicia marcando um quadro com índice **a.b**, com a ≠ b, assim o número de jogadas possíveis para “X” iniciar é 72, consequentemente, “O” terá nove maneiras diferentes de realizar sua primeira jogada. Nesse caso o número de maneiras para “X” realizar sua segunda jogada, depende do quadro escolhido por “O” em sua primeira jogada, de modo que:

IV. Se “O” jogar em um quadro com a = b, ele poderá fazer isso de uma única forma e “X” terá oito maneiras de realizar sua próxima jogada.

V. Se “O” jogar num quadro com a ≠ b, voltando “X” pro jogo inicial, terá uma única maneira de jogar, e “X” poderá realizar sua jogada de 8 maneiras.

VI. Se “O” jogar num quadro com a ≠ b, e não voltar “X” pro jogo inicial, poderá jogar de sete formas diferentes, e “X” poderá realizar sua próxima jogada de nove maneiras distintas.

Vale ressaltar que o número de maneiras que “X” terá para realizar a jogada nessa etapa, depende da estratégia adotada por ele, como veremos adiante. Para a segunda jogada de “O”, os cálculos tornam-se um pouco mais complexos, e o número de condições a se observar aumentam.

VII. Se IV ocorrer e “X” voltar “O” pro jogo inicial. “X” poderá fazer isso de uma única maneira e “O” poderá jogar de oito maneiras distintas. Assim o número de jogadas possíveis seria: $72 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 576$.

VIII. Se IV ocorrer e “X” não voltar “O” pro jogo inicial. “X” poderá fazer isso de sete maneiras, e “O” poderá jogar de nove maneiras distintas. Assim o número de jogadas possíveis seria: $72 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 9 = 4.536$.

IX. Se V ocorrer e “X” jogar em um quadro com a = b. “X” poderia fazer isso de uma única forma, e “O” teria sete opções de jogadas. Assim o número de jogadas possíveis seria: $72 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = 504$.

X. Se V ocorrer, e “X” direcionar “O” para um jogo limpo. “X” teria sete opções, e “O” teria nove, portanto: $72 \cdot 1 \ \cdot 7 \ \cdot 9 = 4.536.$

Vale ressaltar que ocorrendo V, não será possível que “X” direcione “O” para o jogo da segunda etapa, uma vez que esse quadro foi usado na primeira jogada de “X”.

XI. Se VI ocorrer e “X” jogar em um quadro com a ≠ b, e “X” voltar “O” pro jogo inicial. “X” teria uma opção de jogada e “O”, oito, assim temos: $72 \cdot 7 \ \cdot 1 \ \cdot 8 = 4.032.$

XII. Se VI ocorrer e “X” jogar em um quadro com a ≠ b, e “X” mandar “O” pra um jogo limpo (sem marcações). “X” teria seis opções de jogadas, “O” teria nove, portanto temos: $72 \cdot 7 \ \cdot 6 \ \cdot 9 = 27.216.$

XIII. Se VI ocorrer e “X” jogar em um quadro com a ≠ b, e “X” voltar “O” pro segundo jogo. “X” teria uma única maneira de jogar, “O” teria oito, portanto: $72 \cdot 7 \ \cdot 1 \ \cdot 8 = 4.032.$

XIV. Se VI ocorrer, e “X” jogar em **a.b** com a = b. Nesse caso, “X” teria uma única opção, “O” teria oito, logo: $72 \cdot 7 \ \cdot 1 \ \cdot 8 = 4.032.$

Analisando todas as possibilidades, para calcularmos a quantidades de jogadas possíveis até a 4ª etapa, tal que “X” iniciou num quadro com a ≠ b, somamos os resultados obtidos nos itens VII ao XIV: 576 + 4.536 + 504 + 4.536 + 4.032 + 27.216 + 4.032 + 4.032 = 49.464 maneiras distintas.

Assim, analisando os dois casos, um em que “X” inicia em um quadro a = b, e outro em que ele inicia com a ≠ b, temos um total de 5.616 + 49.464 = 55.080 maneiras distintas de se jogar até a quarta etapa. O Anexo 1, mostra um diagrama com as possíveis jogadas até a etapa mencionada.

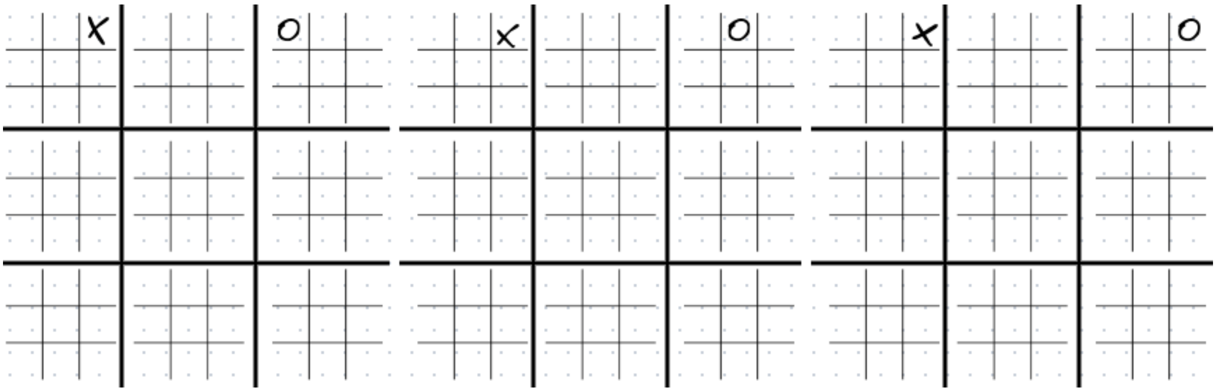
Para exemplificarmos uma dessas possibilidades, consideremos agora que “X” iniciou o jogando no quadro 1.3, assim, analisando os casos acima, temos:

“O” marcará o quadro 3.1, assim “X” terá oito opções para realizar sua segunda jogada.

“O” marcará o ponto 3.2, dessa forma “X” terá 9 opções para realizar sua segunda jogada.

“O” marcará o quadro 3.3, assim “X” terá oito opções de jogadas, uma vez que uma dos quadros no jogo 3 já foi preenchido. Na Figura 19 apresentamos as configurações do tabuleiro após os casos citados.

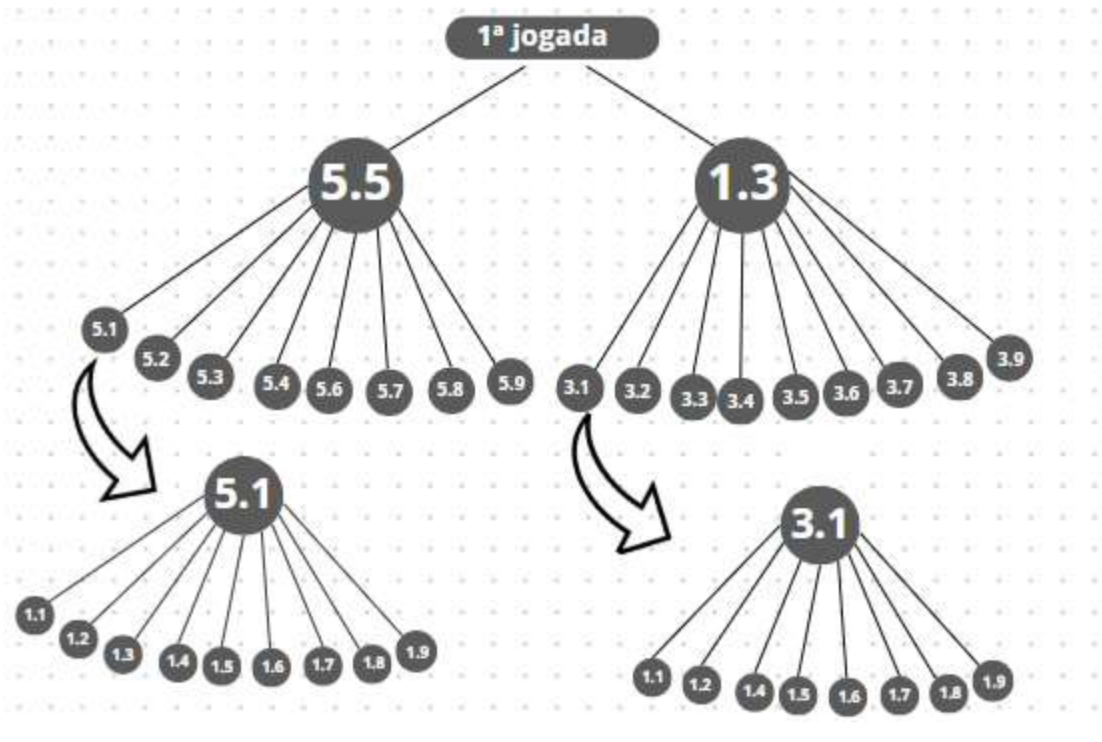
Figura 19: Possíveis jogadas de X na 2ª etapa



Fonte: Dados da Pesquisa

As regras específicas tornam esse jogo muito diferente do tradicional, o que dificulta os cálculos da quantidade de jogadas possíveis. Como podemos observar até quarta etapa, temos que analisar uma série de condições, essas tornam os cálculos bem mais complexos. Na Figura 20 temos um diagrama de árvore, representando os exemplos anteriores e as possibilidades de jogadas para a segunda etapa, e escolhendo um caso aleatoriamente, as opções para a terceira etapa (segunda jogada de “X”).

Figura 20: Diagrama de árvore: Início de jogo com a=b e a≠b



Fonte: *Dados da Pesquisa*

Observe que caso “O” jogue no quadro 5.1 ou em qualquer outro quadro 5.b “X” terá nove possibilidades. No segundo caso (à direita), caso “O” jogue no quadro 3.1, “X” terá oito possibilidades, caso ele escolha qualquer outro, o número de possibilidades será nove. O Apêndice 2, apresenta um diagrama com as possibilidades de jogadas até a quarta etapa quando um jogo é iniciado em um quadro com $a \neq b$.

É importante destacar ainda, que nessa versão pode acontecer de um jogo ser vencido por um dos jogadores, sem mesmo que seu oponente jogue nele, assim, não são necessárias um número mínimo de cinco etapas em cada jogo para que um jogo pequeno seja vencido. A partir disso, podemos mensurar um número mínimo de etapas para que haja um vencedor. Como cada jogo pequeno necessita de no mínimo três símbolos iguais para ser vencido, e o jogo é praticado em turnos alternados, desconsiderando qualquer estratégia, temos que o número mínimo de etapas para que haja um vencedor é de 17 jogadas. Porém, vale ressaltar que dificilmente um jogo terminará com esse número de jogadas, pode meio de análise quantitativa, foi observado que em média os jogos duram até a etapa de número 45, esse número pode variar de acordo com as estratégias adotadas pelos jogadores.

A seguir temos a análise que alguns dados sobre o número de jogadas por partida no Jogo da Velha Supremo. Vale ressaltar, que esses dados foram coletados a partir de jogos realizados em sala de aula, servindo apenas para uma análise quantitativa complementar e não como parte integrante da pesquisa principal. Esses dados mostram uma variação significativa entre 23 e 59 jogadas por partida, com uma amplitude de 36 jogadas. A média observada é de aproximadamente 45 jogadas por partida, indicando que, em geral, as partidas tendem a apresentar um número intermediário de jogadas. A mediana, que é 44, reforça essa tendência central, enquanto a presença das modas 33 e 45 indica que certos números de jogadas podem ocorrer com maior frequência, o que sugere a existência padrões comuns de duração das partidas. A distribuição das partidas, dividida em seis classes de frequência, mostra que a maioria das partidas concentra-se entre 29 e 52 jogadas, com destaque para as classes 35-40 e 41-46, que juntas somam quase metade do total de partidas analisadas. Isso sugere que o jogo apresenta uma característica de que as partidas frequentemente se estendem para além da quantidade mínima de movimentos necessários para vitória, tal fato, provavelmente se deve as estratégias adotadas pelos participantes.

Portanto, podemos concluir que o número de jogadas por partida, apresenta uma distribuição moderadamente dispersa, com desvio padrão de aproximadamente 11 jogadas, e uma concentração significativa em torno de 40 a 46 jogadas, refletindo a complexidade estratégica do jogo.

4 PROPOSTA DIDÁTICA

Compreende-se proposta didática como um plano estruturado para o ensino, que tem como objetivo facilitar o processo de ensino-aprendizagem de maneira eficaz e interativa. Esse tipo de proposta promove a participação ativa dos estudantes, por meio de contextualizações e uso de metodologias ativas, podendo ser usado em diversas áreas do conhecimento, além de facilitar a interdisciplinaridade promovendo uma visão mais ampla e incorporada dos temas abordados.

Neste capítulo trabalharemos uma proposta didática cujo objetivo é ensinar análise combinatória usando jogos como ferramenta metodológica. Assim, dividiremos a proposta em sequências didáticas e orientações e sugestões de como aplicá-las em sala de aula, desenvolvendo atividades específicas e sequenciais para alcançar tal objetivo de maneira progressiva. Segundo Santos (2024, p.51),

> Uma das principais vantagens de uma sequência didática bem planejada é a possibilidade de progressão gradual do conhecimento. Ao organizar as atividades de forma crescente em termos de complexidade, o professor permite que os alunos desenvolvam suas competências de forma sistemática e contínua.

O autor ainda afirma que a sequência didática organiza o conteúdo a ser ensinado e permite ao professor antecipar e superar possíveis dificuldades que possam ser encontradas pelos estudantes. Ao organizar o conteúdo de maneira lógica e coerente, a sequência didática ajuda a manter os estudantes concentrados e motivados ao longo do processo de aprendizado, o que contribui para um ambiente mais produtivo e participativo, assim tanto os professores quantos os alunos podem se beneficiar do processo educacional.

4.1 CONSTRUÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A elaboração da proposta didática foi motivada pela busca em tornar o ensino de análise combinatória mais atrativo, buscando quebrar o paradigma de que a disciplina é difícil e que não pode ser compreendida por maioria dos estudantes, o que acaba gerando um déficit de aprendizado que pode ser observado facilmente nos estudantes da Educação Básica. Por conseguinte, o objetivo principal da proposta é desenvolver o raciocínio combinatório e estratégico dos estudantes, utilizando jogos como ferramentas para explorar e aplicar conceitos matemáticos em situações desafiadoras e envolventes.

Dessa forma, a proposta é constituída por duas etapas que fazem a aplicação de jogos em sala de aula, ambas destinadas aos alunos do ensino médio, e podendo ser desenvolvida em qualquer uma das séries dessa etapa, a depender dos conteúdos programáticos da rede de ensino, de modo que seja aplicado como introdução ao estudo de análise combinatória, objetivando tornar o aprendizado mais divertido e interativo, aumentando assim o engajamento dos estudantes. Além das etapas da proposta, há também uma sugestão de atividade em formato de torneio usando o Jogo da Velha Supremo, que poderá ser disputado entre equipes de séries distintas, este visa a disseminação e popularização do jogo, promovendo uma competição saudável entre os estudantes.

Para explorar a natureza combinatória do jogo, a primeira etapa da proposta trata da aplicação do Jogo da Velha (Tic-Tac-Toe), onde serão elaboradas perguntas direcionadas ao jogo, que necessitam de cálculos combinatórios para que sejam respondidos. Tais perguntas serão feitas antes de apresentar os conceitos de análise combinatória, com objetivo de verificar os conhecimentos prévios dos estudantes com relação ao conteúdo.

A segunda etapa usará o Jogo da Velha Supremo como ferramenta metodológica. O jogo é uma variação mais complexa do tradicional Jogo da Velha, e pode ser utilizada como ferramenta pedagógica para desenvolver habilidades fundamentais para a compreensão de conceitos matemáticos, tais como, pensar logicamente, estratégia e tomada de decisões em discentes de diferentes faixas etárias.

Durante a aplicação do jogo, ele pode ser apresentado e utilizado tanto na versão impressa (ou desenhada pelos próprios estudantes), quanto na versão digital (requer conexão com a internet), esta permite uma melhor compreensão das regras de condicionalidade, uma vez que o jogador não consegue jogar em um quadro diferente do qual foi designado, como pode-se observar na figura 21.

Figura 21: Jogo da Velha Supremo, versão digital

Fonte: Dados da Pesquisa

É importante ressaltar que a versão digital do Jogo da Velha Supremo utilizada nesta proposta didática foi criada pelo autor deste trabalho com o uso de recursos de inteligência artificial, resultando em uma ferramenta interativa que automatiza o controle das regras condicionais e destaca, de forma visual, tanto o jogador da vez quanto o quadro no qual a próxima jogada deve ocorrer. Essa funcionalidade facilita a compreensão das regras pelos estudantes, evita movimentos proibidos durante as partidas e reduz dúvidas, tornando o processo de aprendizagem mais claro e engajador. Dessa forma, a ferramenta digital não só potencializa o envolvimento dos alunos nas atividades, mas também representa um diferencial metodológico, modernizando o ensino e alinhando-o às demandas tecnológicas da educação contemporânea.

Adicionalmente, há a sugestão de um torneio que tem como objetivo popularizar o jogo e demonstrar seu potencial educativo, indo além do simples passatempo. O torneio, aberto à participação de alunos de diferentes séries do Ensino Médio, visa criar um ambiente de competição saudável e estimulante, em que os estudantes possam aplicar conceitos matemáticos, desenvolver o raciocínio estratégico e aprimorar suas habilidades de tomada de decisão. Ao promover a interação entre alunos de diferentes níveis de conhecimento, o torneio se configura como uma ferramenta para democratizar o acesso ao jogo, tornando-o acessível à todos.

4.2 ORIENTAÇÕES PARA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

A proposta didática, como mencionado, foi desenvolvida para ser aplicada aos estudantes do Ensino Médio, durante a introdução dos conceitos de análise combinatória, de modo que a série específica dessa etapa pode variar de acordo com a grade curricular da região em que será aplicada. Assim, o professor que desejar fazer a aplicação tem a liberdade de fazer pequenas adaptações a fatores locais, como a grade curricular e aspectos estruturais da unidade escolar, como projetor de imagens e acesso à internet.

Segundo a BNCC, a Matemática tem o dever de explorar ao máximo o potencial dos alunos no Ensino Fundamental, visando implementar iniciativas que aprofundem o letramento matemático que foi iniciado anteriormente (Brasil, 2018). Assim, novos conhecimentos específicos devem incentivar processos de reflexão e abstração mais complexos, capacitando os estudantes a formular e resolver problemas em diferentes contextos com maior autonomia e ferramentas matemáticas.

Dessa forma, a proposta busca desenvolver as seguintes habilidades (EM13MAT105), (EM13MAT310) e (EM13MAT315) presentes na BNCC. Segundo a BNCC,

> [...](EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). [...](EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. [...] (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (Brasil, 2018. p. 533-537).

Vale ressaltar que o jogo também se relaciona com habilidades de outras áreas do conhecimento, como Educação Física, e em diferentes níveis, como educação infantil e ensino fundamental. As habilidades mencionadas estão relacionadas aos tópicos da análise combinatória, como princípio fundamental da contagem, fatorial, permutações, arranjos e combinações, da geometria, como as transformações isométricas, além de que da parte visual remete a tópicos como matrizes e coordenadas cartesianas.

Fundamentado nas orientações expostas acima, apresentamos na secção 4.3 cada etapa da proposta didática.

4.3 ETAPAS DA PROPOSTA DIDÁTICA

As etapas da proposta didática a seguir fazem o uso de jogos como ferramentas para o ensino de análise combinatória, sendo que a primeira se utiliza do Jogo da Velha tradicional (Tic-Tac-Toe), e a segunda faz uma abordagem do Jogo da Velha Supremo.

4.3.1 PRIMEIRA ETAPA

ITEM	**DESCRIÇÃO**
TÍTULO	Jogo da Velha (Tic-Tac-Toe)
CONTEÚDOS	Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutação, Arranjo e Combinação.
METODOLOGIA	Aula dialogada, em que os conceitos serão construídos mediante indagação do professor.
TEMPO ESTIMADO	Quatro aulas de 45 minutos cada.
PÚBLICO ALVO	Estudantes do ensino médio.

RECURSOS	Projetor e computador ou tela interativa, quadro branco ou verde, caneta de quadro branco ou giz, folhas A4, lista de exercício impressa e canetas.
HABILIDADES BNCC	(EM13MAT105), (EM13MAT310) e (EM13MAT315).

JUSTIFICATIVA

Diante da frequente rejeição dos estudantes em relação à matemática e da crescente busca por métodos que combatam tal rejeição, a inserção do jogo da velha em uma aula de análise combinatória se justifica como uma estratégia lúdica e acessível aos estudantes, promovendo assim um maior interesse pela disciplina, ajudando a desmistificar as dificuldades da matemática e reduzindo a ansiedade associada a disciplina. Tais práticas estimulam o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas, além de promover um ambiente colaborativo e motivador, tornando o aprendizado mais atraente e envolvente. Além de desenvolver no aluno a capacidade de tomar decisões estratégicas, conforme as competências e habilidades propostas pela BNCC, utilizando uma metodologia construtivista na qual o aluno é o protagonista na construção do próprio conhecimento.

OBJETIVOS

- Introduzir os conceitos básicos de análise combinatória (permutações e combinações) de forma intuitiva, utilizando o jogo da velha como ferramenta.
- Identificar e analisar as diferentes possibilidades de jogadas no jogo da velha, aplicando o princípio fundamental da contagem.
- Resolver problemas de contagem relacionados ao jogo da velha, utilizando diferentes estratégias e representações.
- Estimular a colaboração e o trabalho em equipe, promovendo a troca de ideias e a discussão de estratégias.
- Conectar a atividade lúdica com os conteúdos formais da análise combinatória, facilitando a compreensão e aplicação dos conceitos em situações mais complexas.
- Desenvolver habilidades de análise crítica e tomada de decisões estratégicas com base nas possibilidades identificadas.
- Aumentar o interesse dos alunos pela matemática, demonstrando sua aplicação prática e relevante em diferentes contextos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Afim de otimizar a aprendizagem e promover uma experiência enriquecedora, a primeira etapa da proposta didática será dividida em duas fases, cada uma com um objetivo específico, buscando construir gradualmente o conhecimento e as habilidades necessárias para a compreensão dos conceitos de análise combinatória, resultando na aplicação prática desses conceitos através do jogo da velha.

Fase 1: Introdução ao tema

Com a finalidade de promover uma conversa inicial sobre o conteúdo, o professor iniciará a aula dizendo que irão falar de jogos. Inicialmente será perguntado aos estudantes quais jogos eles mais gostam e quais seriam possíveis jogar em sala, de modo que o professor fará perguntas direcionadas para que em determinado momento seja citado o jogo da velha. Assim que citado o jogo da velha, o professor irá desenhar um tabuleiro no quadro e iniciará uma série de perguntas aos estudantes, sempre exemplificando o cenário proposto no quadro (ou Datashow), para que os estudantes possam visualizar o problema e procurar solução. Segue as perguntas sugeridas:

1. Considerando que "X" joga primeiro, qual o número máximo de tabuleiros distintos possíveis que podem existir após a primeira jogada? E após a segunda jogada (uma jogada de "X" e uma de "O")?
2. Quantas sequências de jogadas diferentes levam à vitória de "X" na terceira jogada (ou seja, "X" joga 3 vezes e vence)?
3. Se "X" já colocou dois símbolos em linha (horizontal, vertical ou diagonal), quantas posições diferentes "O" pode ocupar para evitar que "X" vença na próxima jogada?
4. Considerando as simetrias do tabuleiro (rotações e reflexões), quantas configurações de tabuleiro são realmente únicas após a primeira jogada de "X"?
5. Se apenas 4 jogadas foram feitas (2 de "X" e 2 de "O"), quantas configurações de tabuleiro diferentes são possíveis?
6. Qual o número máximo de jogos possíveis, considerando todas as formas de "X" vencer, "O" vencer ou terminar em empate?
7. Quantas sequências de jogadas diferentes levam a um empate (velha) no Jogo da Velha?
8. Se o primeiro jogador ("X") escolher o centro, quantas opções de resposta o segundo jogador ("O") tem para evitar uma possível armadilha de "X"?
9. Se as jogadas fossem feitas aleatoriamente, qual seria a probabilidade de "X" vencer em sua terceira jogada (considerando que "X" joga primeiro)?

10. Se o Jogo da Velha fosse jogado em um tabuleiro 4x4, qual o número de possíveis estados do tabuleiro após três jogadas de “X” e três de “O”?

Enquanto fizer as perguntas, o professor não deve se preocupar com as possíveis correções, nesse momento o foco é estimular os estudantes a desenvolver uma forma própria de pensar e chegar a uma resposta convincente, justificando matematicamente suas respostas. Após realizar todas as perguntas apenas de modo verbal, o professor entregará aos alunos uma lista impressa com as questões, solicitando que os estudantes tragam-nas respondidas na aula seguinte.

Fase 2: Apresentação dos tópicos de análise combinatória e solução das questões propostas

Na fase número 2, o professor irá refazer verbalmente as mesmas perguntas, indagando os estudantes sobre como conseguiram chegar a solução de cada uma e estimulando a buscarem outras situações que seria possível aplicar o mesmo método utilizados por eles, afim de encontrar generalizações. Em seguida apresentará os conceitos de análise combinatória, usando as próprias perguntas para exemplificar a aplicação de cada conceito, apontando situações em que a alteração da ordem de jogadas de “X” e “O” podem gerar resultados diferentes dos encontrados anteriormente, apresentando assim o princípio da preferência e, posteriormente, a diferença entre a aplicação de arranjos e combinações. Assim, após apresentar todos os conceitos, o professor fará a correção de cada questão no quadro, mostrando quais conceitos podem ser utilizados para solucionar cada problema.

AVALIAÇÃO

A avaliação dos estudantes será realizada de forma contínua e integral ao longo de todo o processo, priorizando a observação do engajamento nas atividades propostas, a qualidade da participação nas discussões em grupo e o respeito demonstrado aos colegas e às regras do jogo. Considerando-se os vários momentos de interação e discursão durante a aula, a avaliação não se restringe apenas ao desenvolvimento do estudante durante a aulas, mas de todo o contexto no qual ele foi inserido, de modo que o professor deverá fazer uma análise reflexiva sobre os resultados obtidos, objetivando aprimorar as técnicas utilizadas adaptando-as as necessidades do aluno.

4.3.2 SEGUNDA ETAPA

ITEM	DESCRIÇÃO

TÍTULO	Jogo da Velha Supremo
CONTEUDOS	Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutação, Arranjo e Combinação.
METODOLOGIAS	Aula dialogada com atividades em duplas.
TEMPO ESTIMADO	Seis aulas de 45 minutos cada.
PÚBLICO ALVO	Estudantes do Ensino Médio.
RECURSOS	Projetor e computador ou tela interativa, quadro branco ou verde, caneta de quadro branco ou giz, folhas A4, lista de exercício impressa e canetas.
HABILIDADES BNCC	(EM13MAT105), (EM13MAT310) e (EM13MAT315).

JUSTIFICATIVA

Após a introdução aos conceitos de análise combinatória através do jogo da velha, buscamos aprofundar o aprendizado e desafiar ainda mais os estudantes com uma versão mais complexa do jogo. A introdução do Jogo da Velha Supremo se justifica pela necessidade de quebrar a rotina e estimular a experimentação do novo, elementos essenciais para manter o interesse e a motivação dos alunos. Ao apresentar um jogo com regras e desafios adicionais, promovemos a expansão do raciocínio combinatório, a aplicação de estratégias mais elaboradas, a consolidação dos conhecimentos adquiridos, além de instigar a curiosidade e a busca por soluções inovadoras, habilidades fundamentais para o desenvolvimento cognitivo e a preparação para situações complexas na vida discentes, seja na rotina escolar ou além dela.

OBJETIVOS

- Expandir os conceitos de análise combinatória (permutações e combinações) para situações mais complexas, explorando as nuances do novo jogo.
- Analisar as diferentes possibilidades de jogadas no jogo da velha complexo, aplicando o princípio fundamental da contagem e outras técnicas de contagem.
- Desenvolver estratégias mais elaboradas e eficientes para o novo jogo, considerando a maior variedade de possibilidades.
- Estimular a resolução de problemas de contagem mais desafiadores, relacionados ao jogo da velha complexo, utilizando diferentes abordagens e representações.
- Promover a colaboração e a troca de conhecimentos entre os alunos, incentivando a discussão de estratégias e a análise crítica das soluções encontradas.

- Relacionar o novo jogo com outros temas da matemática, como probabilidade e teoria dos jogos, ampliando a visão dos alunos sobre a aplicabilidade dos conceitos.
- Incentivar a criatividade e a busca por soluções inovadoras, explorando as possibilidades do jogo e propondo novas estratégias e variações.
- Consolidar a atitude positiva em relação à matemática, demonstrando que a disciplina pode ser desafiadora e divertida ao mesmo tempo.

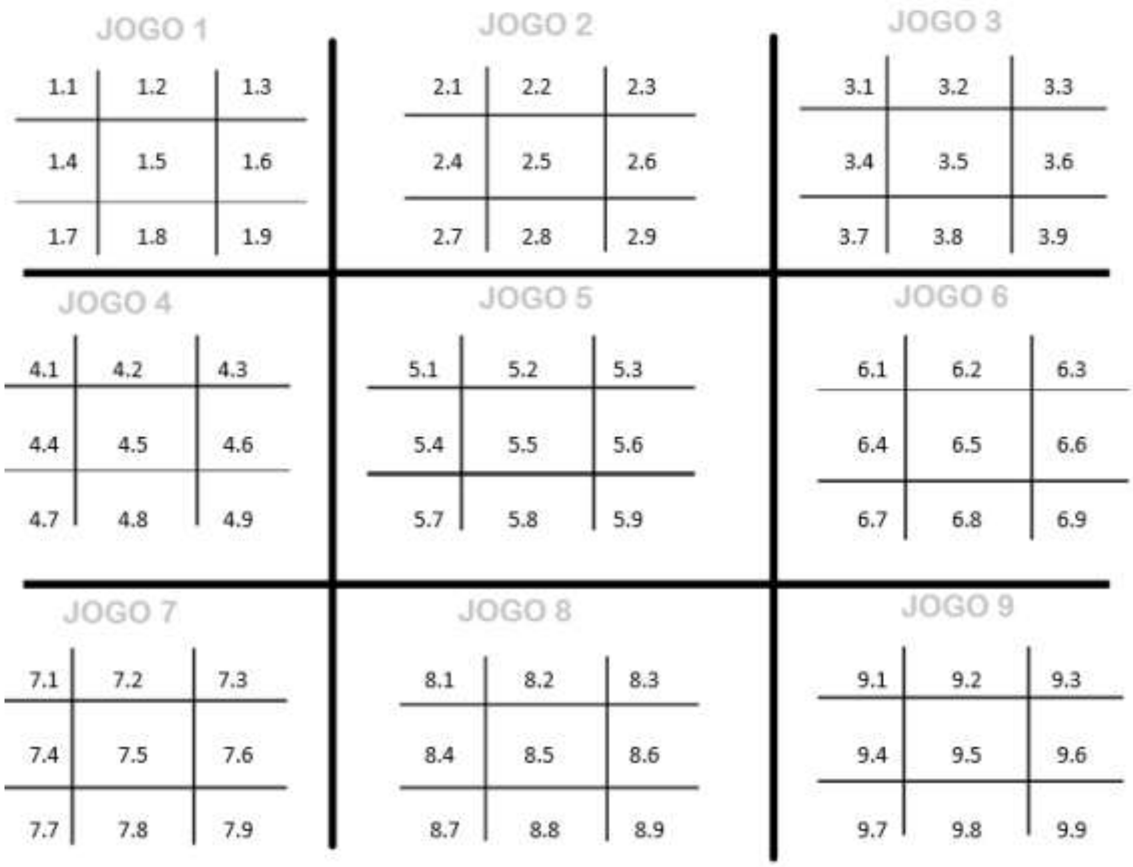
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Afim de garantir uma melhor compreensão do jogo, e sua relação com a análise combinatória, esta etapa da proposta didática também foi dividida em fases, que vão desde a apresentação e familiarização com o jogo até a aplicação de uma lista de atividades formuladas a partir da aplicação e relacionando com conceitos combinatórios.

Fase 1: Introdução do Jogo da Velha Supremo

Nessa fase será apresentado o Jogo da Velha Supremo aos estudantes, sugere-se que o professor cite a aula anterior antes de iniciar esta, para que seja feito uma retomada, questionando os discentes o que acharam da aula anterior, em seguida desenha novamente o tabuleiro do jogo da velha tradicional no quadro e em seguida, pedindo que os estudantes descrevam as regras e estratégias principais do jogo, buscando criar uma conexão imediata com o jogo. Após isso, mencione um desafio, dizendo que tem uma forma de deixar o jogo mais estratégico e desafiador. Em seguida, no tabuleiro desenhado no quadro, complete-o com os jogos menores, mostrando que em cada quadro do jogo tradicional há um novo tabuleiro, em seguida enumere cada jogo e maior e insira os índices nos jogos menores, como na imagem 21.

Figura 22: Tabuleiro do Jogo da Velha Supremo com índices



Fonte: Dados da Pesquisa

Durante a apresentação o professor também pode apresentar o tabuleiro usando projetor, isso permite que o aluno veja-o de maneira mais clara, especialmente em sala grandes.

Fase 2: Explicação das Regras

Regras básicas: Exponha que o objetivo continua sendo alinhar três “X” ou três “O” em um jogo pequeno, vencendo-o. Em seguida, o objetivo é vencer três jogos pequenos alinhados, vencendo assim o jogo grande. Mostre que ganhar um jogo pequeno é como marcar um “X” ou “O” no jogo grande.

Regras de condicionalidade: Explique que cada jogada condiciona a jogada seguinte do oponente, e destaque que a sua próxima jogada também será condicionada pela jogada do adversário. Nessa etapa apresente exemplos práticos, por exemplo, “se eu jogar no 7.2, onde você terá que jogar?” Em seguida mostre que eles seriam obrigados a jogar no jogo 2. Continue exemplificando até que todos tenham compreendido. Nessa etapa, é sugerido que o professor use também a versão digital do jogo, disponível no link abaixo, pois como mencionado, ele indica qual jogador deverá jogar “X” ou “O”, e o número do jogo que este fará sua jogada, o que pode facilitar a compreensão dos estudantes. Após apresentar os exemplos práticos, certifique-se de que todos tenham entendido, e continue a apresentação das demais regras.

Link da versão digital do jogo: https://websim.ai/p/zgy-tbaio-oiehvr4woi

Velha em um jogo pequeno: Explique que, se um jogo pequeno terminar empatado, ou seja, velha, ele se torna um "coringa" que pode ser usado por qualquer um dos jogadores para completar uma linha no tabuleiro principal, para isso basta alinhar dois jogos com ele e será o vencedor.

Jogos finalizados: Explique que quando um jogador for condicionado a um jogo que já foi fechado, ou seja, já houve um vencedor nele, ele poderá escolher qualquer um que ainda esteja disponível para fazer sua jogada.

Vitória final: Reforce que o objetivo final é vencer três jogos pequenos em linha (ou usar um coringa para ajudar).

Fase 3: Demonstração Interativa

Após certificar-se de todos os alunos entenderam, escolha um deles para jogar uma partida demonstrativa. Nessa etapa é sugerido que se use a versão desenhada no quadro, para facilitar a visualização e participação dos demais estudantes da turma. Ao realizar qualquer jogada verbalize seus pensamentos enquanto joga, isso contribuirá para os alunos estenderem as estratégias do jogo. "Estou jogando aqui para forçar meu oponente a ir para o jogo 2, onde eu já tenho uma vantagem." Mostre também como bloquear o oponente e criar oportunidades de vitória. Nessa fase vale o destaque de que em muitas ocasiões, é melhor deixar de fechar um jogo pequeno para bloquear uma possível jogada do oponente. Por fim, incentive os alunos a fazer perguntas durante o jogo e peça-os para sugerir jogadas e que expliquem suas sugestões, isso ajudará a traçarem suas próprias estratégias para a etapa seguinte.

Fase 4: Prática Supervisionada

Os alunos poderão jogar tanto em um tabuleiro impresso, ou desenhado por eles mesmos, ou ainda a versão digital. Aconselha-se inicialmente usar a versão digital, a não ser que a escola não forneça acesso à internet. Caso o professor julgue conveniente, a prática também pode ser realizada no laboratório de informática.

Antes de iniciar organize os estudantes em duplas, para jogarem entre si, seja na verão digital ou impressa. A escolha das duplas pode ser realizada por meio de sorteio, ou escolhendo número na frequência. Para decidir quem iniciará a partida, peça-os para disputarem "Pedra, Papel ou Tesoura". Deixe que cada dupla jogue duas partidas, caso eles queiram trocar de oponente após finalizar uma partida, também é permitido, nesse momento pretende-se ter a maior participação possíveis, então adaptações e mudanças repentinas são válidas para aumentar o engajamento. O professor deve ter em mente que pode ocorrer variações quanto a duração de uma partida, geralmente o tempo médio de uma partida em que os dois oponentes já conhecem e são praticantes do jogo é de 40 minutos, porém quando os participantes ainda não conhecem o jogo, uma partida dura de 15 à 25 minutos, por isso seria interessante iniciar a prática quando há duas aulas seguidas na mesma turma.

Durante todo o período de prática, monitore as partidas, oferecendo suporte individualizado e esclarecendo dúvidas. Oriente os estudantes a chama-lo sempre que surgir dúvidas e incentive os alunos a pensarem em suas estratégias e a comunicarem seus pensamentos. Se necessário, permita que os alunos usem o tabuleiro com os pontos **a.b** como guia durante as primeiras partidas, após algumas partidas, eles mesmos desenharão os tabuleiros e não terão a preocupação em escrever os índices.

Fase 5: Discursões e Reflexões

Promova ao término da aplicação, uma roda de conversa, e pergunte aos alunos o que acharam do jogo, se gostaram de jogar, e o que mais lhe chamou atenção durante as partidas, e o que lhe foi mais desafiador. Discuta também como o jogo ajuda a desenvolver habilidades como raciocínio lógico, planejamento estratégico e tomada de decisões.

Fase 6: Atividade avaliativa

Após finalizar a aplicação do jogo em sala de aula, o professor fará uma atividade avaliativa, na qual relacionará os conceitos de análise combinatória a interação do jogador com o jogo e suas regras. Segue a lista de perguntas sugeridas:

1. No início do jogo, o primeiro jogador tem quantas opções de jogada? Quantas opções o segundo jogador terá em sua primeira jogada? Explique como esse valor depende da escolha do primeiro.
2. Se o primeiro jogador escolher o ponto 1.1, e o segundo jogador responder com o ponto 1.2, quantas opções de jogada o primeiro jogador terá em seguida?
3. Considerando que um jogador já venceu dois jogos pequenos em linha (horizontal, vertical ou diagonal), de quantas maneiras diferentes ele pode vencer o jogo principal utilizando um coringa?
4. Um jogador percebe que, se o oponente fizer uma jogada em um ponto específico do tabuleiro, ele poderá vencer um jogo pequeno na rodada seguinte. Quais são as possibilidades de jogada que esse jogador tem para impedir a vitória do adversário, considerando todas as opções disponíveis?
5. Em um jogo completo, quantos jogos pequenos podem ser vencidos no máximo? E no mínimo?

6. Supondo que em um jogo, não tenha um vencedor em jogos pequenos. Qual o número mínimo de jogos coringas pode ter no tabuleiro, para que haja um vencedor?
7. De quantas maneiras diferentes um jogador pode vencer o jogo principal, combinando jogos pequenos vencidos e coringas?
8. Um jogador decide focar em vencer os jogos pequenos nas diagonais. Quantas sequências de jogadas diferentes ele pode seguir para garantir a vitória nesses jogos, ignorando as jogadas do oponente?
9. Se cada jogo pequeno pudesse ter um vencedor diferente (“X”, “O” ou empate), quantas combinações diferentes de resultados seriam possíveis no tabuleiro principal?
10. Se o Jogo da Velha Supremo fosse expandido para um tabuleiro 4x4, com jogos pequenos também 4x4 em cada quadro, quantas opções de jogada o primeiro jogador teria?

Ao corrigir o questionário, sugere-se que o professor não avalie apenas se a resposta está certa ou errada, mas que leve em consideração a construção da resposta do aluno, avaliando como ele chegou a tal resposta ou resultado. Na aula seguinte, sugere-se que o professor faça correção das questões no quadro, mostrando como obter cada resultado, e esclarecendo dúvidas assim quando surgirem.

AVALIAÇÃO

A avaliação dos alunos deverá ser um processo contínuo e integrado à dinâmica do jogo, com foco não apenas no resultado final, mas principalmente no desenvolvimento de habilidades e competências ao longo da atividade, em que se deve observado o engajamento individual e coletivo nas tarefas propostas, a qualidade da participação nas discussões em grupo, o respeito demonstrado aos colegas e as regras condicionais para o jogo. Também aconselha-se observar que a avaliação buscará identificar a habilidade dos discentes em buscar soluções criativas para os problemas que surgirem durante a partida, a utilização de conceitos de análise combinatória para calcular o número de possíveis jogadas e a aplicação de conceitos de probabilidade para avaliar as chances de vitória em diferentes cenários. A relação do jogo com outros temas da matemática e da lógica, demonstrada por meio de argumentos e estratégias utilizadas, deve acrescentar a análise do aprendizado e do desenvolvimento de cada estudante.

4.4 TORNEIO DE JOGO DA VELHA SUPREMO

Ao finalizar a aplicação, objetivando manter o engajamento e popularizar o jogo, sugere-se ao professor a realização de um torneio individual, em que os participantes de diferentes séries (preferencialmente do Ensino Médio) possam se inscrever. Para isso, marque uma data futura para o troneio e divulgue por meio de cartazes nos murais da escola, mídias digitas e pessoalmente nas salas em que pretende que tenha participantes inscritos. Como forma de incentivo, busque patrocínios dentro da própria escola para conseguir uma premiação atrativa, seja financeira, ou outros prêmios a depender do interesse do professor aplicador. Além disso, forneça o link da versão digital do jogo, disponibilize-o por meio de *Quick Response Code* (QR code) nas próprias mídias de divulgação do torneio. De modo complementar, disponibilize também o Apêndice 1, para que os demais estudantes possam conhecer o jogo bem como suas regras de jogabilidadade.

É sugerido que o número de inscrições seja limitado, a quantidade pode variar de acordo com a procura, porém, é importante que o número de inscritos corresponda a uma potência de base 2, pois quando disputado em formato eliminatório, (quem ganha avança, quem perde é eliminado), é garantido que cheguem apenas dois participantes na final.

As partidas iniciais serão definidas por meio de sorteio, e o restante pode ser feito de modo que o vencedor do primeiro jogo enfrenta o vencedor do segundo, o do terceiro enfrenta o do quarto, e assim sucessivamente, inclusive nas fases seguintes. Como mencionado, o vencedor de cada confronto passará para fase seguinte, o que perder será eliminado, até que reste apenas dois finalistas. O número de rodadas dependerá do número de inscritos, sendo que não há tempo limite para uma partida. É sugerido que seja usado o quadro branco ou cartazes para exibir o chaveamento do torneio, os resultados das partidas e os nomes dos finalistas. Finalizado o torneio, certifique o vencedor e ofereça a(s) premiação(ões) conseguidas para os vencedores (adesivos, canetas, certificados, kit de réguas, etc.).

4.5 REFLEXÕES SOBRE A PROPOSTA DIDÁTICA

Percebe-se que os objetivos da proposta, estão totalmente relacionados as cinco competências específicas de Matemática no Ensino Médio propostas pela BNCC, pois promove um aprendizado mais significativo e participativo. O jogo estimula o uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, pois exige que os alunos interpretem as regras e as situações específicas do jogo, aplicando raciocínio lógico e estratégias matemáticas para tomar decisões, o que retrata a aplicação da Matemática em contextos variados. Além disso, ao incentivar a resolução de problemas e a tomada de decisões estratégicas, o jogo simula desafios reais, promovendo a colaboração e o trabalho em equipe, habilidades essenciais para enfrentar problemas do mundo real. O jogo também promove utilização de estratégias e construção de modelos matemáticos para resolver problemas, pois os estudantes necessitam criar modelos mentais e estratégias para prever os movimentos do adversário e planejar suas jogadas, alinhando-se à competência de modelagem matemática e análise das soluções propostas.

Como vimos a abrangência do jogo vai muito além dos conceitos combinatórios, podendo ser explorado com representações algébricas, geométricas e lógica matemática, como as sequências de jogadas, índices e representação do tabuleiro e condicionalidade das jogadas, colaborando para que os alunos tratem diversas formas de representação matemática simultaneamente. O jogo promove ainda, a investigação e a constituição de conjecturas sobre conceitos matemáticos, obtidos através da observação de padrões e a formulação de hipóteses sobre as possíveis estratégias durante o jogo, desenvolvendo assim, habilidades investigativas e analíticas.

O desenvolvimento de cada etapa da proposta baseia-se na interação entre professor e estudantes, de modo que os conceitos sejam construídos e validados durante a própria aplicação, estimulando a participação ativa dos estudantes e criando um ambiente colaborativo, desenvolvendo o raciocínio combinatório, estratégico e analítico, conectando conteúdos com a realidade dos alunos de maneira dinâmica e interativa. Além disso, a proposta oferece ao professor uma flexibilização, de modo que ele pode adaptar as sequências didáticas a grade curricular, e as necessidades específicas dos discentes, atuando como mediador e facilitador do processo de aprendizagem. A avaliação contínua e formativa, ao priorizar a participação, colaboração e o respeito, valoriza esse processo, dando segurança aos discentes para testar, errar, e aprender a construir seu próprio conhecimento.

Portanto, a proposta didática apresentada reflete uma jornada pessoal do autor, desde o fascínio inicial por jogos e a busca por uma matemática mais acessível e interessante aos alunos, até a concretização de um método que une o lúdico ao aprendizado de conceitos matemáticos. Justificada pela experiência em sala de aula, pelo desejo apresentar uma alternativa ao ensino tradicional e alinhada às competências da BNCC, a proposta utiliza o Jogo da Velha e sua versão “Supremo” como ferramentas para estimular o raciocínio, a colaboração, a resolução de problemas e a capacidade de modelagem matemática dos estudantes. Ao promover um ambiente de aprendizado dinâmico e flexível, onde o erro é parte do processo, busca-se desmistificar a matemática e despertar o encantamento pela disciplina. Assim, a proposta se configura como uma ferramenta valiosa para transformar a sala de aula em um espaço de descobertas, desafios e aprendizado significativo, onde a Matemática se torna acessível, atrativa, relevante e útil.

Espera-se que, ao aplicar a proposta didática, os estudantes desenvolvam um raciocínio combinatório mais apurado e estratégico, compreendendo os conceitos de análise combinatória de forma intuitiva e prática. Acreditamos que, ao final das atividades, os alunos serão capazes de identificar e analisar diferentes possibilidades de jogadas, aplicar o princípio fundamental da contagem em situações desafiadoras e resolver problemas de contagem de forma mais rápida e eficiente. Além disso, almejamos que os estudantes desenvolvam habilidades de análise crítica e tomada de decisões estratégicas, baseadas nas possibilidades identificadas durante os jogos. Acreditamos que a proposta didática pode contribuir para a desmistificação da matemática como uma disciplina difícil e inacessível, reduzindo a ansiedade e o medo associados à ela. Esperamos também que os alunos percebam a aplicação prática e relevante da matemática em diferentes contextos, tornando o aprendizado mais significativo e prazeroso, com o entendimento de que a matemática pode ser uma ferramenta poderosa para resolver problemas e tomar decisões em diversas áreas da vida.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo central analisar o Jogo da Velha Supremo como ferramenta metodológica para o ensino de Análise Combinatória, buscando alternativas que contribua para tornar o ensino da matemática mais atrativo e acessível aos estudantes. Motivado pela rejeição histórica à disciplina e pelos resultados preocupantes em avaliações como o Pisa. Por meio do desenvolvimento do jogo, e baseado em teóricos como Borges, Sousa, Moura e as legislações e documentos oficiais que regem a educação nacional, espera-se que a aplicação do jogo possa contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico dos alunos, e simultaneamente possa tornar o processo de aprendizagem mais lúdico e significativo.

Aplicando a análise combinatória no Jogo da Velha (Tic-Tac-Toe) foi possível identificar estratégias vencedoras, vantagens do primeiro movimento e a possibilidade de empates, porém, observou-se que se dois jogadores usarem o algoritmo do jogo perfeito, o jogo sempre terminará em empate. Estendo o mesmo raciocínio ao Jogo da Velha Supremo, buscou-se traçar estratégias vencedoras por meio da análise combinatória, observado também que as regras de condicionalidade tornam o jogo menos previsível que o tradicional, concluindo assim que há algoritmos que tendem a levar o jogador a vitória, no entanto, não há garantias de que ao usá-lo, o jogador será vitorioso. Buscou-se mostrar também no contexto histórico que os jogos de estratégia e raciocínio lógico relacionando o desempenho no jogo com o desempenho matemático dos alunos.

A proposta metodológica apresentou aspectos essências para uma bom desenvolvimento em sala de aula, como o engajamento dos alunos, a contextualização dos conteúdos e a facilidade de adaptação do jogo para diferentes níveis de ensino, embora também tenha apresentado limitações, como o tempo necessário para a assimilação das regras pelos estudantes, planejamento minucioso por parte dos professores, além da possibilidade dos estudantes focarem excessivamente no lúdico e não assimilarem os conceitos matemáticos abordados.

Acreditamos que esta proposta metodológica pode ser inserida no cotidiano escolar, promovendo assim, um ambiente de aprendizagem mais interativo e colaborativo. Além disso, esperamos que sirva de inspiração para outros professores que buscam alternativas lúdicas e inovadoras para o ensino de matemática. No entanto, ressaltamos a importância de estudos mais aprofundados sobre o impacto do uso de jogos de estratégia em diferentes contextos e faixas etárias, bem como a aplicação dos mesmos para outros componentes curriculares, além da realização de pesquisas quantitativas e qualitativas para avaliar o desempenho dos alunos e a adaptação de outros jogos para o ensino de conteúdos matemáticos.

Diante do exposto, concluímos que a utilização do Jogo da Velha Supremo representa uma alternativa viável e promissora para a superação do desinteresse e das dificuldades históricas no ensino de matemática, reforçando o papel do professor como agente transformador, capaz de promover mudanças significativas por meio de metodologias inovadoras e contextualizadas.

REFERÊNCIAS

BERTHOLON, Guillaume; GÉRAUD-STEWART, Rémi; KUGELMANN, Axel; LENOIR, Théo; NACCACHE, David. At Most 43 Moves, At Least 29 Optimal Strategies and Bounds for Ultimate Tic-Tac-Toe. Paris, França: Département d'informatique de l'ÉNS, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University. 2020.

BORGES, Gilmar Nascimento. Uma sequência didática para o ensino de análise combinatória com auxílio do jogo de xadrez / Gilmar Nascimento Borges. – Ilhéus, BA: UESC, 2020. 54 f.: il.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. p.265 – 545.

BRASIL. [Constituição (1988)]. Constituição da República Federativa do Brasil. [recurso eletrônico] — Brasília: Supremo Tribunal Federal, Secretaria de Altos Estudos, Pesquisas e Gestão da Informação, 2024. eBook (284 p.).

BRASIL. [Plano Nacional de Educação (PNE)]. Plano Nacional de Educação 2014-2024 [recurso eletrônico]: Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014, que aprova o Plano Nacional de Educação (PNE) e dá outras providências. – 2. ed. – Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2015. – (Série legislação; n. 193).

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 562p.

GRANDO, Regina Célia. O jogo e a matemática no contexto da sala de aula / Regina Célia Grando. - São Paulo: Paulus, 2004. - (Coleção pedagogia e educação)

GUARALDO, Fabrízio. “Como surgiu o jogo da velha?”. Cultura Pop na Web, 2013. Disponível em: https://culturapopnaweb.wordpress.com/2013/05/16/como-surgiu-o-jogo-da-velha/. Acesso em 08 de outubro de 2024.

FREIRE, João Batista. Fundamentos do jogo. [S.l.], [2004?.]. Disponível em: https://incubadoradejogos.weebly.com/uploads/7/5/4/7/7547426/texto_prof._joo_-_fundamentos_do_jogo.pdf. Acesso em: 10 outubro de 2024.

K. Crowley and R. Siegler, "Flexible Strategy Use in Young Children's Tic-Tac-Toe", Cognitive Science, vol. 17, no. 4, pp. 531-561, 1993.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Brinquedo na educação: considerações históricas.** Ideias, n. ju 1990, p. 39-45, 1990. Tradução. Acesso em: 26 fev. 2025.

LAGES, Elon Lima. Matemática e Ensino – 3.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2007. 250p. (Coleção Professor de Matemática;16).

LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. – 7. ed. – Brasília, DF: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2023. 64 p.

MOURA, José Augusto Alves de. O uso do jogo de xadrez como recurso auxiliar nas aulas de matemática: um estudo de caso na escola C.E. "Inácio Passarinho" em Caxias-Maranhão / José Augusto Alves de Moura. - 2021. 68 f.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **Jogo na educação matemática**. Ideias, n. 7, p. 62-7, 1990. Tradução. Acesso em: 08 jan. 2025. Disponível em: http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_07_p062-067_c.pdf

SANTOS, Franciscleide Ribeiro dos S235p Uma proposta de sequência didática para o ensino de equação do 1º grau./ Fanciscleide Ribeiro dos Santos. - 2024. 91 f.: il.

SOUSA, Gilvan Francisco de. Uso de jogos como metodologia para o Ensino da Matemática. 2022. 39f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Centro de Ensino Superior do Seridó, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2022.

ZUHRI, Zayd Muhammad Kawakibi. A combinatorial analysis of tic-tac-toe and the theoretical advantage of playing first. 2021. 6p.

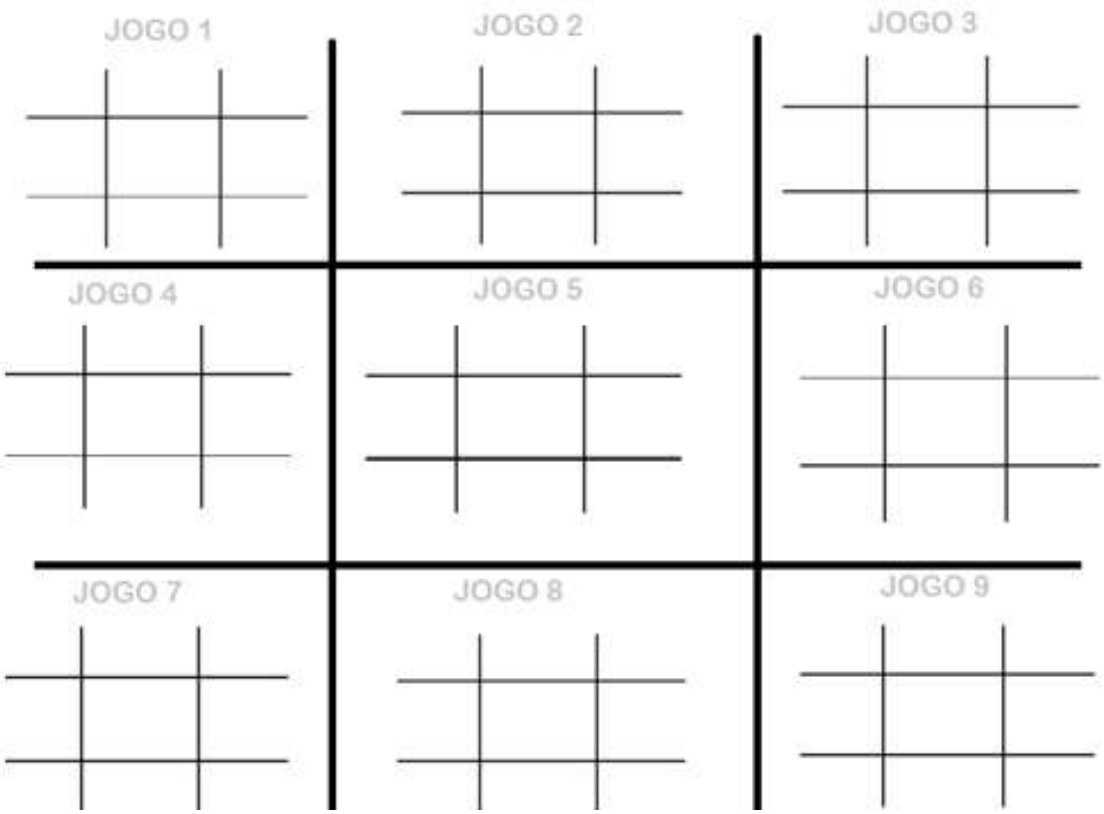
APÊNDICE

APÊNDICE 1: Apresentação do Jogo da Velha Supremo
Jogo da Velha Supremo

O Jogo da Velha, também conhecido como "Tic-Tac-Toe" em inglês, é um dos jogos de tabuleiro mais simples e populares do mundo. Com uma mecânica fácil de entender e que pode ser jogado em qualquer lugar, esse jogo é uma excelente ferramenta para desenvolver habilidades de raciocínio lógico e estratégia, tanto em crianças quanto em adultos.

O **Jogo da Velha** Supremo é um jogo semelhante ao tradicional Jogo da Velha que conhecemos, porém, em cada espaço do tabuleiro 3x3 do jogo tradicional, há um outro jogo menor, também com formato de tabuleiro 3x3, como mostra a imagem seguinte.

Figura 23: Tabuleiro do Jogo da Velha Supremo



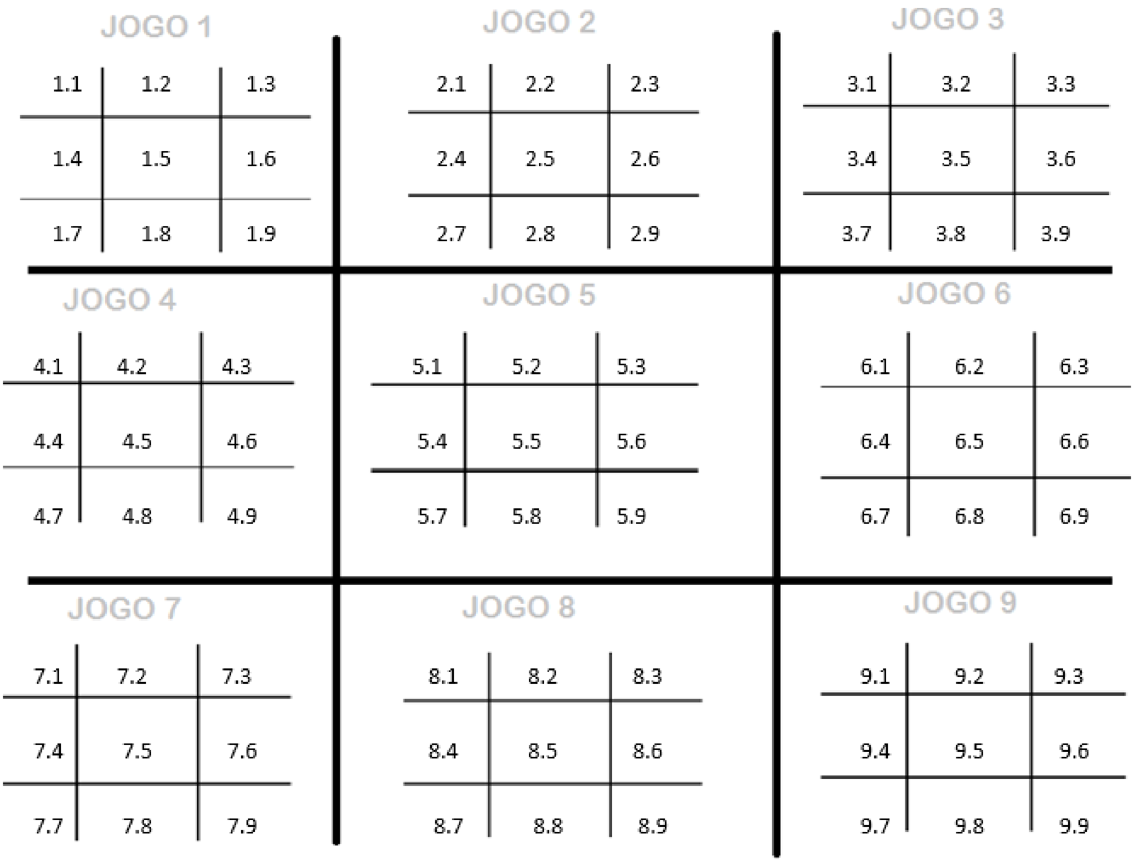
Fonte: Autor (2024)

Regras Básicas

O jogo é disputado por dois jogadores: um utiliza o símbolo "X" e o outro o símbolo "O". Os dois jogadores podem decidir quem irá começar, da forma que preferirem, geralmente, é definido por “Pedra, papel ou Tesoura”. O objetivo é ganhar três jogos pequenos alinhados, como no jogo tradicional, porém, cada jogada de um jogador, condiciona a jogada do oponente.

Para facilitar o entendimento, consideremos agora o tabuleiro com os pontos **a.b**, este pode ser usado por iniciantes, até que todos compreendam as regras. Porém, após assimilação das regras pelos jogadores, o ideal é usar o primeiro tabuleiro (figura 22).

Figura 24: Tabuleiro do Jogo da Velha Supremo com índices



Fonte: Autor (2024)

Considerando cada ponto **a.b** no tabuleiro abaixo, temos que:

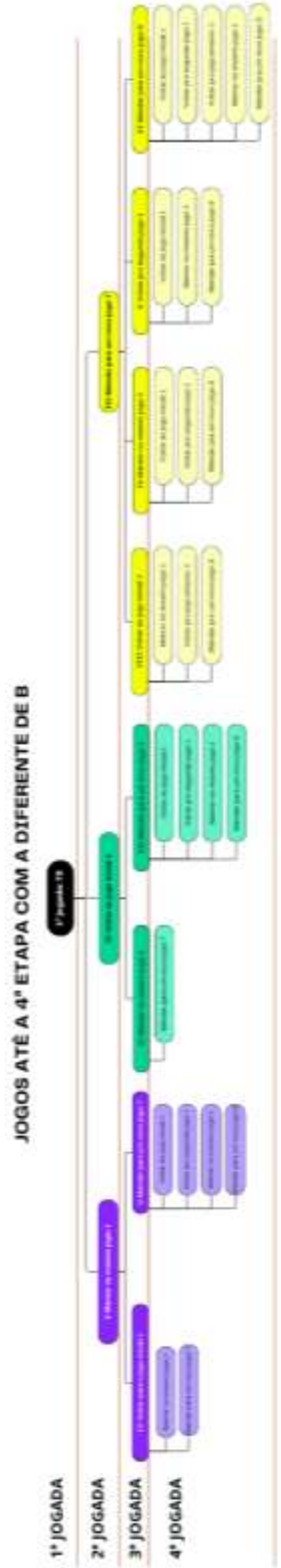
- **a** corresponde ao número do jogo atual, ou seja, que o jogador está jogando nele;
- **b** corresponde ao jogo que o oponente será condicionado a jogar;
- Assim, se o primeiro jogador escolher o ponto 9.4, o segundo terá uma das opções: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 ou 4.9, e assim sucessivamente.
- O jogador que vencer um jogo **a**, alinhando três X ou três O, como no tradicional, o mesmo marcará esse jogo para si, fazendo um X ou O em todo o jogo **a**.
- Quando um jogador ganhar um jogo **a**, este será fechado, não podendo mais nenhum dos jogadores usá-lo.
- Caso um jogo **a**, dê velha, este servirá como coringa, e pode ser utilizado por qualquer um dos jogadores para fazer o jogo do tabuleiro maior.

  - Vencerá o jogo, o jogador que conseguir vencer três jogos pequenos alinhados, ou use o coringa para alinhar com outros dois.

A versão digital do jogo está disponível no link abaixo:
https://websim.ai/p/zgy-tbaio-oiehvr4woi

APÊNDICE 2: Diagrama das possibilidades de jogadas até a 4ª etapa iniciando com a ≠ b

Figura 25: Diagrama de possibilidades.

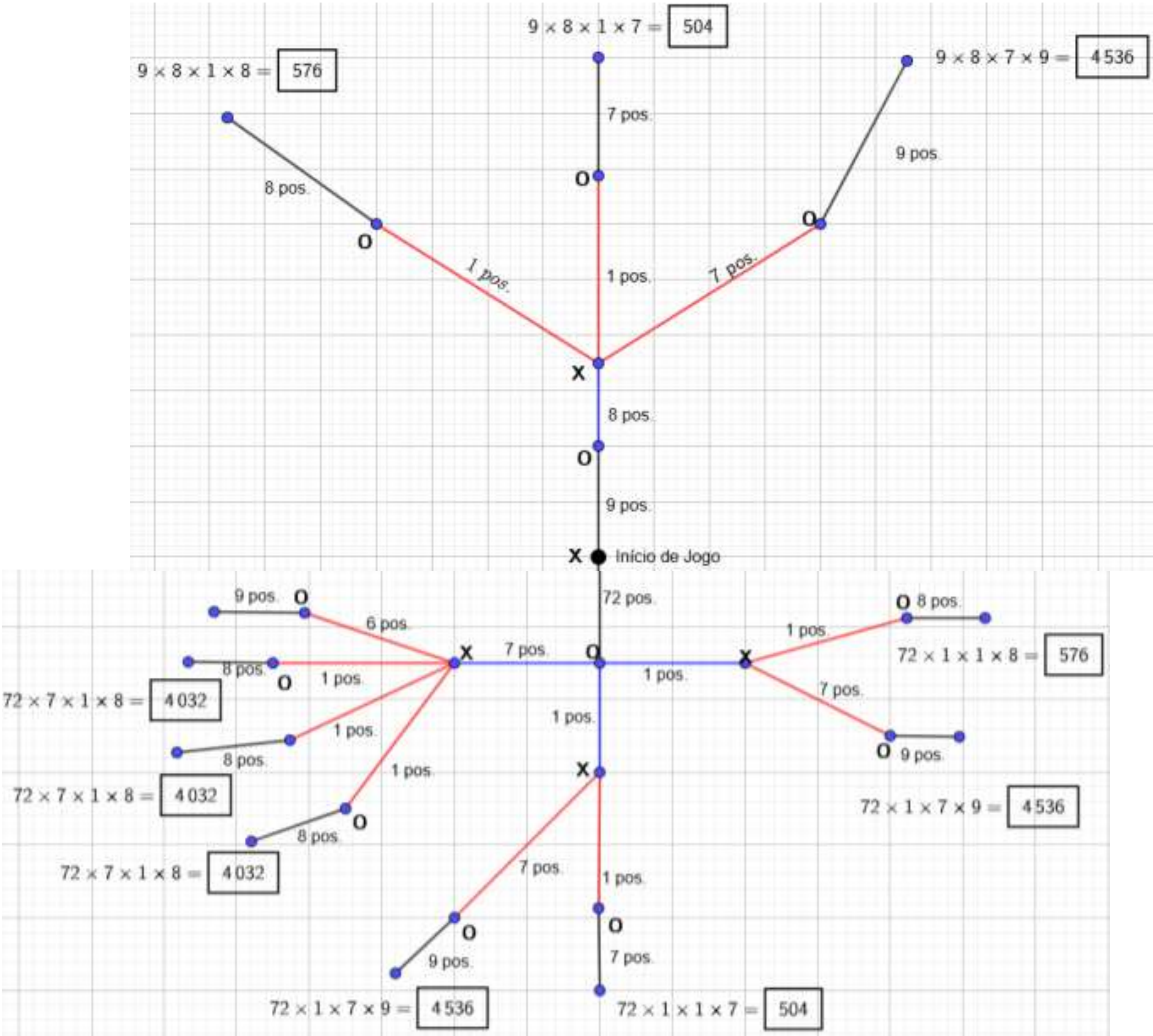


Fonte: Dados da pesquisa

ANEXOS

ANEXO 1: Diagrama das possibilidades até a quarta etapa com a = b e a ≠ b.

Figura 26: Possíveis jogadas



Fonte: Dados da pesquisa