



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE TOCANTINS  
CÂMPUS CIMBA ARAGUAÍNA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**



**GABRIELA FERREIRA DE MIRANDA**

**O ALGORITMO DE EUCLIDES COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE  
DIVISIBILIDADE: PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS**

**Araguaína-TO  
2025**

GABRIELA FERREIRA DE MIRANDA

O ALGORITMO DE EUCLIDES COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE  
DIVISIBILIDADE: PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional da Universidade Federal do Norte  
do Tocantins como requisito parcial para a  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Araguaína-TO  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT  
**Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

F383a Ferreira de Miranda , Gabriela .  
O ALGORITMO DE EUCLIDES COMO FERRAMENTA PARA  
O ENSINO DE DIVISIBILIDADE: PROPOSTAS DE  
SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS / Gabriela Ferreira de Miranda . - Centro  
de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.  
65 f.  
Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade  
Federal do Norte do Tocantins, 2025.  
Orientadora: Profa. Dra. Renata Alves da Silva .  
1. Algoritmo de Euclides. 2. Divisibilidade . 3. Propostas didáticas.

**CDD 510**

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.


**Gabriela Ferreira de Miranda**

**O ALGORITMO DE EUCLIDES COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE  
DIVISIBILIDADE: PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Norte do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.


Trabalho aprovado em: 18 de agosto de 2025

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente  
 **RENATA ALVES DA SILVA**  
Data: 01/09/2025 16:15:06-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

**Profa. Dra. Renata Alves Silva - UFNT**  
Orientadora

Documento assinado digitalmente  
 **JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR**  
Data: 29/08/2025 12:05:21-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior - UFNT**  
Examinador interno

Documento assinado digitalmente  
 **GUILHERME LUIZ DE OLIVEIRA NETO**  
Data: 29/08/2025 11:51:40-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof. Dr. Guilherme Luiz de Oliveira Neto - IFPI**  
Examinador Externo

Araguaína-TO  
2025

*Dedico esse trabalho aos meus pais, Iraídes e Pedro (in memoriam) que são meus maiores incentivadores, aos meus irmãos, Luiza, Paula, Maurício, Mauricélia, aos meus sobrinhos Nádia e Pedro e a todos que contribuíram para realização deste sonho.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais, Iraídes Ferreira de Miranda e Pedro Gonçalves de Miranda (in memoriam), por terem me instruído, motivado e acreditado na minha capacidade para alcançar essa vitória. Em 2024, foi um ano muito difícil para continuar essa jornada, pois, no meio de muitas conquistas, sofri a perda inesperada do meu pai, foi um momento que pensei que não conseguiria continuar essa caminhada, mas pela resiliência de minha família e força dos meus amigos, consegui continuá-la.

Aos meus irmãos, Luiza, por todo cuidado durante este período, e imensa preocupação, principalmente nos períodos das provas. Maurício, Mauricélia e Paula e aos meus sobrinhos, Nádia e Pedro Gabriel e Jonas Duarte (irmão de alma que Açailândia me presenteou) meu muito obrigada por todo incentivo e força para alcançar este objetivo.

Agradeço à minha tia avó Raimunda Inere (carinhosamente, tia Mundica), ao meu tio avô José (tio Zé), e à pequena Sônia por toda demonstração de carinho e a toda sua família, por terem me recebido com tanto amor e carinho em sua casa.

Agradeço à minha orientadora, Dra. Renata, por todos os conselhos, pela paciência e compreensão durante este período, por entender o momento que estava enfrentando e por toda a ajuda nessa etapa.

Aos meus amigos, em particular: Mary Diniz, Thalyta Zampiva, Luís Jorge, Silvany, Assislane, Anatália e seu esposo Jarder, Maria Raimunda, Ana Gabriela por toda a ajuda durante este processo e pelo acolhimento mediante as dificuldades que foram enfrentadas durante essa caminhada.

Agradeço aos amigos e colegas do Profmat, de modo especial ao Daniel, Matheus, Carlos Eduardo e ao Antônio Onofre. E ao meu amigo da graduação do IFPI José Joel Alexandre.

Aos professores do PROFMAT: Dr. José Carlos, Dr. Raimundo, Dr. Rogério, Dra. Sâmara, Dr. Álvaro e aos meus professores do IFPI: Dr. Ernandes Guedes, que sempre enviava os editais de mestrado e ao Dr. Guilherme pela sua mentoria.

E ainda meus amigos e colegas de trabalho, de modo especial aos da escola Telefre Sampaio que acompanharam todo esse processo.

Agradeço a todos, que, embora não tenham sido mencionados, contribuíram direta e indiretamente para a concretização deste objetivo.

À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho de pesquisa.

# Resumo

Esta dissertação tem como objetivo desenvolver e apresentar duas propostas de sequências didáticas utilizando o Algoritmo de Euclides como ferramenta pedagógica para o ensino de divisibilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente do 6º ao 9º ano. A pesquisa parte da seguinte problemática: como o Algoritmo de Euclides pode ser utilizado, enquanto ferramenta, para o ensino de divisibilidade por meio de propostas didáticas? Para responder a essa questão, adota-se uma abordagem qualitativa, fundamentada em revisão bibliográfica e desenvolvimento de propostas pedagógicas contextualizadas. Inicialmente, o estudo apresenta um panorama histórico sobre os métodos de divisão e a origem do Algoritmo de Euclides. Em seguida, o Algoritmo de Euclides é introduzido com ênfase em suas aplicações práticas e relevância na teoria dos números. A partir da análise da Base Nacional Comum Curricular, bem como de trabalhos acadêmicos do PROFMAT, foram elaboradas sequências didáticas alinhadas ao currículo oficial das competências matemáticas. As propostas incluem atividades problematizadoras, como uma lista de exercícios direcionados e uma tarefa baseada na obra *O Homem que Calculava*, de Tahan (2013), dando ênfase a narrativa "O Problema dos Três Marinheiros", que incentivam a resolução de problemas por meio do Algoritmo de Euclides. Com isso, pretende-se contribuir para o ensino da matemática de forma significativa, promovendo a compreensão dos conceitos de divisibilidade e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos.

**Palavras-chaves:** Algoritmo de Euclides; Ensino de Matemática; Divisibilidade; Sequências Didáticas; Ensino Fundamental.

# Abstract

This dissertation aims to develop and present two proposals for didactic sequences using Euclid's Algorithm as a pedagogical tool for teaching divisibility in the final years of Elementary School, specifically from the 6th to the 9th grade. The research is based on the following question: how can the Euclidean Algorithm be used as a tool for teaching divisibility through didactic proposals? To answer this question, a qualitative approach is adopted, grounded in a literature review and the development of contextualized pedagogical proposals. Initially, the study presents a historical overview of division methods and the origin of the Euclidean Algorithm. Next, the Euclidean Algorithm is introduced with emphasis on its practical applications and relevance to number theory. Based on an analysis of the Base Nacional Comum Curricular and academic works from PROFMAT, didactic sequences were developed in alignment with the official curriculum and mathematical competencies. The proposals include problem-based activities, such as a targeted exercise list and a task inspired by the book *The Man Who Counted* by Tahan (2013), emphasizing the narrative "The Problem of the Three Sailors", encouraging problem solving through the Euclidean Algorithm. The aim is to contribute to meaningful mathematics education by promoting the understanding of divisibility concepts and the development of students' logical-mathematical reasoning.

**Keywords:** Euclidean Algorithm; Mathematics Education; Divisibility; Didactic Sequences; Elementary Education.

## Lista de ilustrações

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Papiro Rhind ou Ahmes . . . . .          | 16 |
| Figura 2.2 – O tablete Plimpton 322 . . . . .         | 18 |
| Figura 4.1 – Divisões dos naturais . . . . .          | 43 |
| Figura 4.2 – Divisões dos inteiros. . . . .           | 44 |
| Figura 4.3 – Lousa com Algoritmo da divisão . . . . . | 45 |

## Lista de quadros

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Quadro 1 – Divisão por 2 . . . . . | 42 |
| Quadro 2 – Divisão por 3 . . . . . | 42 |
| Quadro 3 – Divisão por 4 . . . . . | 43 |

# Lista de abreviaturas e siglas

|         |   |
|---------|---|
| BNCC    | Base Nacional Comum Curricular                          |
| mdc     | Máximo Divisor Comum                                    |
| OBMEP   | Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas |
| PISA    | Programa Internacional de Avaliação de Alunos           |
| PROFMAT | Programa Profissional de Matemática em Rede Nacional    |
| SD      | Sequência Didática                                      |

# Lista de símbolos

|               |                               |
|---------------|-------------------------------|
| $\alpha$      | Letra grega minúscula Alpha   |
| $\beta$       | Letra grega minúscula Beta    |
| $\subset$     | Contido                       |
| $\neq$        | Diferente                     |
| $ $           | divide                        |
| $\varepsilon$ | Letra grega minúscula Epsilon |
| $\geq$        | Maior igual                   |
| $<$           | Maior quer                    |
| $\leq$        | Menor igual                   |
| $>$           | Menor quer                    |
| $  $          | Módulos                       |
| $\mathbb{Z}$  | Números Inteiros              |
| $\mathbb{N}$  | Números Naturais              |
| $\mu$         | Letra grega minúscula Mu      |
| $\nmid$       | Não divide                    |
| $\Phi$        | Letra Grega Phi               |
| $\Pi$         | Letra Grega Pi                |
| $\cup$        | União                         |
| $\emptyset$   | Vazio                         |
| $\in$         | Pertence                      |
| $\sigma$      | Letra grega minúscula Sigma   |

# Sumário

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .  | 12 |
| 2     | CONTEXTO HISTÓRICO . . . . .  | 15 |
| 2.1   | O Panorama Histórico da Operação de Divisão . . . . .   | 16 |
| 2.2   | Euclides e sua obra: Os Elementos . . . . .   | 19 |
| 2.2.1 | Livro VII: O Algoritmo de Euclides para o processo da divisibilidade . . . . .  | 21 |
| 3     | ALGORITMO DE EUCLIDES E O MÉTODO DAS DIVISÕES SUCESSIVAS . . . . .  | 22 |
| 3.1   | Divisibilidade . . . . .  | 22 |
| 3.2   | Algoritmo de Euclides . . . . .   | 25 |
| 3.3   | Máximo Divisor Comum (mdc) . . . . .  | 28 |
| 3.3.1 | O Máximo Divisor Comum a partir da Decomposição em Fatores Primos . . . . .   | 31 |
| 3.4   | Método das Divisões Sucessivas . . . . .  | 33 |
| 4     | PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS . . . . .   | 36 |
| 4.1   | Elaboração das Sequências Didáticas . . . . .   | 37 |
| 4.2   | Primeira Proposta Didática: Uma Abordagem para o Ensino do Algoritmo de Euclides . . . . .                              | 38 |
| 4.2.1 | Explorando o Algoritmo de Euclides: passo a passo da aplicação da primeira sequência didática em sala de aula . . . . . | 40 |
| 4.2.2 | Atividade I da proposta didática . . . . .  | 41 |
| 4.3   | Segunda Sequência Didática: cálculo do mdc e o problema dos três marinheiros . . . . .                                  | 46 |
| 4.3.1 | O Problema dos Três Marinheiros . . . . .   | 46 |
| 4.3.2 | Atividade II: Métodos para o cálculo do mdc e o Problema dos Três Marinheiros . . . . .                                 | 48 |
| 4.3.3 | Parte I da atividade que deve ser impressa . . . . .  | 49 |
| 4.3.4 | Parte II da atividade que deve ser impressa: O Problema dos Três Marinheiros . . . . .                                  | 55 |
| 5     | CONCLUSÃO . . . . .   | 61 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .   | 62 |

# 1 INTRODUÇÃO

A matemática, enquanto ciência intimamente ligada a situações práticas do cotidiano, caracteriza-se pela constante busca pela precisão dos fatos por meio de técnicas rigorosas e exatas. Desde seu surgimento, vem sendo aperfeiçoada e estruturada em teorias consistentes; contudo, não é uma ciência estática ou definitiva. Assim como outras áreas, ela evolui em resposta às transformações sociais, investigando e incorporando novas situações que emergem no dia a dia. Nesse sentido, a matemática não se limita à mera apresentação de fórmulas, pois pode proporcionar ao indivíduo uma compreensão que favoreça sua interação com o mundo ao seu redor, em consonância com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo, Brasil (2018)

A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (Brasil, 2018, p.265)

A citação acima abre espaço para discutir o ensino da matemática na educação básica e sua importância para o desenvolvimento de competências específicas, como o aprimoramento do pensamento numérico em cada etapa do Ensino Fundamental. Entretanto, além dos diversos desafios já existentes, o ensino da matemática muitas vezes esbarra em abordagens teóricas superficiais, como é o caso do ensino da divisibilidade, tema que será aprofundado neste estudo.

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o uso do Algoritmo de Euclides como ferramenta para o ensino da divisibilidade nos anos finais do Ensino Fundamental, por meio da elaboração e aplicação de propostas de sequências didáticas. Pretende-se desenvolver atividades que utilizem esse algoritmo como recurso pedagógico para facilitar a compreensão do conceito de divisibilidade entre estudantes do 6º ao 9º ano.

Entendendo o estudo da matemática como um meio exploratório, é importante iniciar esse percurso investigativo apresentando um contexto histórico sobre os métodos de divisão e a origem do Algoritmo de Euclides que, inclusive, foi essencial para compreender, dentro da unidade temática de números, a Divisibilidade e os métodos de resolução do Máximo Divisor Comum.

Dessa forma, objetiva-se introduzir o conceito da Divisibilidade por meio de suas propriedades e sua relação de ordem, seguida pela abordagem do Algoritmo de Euclides, destacando suas aplicações práticas e sua importância através de teoremas. Além disso, associados a esse propósito, serão apresentados diferentes métodos para determinar o máximo divisor comum (mdc). Por fim, a pesquisa apresenta propostas de sequências didáticas que integram o Algoritmo de Euclides ao ensino da Divisibilidade e a sua aplicação no Ensino Fundamental.

Este trabalho utiliza uma abordagem estruturada e fundamentada nos princípios de pesquisa em Educação Matemática, visando ao desenvolvimento e a implementação de sequências didáticas inovadoras baseadas no Algoritmo de Euclides. A metodologia combina uma investigação teórica rigorosa com análise curricular detalhada e design pedagógico, buscando estabelecer um ciclo contínuo de reflexão e melhoria. A seguir, será descrito detalhadamente as etapas do processo e os métodos empregados.

O ponto de partida é uma revisão bibliográfica abrangente, que buscará mapear os fundamentos teóricos do Algoritmo de Euclides e suas aplicações na teoria dos números, além de identificar abordagens metodológicas atuais para o ensino de conceitos matemáticos nos anos finais do Ensino Fundamental. Esta etapa visa embasar as escolhas pedagógicas da pesquisa, fundamentando-se em literatura nacional e internacional, como bases de dados acadêmicos (dissertações e teses), livros de referência, e a BNCC (2018).

Ademais, o presente estudo, de natureza qualitativa, foi inspirado na dissertação do PROFMAT, cujo título é Algoritmo da divisão de Euclides de Caixeta (2016). Esse estudo complementa a base teórica: Aritmética (coleção PROFMAT) de Hefez (2016); Álgebra Moderna, de Domingues e Iezzi (2003); História da matemática, de Boyer (1974); A arte de resolver problemas, um novo aspecto do método matemático, de Pólya (1995); A Prática Educativa de Como ensinar, de Zabala (1988) e Os elementos, de Euclides (2009).

Com base nos dados da revisão bibliográfica, foram desenvolvidas propostas de sequências didáticas estruturadas para integrar o Algoritmo de Euclides ao ensino da divisibilidade de forma dinâmica e significativa. Além disso, as sequências de propostas didáticas foram divididas em dois blocos: a primeira apresenta como subtítulo “uma abordagem para o ensino do Algoritmo de Euclides”, a segunda apresenta como subtítulo “cálculo do mdc e O Problema dos Três Marinheiros, de Tahan (2013). As propostas têm como intencionalidade apresentar o Algoritmo de Euclides nas resoluções de problemas envolvendo a divisão, o mdc, O Problema dos Três Marinheiros e a importância do resto como base na narrativa da história.

Essa metodologia, fundamentada em um ciclo interativo, busca contribuir não apenas para o ensino da matemática, mas também para o avanço da Educação Matemática, integrando teoria e prática de forma consistente e inovadora. Ao longo do processo, as decisões foram orientadas por princípios de rigor acadêmico e relevância prática, de modo a assegurar que os resultados obtidos tenham impacto direto no contexto educacional.

Para tanto, o primeiro capítulo apresenta de forma breve os objetivos norteadores desse estudo, bem como a metodologia adotada e a justificativa, apresentando, introdutoriamente, o problema e o caminho utilizado para solucioná-lo, baseando-se na análise do Algoritmo de Euclides. Já o segundo capítulo apresenta o contexto histórico, um breve passeio pela História da Matemática com destaque para a construção histórica da divisão, partindo da Antiguidade até os dias atuais. Ademais, o capítulo compreende, concisamente, algumas observações sobre Euclides, também conhecido como Euclides de Alexandria, e sua obra de maior destaque, Os Elementos, enfatizando o Livro VII. No terceiro capítulo, será apresentada a Divisibilidade

entre inteiros, na sequência, o Algoritmo de Euclides e o Máximo Divisor Comum, destacando diferentes métodos para o seu desenvolvimento. Este capítulo utiliza uma linguagem de rigor matemático, composto por definições, teoremas, proposições, lema, propriedades, seguidos de suas respectivas demonstrações mais importantes.

O quarto capítulo engloba as sequências de propostas didáticas que visam à aplicabilidade da resolução de problemas envolvendo a Divisibilidade, o mdc e o Problema dos Três Marinheiros com a abordagem do Algoritmo de Euclides, objetivando que os alunos os compreendam de modo satisfatório. Por fim, o quinto e último capítulo apresenta a conclusão desse estudo, a importância de uma contextualização de teorias fundamentadas nos teoremas que são, por vezes, trabalhadas superficialmente no cotidiano da sala de aula.

Mediante ao exposto, esta dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT, justifica-se tendo em vista seu teor fundamental na necessidade de propor ao docente uma abordagem que fuja do tradicional em uma prática mais significativa e envolvente. Ao utilizar o Algoritmo de Euclides no contexto dos anos finais do Ensino Fundamental, este trabalho pretende apresentar estratégias baseadas em algoritmos clássicos que podem não apenas facilitar a compreensão da Divisibilidade, mas também despertar nos alunos o interesse pela matemática e suas aplicações históricas e práticas.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO

A Matemática possui uma relação intrínseca com a evolução humana e, com relação aos dados históricos que enfatizam essa relação, o Algoritmo de Euclides tem um papel fundamental. Contudo, até se formalizar a teoria do Algoritmo, os preceitos possuem fonte nos métodos egípcios e babilônicos. É por isso que, em um trabalho como este dar luz à História da Matemática se faz importante, pois entender as origens e a evolução de um determinado assunto pode facilitar a sua compreensão, tornando-o mais interessante. Além disso, essa abordagem ajuda a entender que a matemática não é imutável, acabada, mas uma construção que se iniciou por homens e que continua sendo feita por eles como já defendia Carl B. Boyer (1968).<sup>1</sup>

Entendendo a matemática como uma das disciplinas mais antigas e fundamentais da evolução civilizatória, sua história induz-se marcada por revoluções conceituais, intercâmbios culturais e a persistente busca por padrões e verdades universais. Para tanto, Boyer (1974), em sua obra seminal “History of Mathematics”, argumenta que a matemática não é uma descoberta de verdades imutáveis, mas uma criação humana, influenciada por contextos culturais, necessidades práticas e abstrações intelectuais. Para ele, a matemática evoluiu de forma não linear, com contribuições de diferentes civilizações, dos babilônios e egípcios aos gregos, árabes e europeus. Nessa perspectiva, destacava que a matemática antiga estava ligada aos problemas concretos (como medição de terras e astronomia), que os gregos introduziram a abstração e a prova rigorosa, com figuras como Euclides e Arquimedes, que o período medieval viu a preservação e expansão do conhecimento por estudiosos islâmicos, como Al-Khwarizmi e que a Revolução Científica trouxe novas ferramentas, como o cálculo de Newton e Leibniz.

Os matemáticos do século XXI desempenham uma atividade intelectual destacável, mas é importante reconhecer que todo o conhecimento atual é fruto das construções do passado, fazendo-se imprescindível, principalmente no atual cenário que a matemática se encontra na educação básica, em que os dados apontam um alto déficit de aprendizagem entre os jovens, com menos de 50% dos alunos dominando o básico da área de matemática e ciências, segundo o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), destacado por Pimentel (2023). Diante disso, torna-se essencial buscar caminhos para possíveis soluções. É claro que, embora existam métodos que auxiliam, há aqueles que seu anacronismo tende a perpetuar mitos e lendas para o ensino.

Roque (2012), propõe uma abordagem crítica, contextualizando as práticas matemáticas dentro de seus ambientes culturais, sociais e filosóficos, evitando anacronismos e destacando a diversidade da matemática ao longo da história. O autor questiona a visão tradicional da matemática como um saber unificado e linear, destacando que muitas narrativas históricas são baseadas em mitos e generalizações, fazendo-se importante entender as práticas matemáticas em

---

<sup>1</sup> História da Matemática é uma obra de Carl Boyer publicada inicialmente em 1968.

seu contexto original, sem projetar conceitos modernos sobre o passado. Ao traçar um percurso que vai da Mesopotâmia até os dias atuais, Roque oferece uma perspectiva renovada do ensino da matemática, voltada a professores e estudantes, que vai além da simples memorização de fórmulas e teoremas.

Para isso, este capítulo, seguirá um percurso investigativo com o panorama histórico da operação de divisão, descrevendo como ela era realizada antes do surgimento do algoritmo atualmente utilizado. Em seguida, o capítulo dará destaque a alguns pontos sobre Euclides e uma de suas obras conhecida como uma das mais importantes da matemática, Os Elementos. Dessa forma, a compreensão em torno da importância do processo da divisibilidade contribuirá para alcançar o objetivo geral deste estudo.

## 2.1 O Panorama Histórico da Operação de Divisão

A divisão, assim como outras operações da matemática, está presente na sociedade desde as primeiras civilizações, desempenhando um papel importante nas atividades cotidianas. Como afirma Boyer (1974), a matemática, de modo geral, sempre esteve relacionada à observação da natureza. O autor ainda acrescenta que esse vínculo contribuiu para o desenvolvimento de conceitos fundamentais, como o conceito de número e, conseqüentemente, o de divisão.

É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico de 'sobrevivência do mais apto', a persistência da raça humana, provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos. (Boyer, 1974, p.01)

Esse entendimento permite que as operações, incluindo a divisão, demonstrem seu valor em diferentes períodos da história da humanidade.

Na Antiguidade, os egípcios (3000 a.C.) tinham a adição como operação aritmética fundamental, mas, no tempo de Ahmes, passaram a utilizar frações unitárias (do tipo  $1/n$ ) para representar divisões, realizadas por meio de somas sucessivas dessas frações, como se verifica no Papiro Rhind (Figura 2.1), um dos registros matemáticos mais antigos que se conhece.

**Figura 2.1** – Papiro Rhind ou Ahmes



**Fonte:** Eves (2011)

Para ser mais preciso, conforme Roque (2012),

a divisão egípcia consistia em um procedimento realizado em etapas. Por exemplo, se quisermos distribuir 58 coisas por 87 pessoas teremos de dividir primeiramente cada coisa em dois, obtendo  $116 (= 58 \cdot 2)$  metades. Daremos, então, uma metade para cada pessoa, restando  $29 (= 116 - 87)$  metades. Em seguida, dividiremos cada metade por três, obtendo  $87 (= 29 \cdot 3)$  metades divididas por três, ou seja, 87 sextos. O resultado é quanto cada um vai receber do todo, e esse raciocínio está expresso na representação egípcia de  $\frac{58}{87}$  como  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ . A vantagem do sistema egípcio em relação ao nosso é que podemos comparar frações mais facilmente. Por exemplo, se quisermos saber, em nossa representação, qual a maior de duas frações teremos de igualar os denominadores. Na representação egípcia, uma inspeção direta permite dizer qual a maior das duas frações, uma vez que cada uma é dada por uma soma de frações com numerador 1. (Roque, 2012, n.p)

Ainda segundo a autora, sobre o processo de divisão egípcia era realizado por meio de operações multiplicativas. Como o exemplificado abaixo

Da mesma forma que as multiplicações, as divisões eram efetuadas por uma sucessão de duplicações. Para dividir, por exemplo, 184 por 8, começamos por dobrar sucessivamente o divisor 8 até um passo antes que o número de duplicações exceda o dividendo 184:

|       |    |      |
|-------|----|------|
|       | 1  | \8   |
|       | 2  | \16  |
|       | 4  | \32  |
| Total | 8  | 64   |
|       | 16 | \128 |
|       | 23 | 184  |

Escolhemos, na coluna da direita, os termos que, somados, dão o resultado  $184 = 128 + 32 + 16 + 8$ . Tomamos os valores correspondentes na coluna da esquerda e somamos:  $1 + 2 + 4 + 16 = 23$ . Logo, o resultado da divisão de 184 por 8 é 23. E se fosse 185? O resultado seria 23 e  $\frac{1}{8}$ . E se fosse 189? Seria 23 mais  $\frac{1}{2}$  mais  $\frac{1}{8}$ . Ou seja, a representação egípcia de frações faz com que a divisão não exata seja bastante simples. (Roque, 2012, n.p)

Na citação acima, o processo de divisão é realizado por meio de duas colunas. Na coluna da esquerda, indica-se o número de vezes que o divisor, 8, está sendo multiplicado, a duplicação dos valores representa a multiplicação sucessiva por 2, repetida até alcançar um valor próximo ao dividendo (neste caso, 184), sem ultrapassá-lo. Já a coluna da direita mostra o resultado dessas multiplicações. Os valores dessa coluna que estão marcados com uma barra indicam quantas vezes o número 8 cabe em 184, permitindo assim obter o quociente 23, com resto zero.

Já os Babilônios (2000 a.C.), localizados na Mesopotâmia, utilizavam um sistema sexagesimal, com técnicas eficientes para multiplicação e divisão. Eles possuíam tabletes, o mais famoso dele a placa de argila Plimpton 322, Figura 2.2, semelhantes às nossas tabuadas, usados para realizar diferentes operações tais como: as multiplicações, quadrados, raízes quadradas, cubos, raízes cúbicas etc. Em relação às multiplicações, seu uso era fundamental. Já as divisões eram facilitadas pelo uso de tabletes recíprocos, que continham os valores correspondentes a  $1 \div N$ . No entanto, para os babilônios, esse valor não correspondia exatamente ao inverso de  $N$ , pois não estava vinculado ao conceito de fração como o compreendemos atualmente. Ainda

assim, essa abordagem permitia que as divisões fossem realizadas com mais agilidade, entendidas como operações inversas da multiplicação.

**Figura 2.2** – O tablete Plimpton 322



**Fonte:** Roque (2012)

Portanto, de acordo com Roque (2012), o procedimento de divisão utilizado pelos babilônios mostra que a utilização dos tabletes não servia apenas para a memorização, mas desempenhavam um papel essencial na compreensão da operação. Em linhas gerias, este método fez com que

o procedimento de divisão empregado pelos babilônios nos leva a concluir que a utilização dos tabletes, nesse caso, não servia apenas à memorização de tabuadas, o que seria um papel acessório. Para que a técnica adotada na divisão fosse rigorosa, devia haver uma necessidade intrínseca de se representar em tabletes as divisões por números cujos inversos não possuem representação finita em base 60. Isso porque, no caso de  $\frac{1}{N}$  não possuir representação finita, o resultado da divisão de  $M$  por  $N$  teria de estar registrado em um tablete. Se essa operação fosse realizada pelo procedimento usual, ou seja, multiplicando-se  $M$  por  $\frac{1}{N}$ , o resultado obtido não seria correto, da mesma forma que não seria correto fazer  $6 \cdot 0,3333 \dots (=)$  para dividir 6 por 3. (Roque, 2012, p.n)

Na Matemática Islâmica (séc. VIII – XIII) matemáticos, como Al-Khwarizmi, desenvolveram métodos algébricos para resolver equações envolvendo a divisão. Além disso, traduziram e preservaram textos gregos e indianos, além de desenvolver notações mais sistemáticas. Já na Índia, o sistema de numeração decimal foi desenvolvido e a divisão longa foi documentada por matemáticos como Aryabhata e Brahmagupta. Nesse período, a ideia de zero como número e como divisor começou a ser explorada. Essa relação se explica porque

o sistema de numeração hindu-arábico, incluindo o conceito de zero como número, atingiu sua maturidade na Índia e foi transmitido ao mundo islâmico, onde estudiosos como Al-Khwarizmi desenvolveram procedimentos sistemáticos para a aritmética e a álgebra, incluindo operações envolvendo a divisão. (Boyer, 1974, p.206)

No Renascimento e na Idade Moderna, a introdução da imprensa ajudou a disseminar métodos padronizados de divisão, como a divisão longa (também chamada de algoritmo da chave ou divisão em colunas). Ademais, os símbolos matemáticos modernos começaram a se consolidar, incluindo a barra de fração (“/”) e o símbolo  $\div$ . Sobre isso, Boyer (1974) afirma que a difusão em larga escala de manuais aritméticos e algébricos no século XV, como por exemplo o Treviso Arithmetic, estão por trás dessa disseminação. O Treviso Arithmetic (publicado por volta

de 1478) foi um dos primeiros livros práticos de aritmética, impressos na Itália, promovendo divisões longas entre leitores leigos e comerciantes. E foi justamente a repercussão de manuais como esse que consolidou os símbolos matemáticos modernos, por exemplo, os que simbolizam as operações.

Nos Séculos XIX e XX houve a formalização da teoria dos números e a expansão do conceito de divisão para outros conjuntos numéricos (números racionais, reais, complexos, etc.) e a divisão por zero foi tratada mais formalmente como indefinida dentro da aritmética clássica. O conceito de divisão algébrica (em polinômios, por exemplo) também se desenvolveu bastante nesse período. Tal avanço, historicamente, foi impulsionado pela Revolução Industrial que começou ainda no século XVIII e se espalhou por todo o continente europeu se estendendo pela América no século XIX.

Sobre esse momento histórico para a matemática, Eves (2011) explica que entre as mudanças ocasionadas por esse contexto nesse período, “o progresso tecnológico rápido desencadeou uma era de investigações científicas sem precedentes, especialmente na mecânica e na química”. Dessa maneira, estudos de vários matemáticos começaram a ser amplamente colocados em prática em várias frentes, como os de Carl Friedrich Gauss (1777–1855), considerado príncipe da matemática, que sistematizou a teoria dos números, geometria, probabilidade e a teoria dos mínimos quadrados; os de Niels Henrik Abel (1802 – 1829) e Évariste Galois (1811-1832) que abriram caminho na teoria das equações, grupos, e impulsionaram grandes avanços na álgebra abstrata; Charles Hermite (1822–1901) que contribuiu para a teoria dos números, funções elípticas e demonstrou técnicas que culminaram na prova da transcendência do  $\pi$  e de Jacques Hadamard (1865–1963) que trabalhou em teoria de números, equações diferenciais e desenvolvimento do método do número primo.

Hoje, a divisão é ensinada desde os primeiros anos escolares com diferentes algoritmos (divisão longa, divisão por estimativa, divisão com material concreto). Em matemática avançada, o conceito de divisão se expande para grupos, anéis, corpos e outras estruturas algébricas. Associados a esses avanços, a computação trouxe novas formas de pensar a divisão, usando algoritmos eficientes e operações binárias.

Apesar desse percurso dado para a análise histórica da matemática, faz-se necessário destacar, neste momento, a importância de Euclides de Alexandria, que teve sua contribuição para a matemática bem antes que os matemáticos dos séculos seguintes depois de Cristo, como gancho para a discussão desta pesquisa. Isso porque o estudo de Euclides se mantém como um legado para estudos que fazem uso da operação da divisão.

## 2.2 Euclides e sua obra: Os Elementos

Conhecido como Euclides de Alexandria por ter se dirigido a essa cidade com o propósito de ensinar matemática, pouco se sabe sobre sua vida pessoal. Aliás, as informações encontradas ficam muito aquém do que se tem sobre sua laboriosa produção. Talvez, como se observa no

estudo histórico de Boyer (1974), essa ausência de dados biográficos pode estar relacionada ao fato de sua existência ter sido fortemente marcada pelo trabalho dedicado à sistematização da geometria. Sobre esse aspecto introdutório, o autor observa: “da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na própria Academia. [...] Euclides e Os Elementos são frequentemente considerados sinônimos” (BOYER, 1974, p.74).

Partindo, especificamente, para o que se comentou sobre a obra euclidiana, Roque (2012) discorre que há quem considera possuir uma semelhança entre Euclides e Pitágoras.

Ainda que diversos resultados geométricos encontrados nos Elementos de Euclides sejam atribuídos a Pitágoras, deve-se ter cuidado ao inferir que o conhecimento geométrico da escola pitagórica é semelhante ao descrito por Euclides. Ao que parece, a matemática pitagórica possuía um caráter bem mais concreto. Apesar de ser inseparável do ideal filosófico de explicar o mundo por meio de números, os números pitagóricos não eram entidades abstratas (Roque, 2012, n.p)

A relação entre Euclides e Pitágoras evidencia uma continuidade e sistematização no desenvolvimento da matemática grega. Embora separados por cerca de dois séculos, Pitágoras viveu no século VI a.C. e Euclides no século III a.C., seus pensamentos estão profundamente conectados, sobretudo no que diz respeito à aritmética, à geometria e à concepção filosófica dos números. Com Euclides, é possível perceber uma consolidação desse legado pitagórico, ao transformar o conhecimento matemático em um corpo sistemático, fundamentado em bases lógicas e dedutivas.

Aprofundando-se na investigação da obra Os Elementos, na versão de 2009 traduzida por Irineu Bicudo, compreende-se por que ela é considerada uma das mais influentes produções matemáticas da Antiguidade e uma base fundamental da matemática. Por meio dessa obra, evidencia-se a contribuição euclidiana, como a formulação do famoso algoritmo que leva seu nome para a resolução de problemas específicos da aritmética, além da demonstração de como lidar com o infinito em suas diversas manifestações. Como afirma a própria obra: “o famoso algoritmo que leva o seu nome para a solução de problemas específicos na aritmética e mostrou-nos como dominar o infinito nas suas várias manifestações” Euclides (2009).

A obra é composta por 13 livros que abrangem geometria, aritmética e teoria das proporções. Ela é estruturada de forma axiomática, partindo de definições, postulados e noções comuns para demonstrar proposições de modo lógico e sistemático. Em resumo, o texto destaca em sua parte introdutória a importância da matemática grega e sua evolução a partir de conhecimentos egípcios e babilônicos, com ênfase na transição do empirismo para a dedução lógica.

A versão adotada aqui neste estudo optou por uma tradução literal, seguindo o texto grego de Heiberg-Stamatis, com o objetivo de preservar a precisão euclidiana, evitando redundâncias. Por exemplo, substitui expressões como “o quadrado sobre a reta AB” por “o sobre a AB” para maior economia linguística. A obra é dividida em livros temáticos, como o Livro I (geometria plana), Livro V (teoria das proporções) e Livro XIII (poliedros regulares).

Agora, sem menosprezar os doze livros do autor, a pesquisa tem como ênfase o Livro VII, uma vez que ele contempla o objetivo geral do estudo, que tem como foco a compreensão do Algoritmo de Euclides no contexto da divisibilidade.

### 2.2.1 Livro VII: O Algoritmo de Euclides para o processo da divisibilidade

O Livro VII dos Elementos de Euclides (2009) inaugura a parte aritmética da obra e estabelece uma estrutura axiomática-dedutiva para o estudo dos números inteiros positivos. A partir de definições iniciais, como por exemplo unidade, número, par, ímpar, número primo e número composto, o livro organiza uma sequência de proposições que desenvolve, de forma sistemática, propriedades fundamentais da teoria dos números. O tratamento dado aos conceitos aritméticos baseia-se na noção de medida e proporção, em consonância com o pensamento geométrico dos gregos antigos, sem recorrer à simbologia algébrica moderna. Entre as contribuições centrais do Livro VII está a formulação do Algoritmo de Euclides para a determinar o máximo divisor comum (mdc), apresentado como um processo lógico de subtrações sucessivas. Essa construção revela o compromisso euclidiano com uma matemática de caráter universal, orientada pela clareza conceitual e pela dedução rigorosa, e cuja influência é perceptível até os fundamentos da aritmética contemporânea.

O Algoritmo de Euclides, apresentado no Livro VII dos Elementos (séc. III a.C.), é uma das contribuições mais duradouras da matemática grega. Embora já fosse conhecido por matemáticos babilônios e egípcios de maneira empírica, foi Euclides quem deu a esse método uma forma dedutiva, geométrica e rigorosa, inserindo-o num sistema axiomático. O método foi desenvolvido e é usado comumente para determinar o mdc entre dois números naturais, baseando-se na ideia de que de que o divisor comum de dois números será o último resto diferente de zero.

A importância do algoritmo transcende o simples cálculo. Ele simboliza o espírito da matemática clássica: reduzir o complexo ao simples por meio da razão e da ordem, uma operação que também é filosófica. Outrossim, o Livro VII apresenta inicialmente a matematização das operações com números inteiros, servindo de base para a construção futura da aritmética modular, álgebra elementar e da teoria dos números. No próximo capítulo será desenvolvida, por meio de definições, teoremas, proposições e lemas, toda a base teórica necessária para o estudo da divisibilidade e do máximo divisor comum, fundamentado no Algoritmo de Euclides.

## 3 ALGORITMO DE EUCLIDES E O MÉTODO DAS DIVISÕES SUCESSIVAS

Inicia-se este capítulo partindo do pressuposto de que o leitor já tenha conhecimento de toda construção dos números naturais (com base nos Axiomas de Peano) e a dos números inteiros. Essas construções podem ser encontradas em diversas referências clássicas da literatura e dissertações de mestrado tais como: Caixeta (2016), Morgado e Carvalho (2015), Vieira e Carvalho (2020). No decorrer deste capítulo, serão abordados definições, teoremas, proposições, propriedades e lemas sobre Divisibilidade, Algoritmo da Divisão, conhecido também como Algoritmo da Divisão Euclidiana ou Algoritmo de Euclides (denominação que adotaremos no decorrer dos capítulos), os quais são fundamentados por meio das seguintes referências: Caixeta (2016), Domingues e Iezzi (2003), Hefez (2016), Morgado e Carvalho (2015) e Vieira e Carvalho (2020).

### 3.1 Divisibilidade

Nesta seção, será apresentada a relação de divisibilidade entre dois inteiros que nem sempre pode ser diretamente estabelecida. No entanto, por meio do Algoritmo de Euclides, tema que será aprofundado na próxima seção deste capítulo, essa divisão torna-se possível de ser realizada.

**Definição 3.1** *Dados  $a$  e  $b$  dois números inteiros, com  $a \neq 0$ , dizemos que  $a$  divide  $b$  (ou, equivalentemente, que  $b$  é múltiplo de  $a$ ) se existir um número inteiro  $c \in \mathbb{Z}$  tal que:*

$$b = ac.$$

O contrário dessa definição ocorre quando  $a$  não divide  $b$ , o que representamos por  $a \nmid b$ .

**Exemplo 3.1** Temos que  $3 \mid 15$ , pois existe um número inteiro  $c = 5$  tal que  $15 = 3 \times 5$ .

**Exemplo 3.2** Temos que 3 não divide 22, pois não existe inteiro  $c \in \mathbb{Z}$  satisfazendo a igualdade:  $22 = 3 \times c$ .

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades de divisibilidade.

**Proposição 3.1** Dados  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , temos que:

- (a)  $1 \mid a$ ,  $a \mid 0$  e  $a \mid a$ .
- (b)  $a \mid b$  se, e somente se,  $|a| \mid |b|$ .

- (c)  $0 \mid a$  se, e somente se,  $a = 0$ .
- (d) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ .
- (e) Se  $a \mid b$  e  $c \mid d$ , então  $a \cdot c \mid b \cdot d$ .
- (f) Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então  $a \mid (b - c)$ .
- (g) Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então  $a \mid (b + c)$ .
- (h) Se  $a \mid b$ , então para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , tem-se que  $a \mid m \cdot b$ .
- (i) Se  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  são tais que  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então, para todos  $f, g \in \mathbb{Z}$ , tem-se que  $a \mid (f \cdot b + g \cdot c)$ .
- (j) Sendo  $a, b \in \mathbb{Z}$ , onde  $b \neq 0$  temos que:  $a \mid b \implies |a| \leq |b|$

**Demonstração:** Os itens (e), (g) e (h) ficarão a cargo do leitor. Provaremos o restante ou referenciaremos a sua demonstração.

- (a) Temos que  $1 \mid a$ , pois existe um inteiro  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = c \cdot 1$ . Basta tomar  $c = a$ , portanto,  $a = a \cdot 1$ . De modo análogo, destaca-se que  $a \mid 0$  uma vez que  $0 = 0 \cdot a$ . E ainda  $a \mid a$ , pois  $a = 1 \cdot a$ . ■
- (b) Queremos mostrar que

$$a \mid b \quad \text{se, e somente se,} \quad |a| \mid |b|.$$

$\Rightarrow$  Supondo que  $a \mid b$  e aplicando a Definição 3.1, tem-se que existe  $c \in \mathbb{Z}$  tal que

$$b = a \cdot c. \tag{3.1}$$

Agora, aplicando o módulo em ambos os lados da igualdade 3.1, obtém-se

$$|b| = |a \cdot c| = |a| \cdot |c|,$$

como  $|c| \in \mathbb{N}$ , portanto,  $|a| \mid |b|$ .

$\Leftarrow$  Sabendo que  $a = \pm|a|$  e  $b = \pm|b|$ . Logo, podemos escrever:

$$b = \varepsilon_1 |b| = \varepsilon_1 (|a| \cdot m) = (\varepsilon_1 \cdot m) \cdot |a|,$$

com  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ , tornando  $k = \varepsilon_1 \cdot m$ , temos que

$$b = a \cdot k,$$

já que  $a = \varepsilon_2 |a|$ .

Assim,  $a \mid b$ .

Conclui-se

$$a \mid b \iff |a| \mid |b|.$$

■

(c) A demonstração deste item pode ser consultada em Hefez (2016).

(d) Iremos mostrar que, se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ . De fato, como  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , existem  $k', k'' \in \mathbb{Z}$  tais que:

$$b = a \cdot k' \tag{3.2}$$

$$c = b \cdot k''. \tag{3.3}$$

Substituindo o valor de  $b$  da equação (3.2) em (3.3), tem-se

$$c = a \cdot k' \cdot k'' = a \cdot (k' \cdot k'') = a \cdot k'''.$$

Onde  $k''' = k' \cdot k'' \in \mathbb{Z}$ . Com isso, podemos concluir que  $c$  é múltiplo de  $a$ , portanto

$$a \mid c.$$

■

(f) A prova deste item segue diretamente do item (i), tomando  $f = 1$  e  $g = -1$ . ■

(i) Aqui, deseja-se mostrar que, se  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então, para todos  $f, g \in \mathbb{Z}$ , tem-se que  $a \mid (f \cdot b + g \cdot c)$ .

Pela Definição 3.1, existem  $k, k' \in \mathbb{Z}$  tais que  $b = a \cdot k$  e  $c = a \cdot k'$ . Então,

$$b \cdot f + c \cdot g = a \cdot k \cdot f + a \cdot k' \cdot g = a \cdot (k \cdot f + k' \cdot g),$$

$$a \mid (f \cdot b + g \cdot c).$$

■

(j) Pela Definição 3.1, existe  $c \in \mathbb{Z}$ , tal que:

$$b = a \cdot c.$$

Tomando o valor absoluto em ambos os lados da igualdade, segue que

$$|b| = |a| \cdot |c|$$

Sendo  $b \neq 0$ , então  $c \neq 0$ , portando  $1 \leq |c|$ , e, dessa forma,

$$|a| \leq |a| \cdot |c| = |b|.$$

■

Um fato interessante que decorre diretamente de algumas das propriedades vistas acima sobre a relação de divisibilidade é que ela define uma relação de ordem no conjunto  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , no seguinte sentido:

- (I)  $\forall a \in \mathbb{N}, a \mid a$ . (reflexividade);
- (II)  $\forall a, b \in \mathbb{N}$ ; se  $a \mid b$  e  $b \mid a$ , então  $a = b$ . (antissimétrica);
- (III)  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$  se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ . (transitividade).

No entanto, no conjunto  $\mathbb{Z}$ , a divisibilidade não estabelece uma relação de ordem. Sendo ela presente, nos números inteiros, reflexiva e transitiva, porém não é antissimétrica. Para exemplificar, temos:  $-5 \mid 5$  e  $5 \mid -5$ , no entanto  $-5 \neq 5$ .

Para mais detalhes sobre relação de ordem, veja, por exemplo, Vieira e Carvalho (2020).

## 3.2 Algoritmo de Euclides

O tema explorado nesta seção remonta a cerca de 300 a.C., no Livro VII de Euclides (2009). Ainda que não esteja formulada de modo explícito na obra, já se percebe ali a preocupação em compreender quando um inteiro  $b \neq 0$  não divide exatamente outro inteiro  $a$ .

Todavia, antes de enunciar o Algoritmo de Euclides, é necessário apresentar um princípio fundamental que pertence apenas ao conjunto dos números inteiros: o Princípio da Boa Ordenação.

Dizemos que um subconjunto  $A \subset \mathbb{Z}$  não vazio é limitado inferiormente quando existe  $b \in \mathbb{Z}$  tal que  $b \leq x$  para todo  $x \in A$ . Neste caso, chamamos  $b$  de cota inferior do conjunto  $A$ .

**Axioma 3.1 (Princípio da Boa Ordenação)** *Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$  limitado inferiormente. Então,  $A$  possui uma cota inferior.*

Um exemplo natural de conjunto limitado inferiormente nos inteiros é o conjunto dos números naturais,  $\mathbb{N}$ . Note que, pelo Princípio da Boa Ordenação,  $\mathbb{N}$  admite uma cota inferior, a saber o número 0. Tomando o subconjunto finito  $B$  formado pelos elementos:  $b_1 = 4, b_2 = 2, b_3 = 5, b_4 = 6, b_5 = 1$  e  $b_6 = 3$ , tem-se como menor elemento (cota inferior)  $b_5$ .

A partir desse axioma, é possível mostrar que não existe inteiro entre 0 e 1.

**Lema 3.1** Se  $a \in \mathbb{Z}$  e  $0 < a \leq 1$ , então  $a = 1$ .

**Demonstração:** Tomemos o seguinte conjunto:

$$B = \{b \in \mathbb{Z} : 0 < b \leq 1\}.$$

Note que  $B \neq \emptyset$ , pois  $a \in \mathbb{Z}$  e  $0 < a \leq 1$  por hipótese. Além disso,  $B$  é limitado inferiormente por 0. Logo, pelo Axioma 3.1,  $B$  possui uma cota inferior, chamemos de  $y$ . Supondo, por absurdo, que  $0 < y < 1$ , multipliquemos a desigualdade por  $y$ , obtendo

$$0 < y^2 < y < 1.$$

Assim, temos que  $y^2 \in B$ . No entanto, isso contradiz o fato de que  $y$  é o elemento mínimo de  $B$ , contradizendo assim a hipótese. Portanto, essa suposição é incorreta e conclui-se que  $y = 1$ . Como  $1 = y \leq a \leq 1$ , segue que

$$a = 1.$$

■

**Lema 3.2** Dado  $n \in \mathbb{Z}$ , não existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $n < m < n + 1$  (em outras palavras, não existe inteiro entre dois consecutivos).

**Demonstração.** Suponha, por absurdo, que exista um inteiro  $m$  satisfazendo as desigualdades  $n < m < n + 1$ , subtraindo  $n$  nas desigualdades, tem-se que:  $n - n < m - n < n + 1 - n$ , assim temos  $0 < m - n < 1$ , logo pelo Lema 3.1, contradiz a proposição. Portanto fica provado que não existe número  $\mathbb{Z}$  entre dois consecutivos.

O próximo resultado, o Teorema da Divisão Euclidiana, também conhecido como Algoritmo de Euclides, é uma consequência do Axioma 3.1. Antes de apresentá-lo, é importante destacar sua relevância para a aritmética.

Desde a Grécia Antiga, por volta de 300 a.C., Euclides já descrevia procedimentos para lidar com a divisão entre números inteiros, mesmo nos casos em que a divisão de um inteiro por outro nem sempre era possível.

Este resultado mostra que, para quaisquer inteiros, existe uma forma única de expressar a relação de divisão, estabelecendo uma estrutura clara para esse tipo de operação. Essa ideia é a base de métodos importantes, como o Método das Divisões Sucessivas, para determinar o máximo divisor comum de dois números.

Apesar da sua simplicidade, o Teorema da Divisão Euclidiana é considerado um resultado central da teoria da divisibilidade.

**Teorema 3.1 (Teorema da Divisão Euclidiana)** *Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros com  $a \neq 0$ . Existem dois únicos números inteiros  $q$  e  $r$  tais que*

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < |a|.$$

**Demonstração:** Vamos considerar o seguinte conjunto:

$$B = \{b - ay : y \in \mathbb{Z}, b - ay \geq 0\}.$$

Vamos provar a existência de  $q$  e  $r$ . Pela propriedade Arquimediana<sup>1</sup>, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-a) > -b$ , ou seja,  $b - an \geq 0$ , o que mostra que o conjunto  $B$  é não vazio. Como  $B$  é limitado inferiormente por zero, pelo Axioma 3.1, o conjunto  $B$  admite um menor elemento, digamos  $r = \min B$ . Como  $r \in B$ , podemos escrevê-lo da seguinte forma:  $r = b - aq \geq 0$  para algum  $q \in \mathbb{Z}$ .

Agora, vamos mostrar que  $r < |a|$ . Suponha, por contradição, que  $r \geq |a|$ . Tem-se que  $r = |a| + t$  para algum  $t \in \mathbb{N}$ . Sendo  $a \neq 0$ , segue que  $0 \leq t < r$ . Porém, note-se que  $t = r - |a| = (b - aq) - |a| = b - a(q \pm 1) \in B$ , o que mostra que  $t \in B$ , contradizendo o fato de que  $r$  é o menor elemento de  $B$ . Portanto,  $r < |a|$ .

Para provar a unicidade, suponha que existam  $q, \tilde{q}, r, \tilde{r} \in \mathbb{Z}$  tais que

$$b = aq + r = a\tilde{q} + \tilde{r},$$

sendo  $0 \leq r < |a|$  e  $0 \leq \tilde{r} < |a|$ . Assim,  $-|a| < -r \leq \tilde{r} - r \leq \tilde{r} < |a|$ . Dessa desigualdade, concluímos que  $|\tilde{r} - r| < |a|$ . Como  $aq + r = a\tilde{q} + \tilde{r}$ , obtemos  $aq - a\tilde{q} = \tilde{r} - r$ , ou seja,  $a \cdot (q - \tilde{q}) = \tilde{r} - r$ . Segue daí que

$$|a| \cdot |q - \tilde{q}| = |\tilde{r} - r| < |a|,$$

o que nos leva a concluir que  $|q - \tilde{q}| < 1$ , isto é,  $q = \tilde{q}$ . Portanto,

$$r = \tilde{r}.$$

■

Na divisão Euclidiana de  $b$  por  $a$ , chamamos  $b$  de dividendo,  $a$  de divisor,  $q$  de quociente e  $r$  de resto.

Para melhor compreensão, no exemplo a seguir, vamos usar o Teorema 3.1 para determinar o quociente e o resto da divisão de  $b$  por  $a$ .

### Exemplo 3.3

- i.  $b = 57$  e  $a = 5$ . Temos que  $57 = 5 \cdot 11 + 2$ . Como  $0 < 2 < 5$ , pela unicidade dada pelo Teorema 3.1, tem-se que  $r = 2$  e  $q = 11$ .
- ii.  $b = 5$  e  $a = 8$ . Note que  $5 = 8 \cdot 0 + 5$ . Pelo Teorema 3.1, como  $0 < 5 < 8$ , o resto é igual a  $r = 5$  e o quociente  $q = 0$ .
- iii.  $b = -147$  e  $a = 6$ . Veja que  $-147 = 6 \cdot (-25) + 3$ . Usando o Teorema 3.1, como  $0 < 3 < 6$ , conclui-se que  $q = -25$  e  $r = 3$ .
- iv.  $b = -347$  e  $a = -7$ . Observando que a igualdade  $-354 = (-7) \cdot 51 + 3$  é válida e que  $0 < 3 < |-7|$ , segue do Teorema 3.1 que  $q = -51$  e  $r = 3$ .

<sup>1</sup> Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$ . Então  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $nb > a$ .

v.  $b = 243$  e  $a = -5$ . Como  $243 = (-48) \cdot (-5) + 3$  e  $0 < 3 < |-5|$ , pelo Teorema 3.1, tem-se que  $q = -48$  e  $r = 3$ .

**Exemplo 3.4** Vamos determinar todos os inteiros positivos que, na divisão euclidiana por 5, o quociente é igual ao triplo do resto.

Seja  $m$  um inteiro positivo da forma  $m = 5q + r$ , onde  $q = 3r$ , com  $0 \leq r < 5$ . Segue daí que

$$m = 5 \cdot 3r + r \Rightarrow m = 16r.$$

Como  $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , temos que

$$m = 16 \cdot 0 = 0$$

$$m = 16 \cdot 1 = 16$$

$$m = 16 \cdot 2 = 32$$

$$m = 16 \cdot 3 = 48$$

$$m = 16 \cdot 4 = 64.$$

Portanto,  $m \in \{0, 16, 32, 48, 64\}$ .

### 3.3 Máximo Divisor Comum (mdc)

Nesta seção, abordaremos uma aplicação fundamental do Algoritmo de Euclides: a determinação do máximo divisor comum (mdc) entre dois números inteiros. Serão apresentados dois métodos para esse cálculo: a decomposição em fatores primos, que consiste em expressar os números como produtos de primos e identificar os fatores comuns; e o método das divisões sucessivas, uma técnica eficiente baseada na repetição da Divisão Euclidiana. Além disso, discutiremos alguns resultados teóricos que auxiliam na resolução de problemas envolvendo divisibilidade, reforçando a importância do mdc no estudo da Aritmética

**Definição 3.2 (Divisor Comum)** *Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$  quaisquer, dizemos que um número  $d \in \mathbb{Z}$  é divisor comum de  $a$  e  $b$  se ele divide ambos, ou seja,  $d|a$  e  $d|b$ .*

**Exemplo 3.5** Sejam os inteiros  $a = 25$  e  $b = 40$ . Os divisores de 25 são  $\pm 1, \pm 5, \pm 25$  e os divisores de 40 são  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40$ . Segue que os divisores comuns de 25 e 40 são  $\pm 1$  e  $\pm 5$ .

**Definição 3.3 (Máximo Divisor Comum)** *Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ , não simultaneamente nulos, e seja  $d \in \mathbb{Z}$  com  $d \geq 0$ . Dizemos que  $d$  é o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ , denotado por  $\text{mdc}(a, b)$  ou simplesmente por  $(a, b)$ , se satisfaz as seguintes propriedades:*

**Propriedade 3.1**  *$d$  é divisor de  $a$  e  $b$ .*

**Propriedade 3.2** *Se existe  $c$  que divide  $a$  e  $b$ , então  $c|d$ .*

Note que, no Exemplo 3.5, o máximo divisor comum de 25 e 40 é igual a 5, pois o número 5 goza das Propriedades 3.1 e 3.2, ou seja,  $5|25$   $5|40$  e, ainda,  $-1|5$ ,  $1|5$  e  $-5|5$ .

**Lema 3.3** O máximo divisor comum de dois números inteiros é único.

**Demonstração:** Pelas Propriedades 3.1 e 3.2, temos que, se  $d$  e  $d'$  são dois mdc's do mesmo par de números inteiros, então  $d \geq d'$  e  $d' \geq d$  (aqui usamos o item (j) da Proposição 3.1). Por consequência,  $d = d'$ , e, portanto, quando o mdc de dois números inteiros existe, ele é único. ■

Temos que, para os inteiros  $a$  e  $b$  quaisquer:

$$\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,a) = \text{mdc}(-b,a) = \text{mdc}(-b,-a).$$

Portanto, a ordem de dois inteiros  $a$  e  $b$  não interfere no cálculo do seu mdc. Com isso, para determinar o mdc entre  $a$  e  $b$ , basta considerarmos seus valores absolutos.

O próximo lema é chave para determinar o mdc entre dois inteiros quaisquer a partir do Método das Divisões Sucessivas, que veremos com mais detalhes na Seção 3.4.

**Lema 3.4** *Sejam  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ . Se existe  $(a, b - n \cdot a)$ , então  $(a, b)$  existe e*

$$(a, b) = (a, b - n \cdot a).$$

**Demonstração:** Seja  $d = (a, b - n \cdot a)$ . Como  $d|a$  e  $d|(b - n \cdot a)$ , segue que  $d$  divide  $b = b - n \cdot a + n \cdot a$ . Portanto,  $d$  é divisor comum de  $a, b$ . Supondo agora que exista um inteiro  $c$  que é divisor comum de  $a$  e  $b$ . Pelo item (i) da Proposição 3.1,  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b - n \cdot a$  e, portanto,  $c|d$ . Logo,  $d = (a, b)$ .

O teorema a seguir garante a existência do máximo divisor comum (mdc) entre dois inteiros quaisquer e, além disso, assegura que ele pode ser expresso como uma combinação linear desses inteiros. No entanto, sua demonstração não fornece um método prático para o cálculo do mdc. Essa limitação será superada com o uso do Método das Divisões Sucessivas, que, além de confirmar a existência do mdc, apresenta um procedimento sistemático para determiná-lo.

**Teorema 3.2** *Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Então, existem  $f$  e  $g \in \mathbb{Z}$  tais que  $af + bg = \text{mdc}(a, b)$ .*

**Demonstração.** Sem perder a generalidade, podemos supor que  $a > 0$  e  $b > 0$ . Considere o conjunto:

$$\mathbb{Y} = \{af + bg \mid f, g \in \mathbb{Z} \text{ e } af + bg \geq 0\}.$$

Note que  $\mathbb{Y}$  é não vazio, pois  $a + b \in \mathbb{Y}$ , tomando  $f = g = 1$ . Como  $\mathbb{Y}$  é limitado inferiormente por zero, segue do Axioma 3.1 que  $\mathbb{Y}$  possui o menor elemento, que denotaremos por  $d = ah + bj$ ,  $h, j \in \mathbb{Z}$ . Vamos provar que  $d = (a, b)$ . De fato, veja que  $d$  divide todos os elementos de  $\mathbb{Y}$ . Para provar isso, considere  $c \in \mathbb{Y}$  e supondo por absurdo que  $d \nmid c$ , pelo Teorema 3.1, Algoritmo da Divisão Euclidiana, temos que existem inteiros  $q, r$  tais que

$$c = dq + r, \text{ onde } 0 < r < d.$$

Note que

$$c = af + bg \tag{3.4}$$

e

$$d = ah + bj \tag{3.5}$$

para alguns  $f, g, h, j \in \mathbb{Z}$ . Isolando  $r$  e, substituindo os valores das igualdades (3.4) e (3.5), temos

$$r = c - dq = af + bg - (ah + bj)q = a(f - hq) + b(g - jq).$$

Perceba que  $(f - hq), (g - jq) \in \mathbb{Z}$ . Logo  $r \in \mathbb{Y}$  e  $r < d$ , o que é um absurdo, pois  $d$  é o menor elemento de  $\mathbb{Y}$ . Isso mostra que  $d$  divide todos os elementos de  $\mathbb{Y}$ , e, de modo particular,  $d|a$  e  $d|b$ . Agora, dado  $c$  que divide  $a$  e  $b$ , necessariamente, pela igualdade (3.5),  $c$  divide  $d$ . Isso prova que  $d$  é o mdc de  $a$  e  $b$ . ■

Com isso, demonstramos a existência e a unicidade do máximo divisor comum entre dois inteiros quaisquer.

A próxima ideia que será apresentada é um dos conceitos mais importantes da matemática: os números primos. Eles têm um papel essencial na resolução de diversos problemas matemáticos.

Dizemos que dois números inteiros  $a$  e  $b$  serão designados como primos entre si, ou coprimos, quando  $(a, b) = 1$ , ou seja, o número 1 for o único divisor comum positivo de ambos.

**Proposição 3.2** *Dois números inteiros  $a$  e  $b$  são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros  $f$  e  $g$  tais que*

$$af + bg = 1.$$

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Supondo que  $a$  e  $b$  sejam primos entre si, isto é,  $(a, b) = 1$ , pelo Teorema 3.2, existem  $f$  e  $g$  inteiros tais que

$$af + bg = (a, b) = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Agora, suponha que existam  $f$  e  $g$  inteiros tais que

$$af + bg = 1.$$

Considerando  $d = (a, b)$ , então  $d|(af + bg)$  e, por consequência,  $d|1$ , o que mostra que

$$d = 1.$$

Como  $123 \cdot 2 + (-9) \cdot 27 = 3$ , segue do resultado anterior que o  $\text{mdc}(123, 27) \neq 1$ . Por outro lado, escrevendo  $(-13) \cdot (-49) + 12 \cdot (-53) = 1$ , temos que  $\text{mdc}(-49, -53) = 1$ , o que mostra que  $-49$  e  $-53$  são primos entre si. ■

### 3.3.1 O Máximo Divisor Comum a partir da Decomposição em Fatores Primos

Até o momento, vimos que uma maneira de determinar o máximo divisor comum entre inteiros é listar seus divisores e tomar o maior divisor comum. Nesta subseção, apresentaremos outra abordagem para encontrar o mdc, que se baseia na fatoração em números primos. Para isso, é necessário fatorar os inteiros envolvidos, e o mdc será obtido pelo produto dos fatores primos comuns a ambos.

Antes de apresentar o método de resolução do mdc por fatoração em primos, serão enunciados alguns resultados que fundamentam esse procedimento. Algumas demonstrações, no entanto, serão omitidas, podendo ser consultadas, por exemplo, no livro Hefez (2016)

**Teorema 3.3 (Teorema Fundamental da Aritmética)** *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou é escrito de modo único como produto de números primos.*

**Demonstração.** O Teorema 3.3 pode ser encontrada no livro de Hefez (2016) (p.122).

**Teorema 3.4** *Dado um número inteiro  $n \neq 0, 1, -1$ , existem primos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$  tais que*

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

**Demonstração.** Pode ser encontrada no Teorema 3.4 em Hefez (2016) (p.124).

**Proposição 3.3** *Seja  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$  um número natural, em que  $p_1, p_2, \dots, p_r$  são primos e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ . Se  $n'$  é um divisor positivo de  $n$ , então*

$$n' = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r},$$

onde  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$ , são números naturais.

**Demonstração:** Pode ser encontrada na Proposição 3.3 em Hefez (2016) (pp. 124 e 125).

**Teorema 3.5** *Sejam  $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$  e  $b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ . Pondo*

$$\phi_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\},$$

$i = 1, \dots, n$ , tem-se

$$(a, b) = p_1^{\phi_1} \cdot p_2^{\phi_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\phi_n}.$$

**Demonstração:** Pela Proposição 3.3, se  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , então  $c = \pm p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\mu_r}$ , onde  $\mu_r \leq \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ . Logo,

$$c | p_1^{\phi_1} \cdot p_2^{\phi_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\phi_r}.$$

Como  $p_1^{\phi_1} \cdot p_2^{\phi_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\phi_r}$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , segue que  $(a, b) = p_1^{\phi_1} \cdot p_2^{\phi_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\phi_r}$ . ■

**Exemplo 3.6** Calcule o mdc dos inteiros 525 e 150.

Usando o processo de decomposição em fatores primos, temos

$$\begin{array}{r|l}
 525, 150 & 2 \\
 525, 75 & \textcircled{5} \\
 105, 15 & \textcircled{5} \\
 21, 3 & \textcircled{3} \\
 7, 1 & 7 \\
 1, 1 & 
 \end{array}$$

Perceba que os números contornados são os fatores primos comuns na decomposição de 525 e 150. Portanto, o  $\text{mdc}(525, 150) = 5^2 \cdot 3 = 75$ .

**Exemplo 3.7** Determine o mdc de 234 e 2331.

Decompondo 234 e 2331 em fatores primos, tem-se

$$\begin{array}{r|l}
 234, 2331 & 2 \\
 117, 2331 & \textcircled{3} \\
 39, 777 & \textcircled{3} \\
 13, 259 & 7 \\
 13, 37 & 13 \\
 1, 37 & 37 \\
 1, 1 & 
 \end{array}$$

Note que os números destacados na decomposição, ou seja,  $3 \cdot 3 = 3^2$  são os fatores primos comuns de 234 e 2331. Portanto, o  $\text{mdc}(234, 2331) = 3^2 = 9$ .

É possível generalizar a ideia do Máximo Divisor Comum para mais números inteiros, como será feito a seguir.

Dizemos que  $d \in \mathbb{N}$  é o Máximo Divisor Comum (mdc) dos números inteiros  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , não todos nulos, quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- $d$  é divisor comum de  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ .
- Se  $c$  é um divisor comum de  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , então  $c|d$ .

Conforme o resultado a seguir, o mdc existe, é único e será representado por  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ .

**Proposição 3.4** *Dados os números inteiros  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , não todos nulos, existe o mdc e*

$$(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, (b_{n-1}, b_n)).$$

**Demonstração:** A prova desta proposição será realizada por meio de indução sobre  $n \geq 2$ . Para  $n = 2$ , não há nada a mostrar. Considere, por hipótese de indução, a proposição (P) válida para algum  $n \geq 2$ :

$$P : (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, (b_{n-1}, b_n)).$$

Vamos mostrar que (P) é válida para  $n + 1$ . Seja  $d$  o mdc dos  $n$  números inteiros:  $b_1, b_2, \dots, (b_n, b_{n+1})$ . Assim,  $d|b_1, d|b_2, \dots, d|(b_n, b_{n+1})$ . Pode-se concluir que  $d|b_1, d|b_2, \dots, d|b_n$  e  $d|b_{n+1}$ .

Considere, agora, que  $c$  é um divisor comum de  $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ . Por consequência,  $c$  é um divisor comum de  $b_1, b_2, \dots, (b_n, b_{n+1})$ , e, portanto,  $c|d$ . ■

### 3.4 Método das Divisões Sucessivas

Esta seção é uma das mais importantes no que diz respeito ao cálculo do mdc entre dois números inteiros. Ela apresenta uma terceira forma de se determinar o mdc e, além disso, expõe um método sistemático (passo a passo, de forma algorítmica) para seu cálculo. Utilizaremos esse método para resolver algumas das questões propostas nas Sequências Didáticas deste trabalho.

Em resumo, o método consiste na realização de divisões sucessivas, utilizando o algoritmo de Euclides. A cada nova divisão, o divisor torna-se o novo dividendo, e o resto da divisão anterior passa a ser o novo divisor. Ao longo do processo, é possível perceber que o valor do resto diminui a cada etapa, até que ele se torne zero. Sendo assim, o processo das divisões sucessivas é finito.

A seguir, apresentaremos as etapas do método.

Sejam  $a$  e  $b$  dois inteiros com  $a \geq b > 0$ . O máximo divisor comum entre  $a$  e  $b$ , denotado por  $\text{mdc}(a, b)$ , pode ser obtido por meio do seguinte procedimento:

1. Pelo Teorema 3.1, divida  $a$  por  $b$ , obtendo o quociente  $q_1$  e o resto  $r_1$ , isto é:

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b.$$

2. Se  $r_1 = 0$ , então  $\text{mdc}(a, b) = b$ , uma vez que  $b|a$ , e o processo termina.
3. Caso contrário, utilizando o Teorema 3.1, repita o processo dividindo  $b$  por  $r_1$ :

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

4. Se  $r_2 = 0$ , então, do Lema 3.4,  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a - b \cdot q_1, b) = \text{mdc}(b, r_1) = r_1$ , uma vez que  $r_1|b$ , e o processo termina.
5. Caso  $r_2 \neq 0$ , usamos novamente o Teorema 3.1 para os inteiros  $r_1$  e  $r_2$  para encontrar  $q_3$  e  $r_3$  tais que

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

6. Seguindo o mesmo raciocínio feito anteriormente, vemos que, se  $r_3 = 0$ , então  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \text{mdc}(b, r_1) = r_2$ .
7. Se  $r_3 \neq 0$ , siga o mesmo raciocínio do item 5.

8. Utilizando esse mesmo processo, realizando divisões sucessivas, sempre dividindo o último divisor pelo último resto obtido, construímos uma sequência de restos  $(r_n)$  que satisfaz  $0 \leq r_{n+1} < r_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
9. Note que, se todos os valores de  $r_n$  fossem não nulos, então o conjunto  $\{r_1, r_2, \dots\}$ , que é limitado inferiormente por zero e, portanto, pelo Princípio da Boa Ordenação (Axioma 3.1) possui um menor elemento  $r_{n_0}$ , produz  $0 \leq r_{n_0+1} < r_{n_0}$ , um absurdo.
10. O último resto não nulo encontrado nesse processo é o  $\text{mdc}(a, b)$ .

Alguns autores chamam esse método também de Algoritmo de Euclides.

**Exemplo 3.8** Usando o método das divisões sucessivas, determine o máximo divisor comum de 36 e 64.

Note que  $36 \nmid 64$ . Então, para determinar o  $\text{mdc}(36, 64)$ , utilizando o Método das Divisões Sucessivas, o  $\text{mdc}$  será o último resto não nulo. Temos que

$$64 = 36 \cdot 1 + 28$$

$$36 = 28 \cdot 1 + 8$$

$$28 = 8 \cdot 3 + 4$$

$$8 = 4 \cdot 2 + 0.$$

Veja que o último resto não nulo é o número 4, portanto:

$$(64, 36) = (36, 28) = (28, 8) = (8, 4) = 4.$$

Assim, o  $\text{mdc}(64, 36)$  é 4.

**Exemplo 3.9** Usando o Método das Divisões Sucessivas, determine o  $\text{mdc}$  do par de inteiros -81 e 121.

Observe que  $\text{mdc}(-81, 121) = \text{mdc}(81, 121)$ . Como  $81 \nmid 121$ , segue que

$$121 = 81 \cdot 1 + 40$$

$$81 = 40 \cdot 2 + 1$$

$$40 = 1 \cdot 40 + 0.$$

Perceba que o último resto não nulo é 1, portanto o  $\text{mdc}(121, -81) = 1$ , e além disso mostramos que 121 e -81 são primos entre si.

**Exemplo 3.10** Usando o Método das Divisões Sucessivas, determine o  $\text{mdc}$  entre os inteiros 13450 e 2025.

Temos que

$$13450 = 6 \cdot 2025 + 1600$$

$$2025 = 1 \cdot 1600 + 425$$

$$1600 = 3 \cdot 425 + 325$$

$$425 = 1 \cdot 325 + 100$$

$$325 = 3 \cdot 100 + 25$$

$$100 = 4 \cdot 25 + 0.$$

Como o último resto diferente de zero foi 25, então  $\text{mdc}(13450, 2025) = 25$ .

No próximo capítulo, serão apresentadas as propostas de Sequências Didáticas, as quais utilizarão os resultados abordados nesta seção.

## 4 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Entende-se como sequência didática uma abordagem pedagógica essencial para organização do ensino e da aprendizagem, objetivando o desenvolvimento estruturado do conhecimento. Esse modelo pedagógico possibilita que os conteúdos sejam trabalhados de maneira corrente, buscando proporcionar um desenvolvimento gradual das competências dos alunos. Segundo Zabala (1988), as sequências didáticas são:

As sequências de atividades de ensino/aprendizagem, ou sequências didáticas, são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma sequência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir. (Zabala, 1988, p. 26)

Portanto é necessário que os objetivos da sequência didática sejam bem construídos, definidos e claros visando orientar tanto o professor quanto o estudante a fim de alcançarem uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Para Zabala (1988), "A sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos." Assim, as atividades são recursos essenciais no processo de ensino-aprendizagem, englobando diferentes estratégias, como exposição dialogada, trabalhos práticos, observação, estudo, debates, leitura, pesquisa bibliográfica, tomada de notas, ações motivadoras e aplicação dos conhecimentos adquiridos.

Essa proposta metodológica é fundamental para a aprendizagem, pois permite organizar as atividades de forma progressiva, facilitando o desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos. Ao planejar esse recurso, o professor respeita o ritmo e as necessidades dos alunos, tornando o aprendizado mais significativo. Além disso, esse processo incentiva a autonomia, ajudando eles avançarem os resultados almejados de maneira estruturada e coerente.

Segundo Cabral (2017)), no contexto educacional, o planejamento é um elemento essencial para a eficácia do ensino e da aprendizagem. A Sequência Didática, enquanto ferramenta estruturada, exige um planejamento minucioso e intencional, garantindo que cada etapa contribua para o desenvolvimento do estudante. No entanto, instrução do professor não deve excluir a interação e a participação ativa dos alunos. Pelo contrário, o ensino deve manter-se no campo do diálogo construtivo, promovendo um ambiente no qual o aluno se torne protagonista de sua própria aprendizagem.

Para alcançar os resultados esperados com essa forma de organização do trabalho pedagógico, faz-se necessário um planejamento cuidadoso, adaptado à realidade dos estudantes,

bem como o uso de diferentes formas de conduzir as atividades, que favoreçam o engajamento e incentivem o protagonismo discente ao longo do processo de aprendizagem.

## 4.1 Elaboração das Sequências Didáticas

A aprendizagem da Matemática deve ir além da simples memorização de fórmulas e da resolução mecanizada de problemas, priorizando a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento do pensamento lógico. Nesse sentido, esta seção explicará ao leitor a motivação e os principais aspectos das propostas de sequências didáticas, que serão desenvolvidas e aprofundadas nas seções seguintes.

Ao ingressarem no ensino fundamental do 6º ao 9º ano, percebe-se uma grande dificuldade dos alunos em aprender o conteúdo de divisão, como a compreensão do significado da operação, o uso correto dos algoritmos, a interpretação de restos e a aplicação em situações-problema. Diante disso, propõe-se a elaboração de sequências didáticas que abordem essa temática de forma contextualizada e significativa.

A divisão entre números inteiros é um conteúdo essencial no ensino de Matemática, pois serve de base para a compreensão de diversos assuntos, como múltiplos, máximo divisor comum (mdc), mínimo múltiplo comum (MMC), frações, sistema de numeração decimal e operações com números inteiros, especialmente em contextos que envolvem divisões exatas e não exatas. Ao consolidar as habilidades trabalhadas nestas sequências didáticas, espera-se que os estudantes desenvolvam competências ligadas ao raciocínio lógico, à resolução de problemas e à organização de procedimentos matemáticos. Assim, este material apresenta propostas de sequências didáticas voltadas à compreensão e aplicação do Algoritmo de Euclides (ou Divisão Euclidiana) e do cálculo do mdc, destinadas a alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, com o objetivo de promover o entendimento dos conceitos e suas aplicações em situações práticas do cotidiano. Na primeira proposta de sequência didática, será sugerida uma abordagem dos conceitos e aplicações da divisão euclidiana, por meio de exemplos práticos relacionados à realidade dos alunos.

Segundo Brasil (2018), espera-se que, já no 6º ano do Ensino Fundamental, os alunos desenvolvam habilidades para resolver problemas matemáticos envolvendo números naturais. No 7º ano, essa expectativa se amplia para incluir a resolução de situações-problema que envolvem também os números inteiros. A seguir, detalharemos essas habilidades com mais profundidade.

Diante disso, destaca-se a importância de um trabalho mais aprofundado com os conceitos antes da aplicação de procedimentos e fórmulas. A sequência didática aqui apresentada visa justamente contribuir para esse processo, priorizando a construção conceitual como base para a resolução de exercícios. Espera-se que, ao final da sequência, os alunos não apenas saibam aplicar técnicas, mas compreendam os fundamentos que as justificam, desenvolvendo, assim, uma aprendizagem mais eficaz.

Na segunda proposta didática, será apresentada aos alunos a história “O Problema dos Três Marinheiros”, extraída do livro *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan. A narrativa gira em torno da partilha de moedas de ouro encontrada por três marinheiros em um navio, propondo uma situação intrigante de divisão desigual. Essa leitura será utilizada como estratégia para despertar a curiosidade e engajar os estudantes na análise do problema. Em seguida, por meio de uma discussão orientada, o professor conduzirá os alunos à compreensão da necessidade de um critério matemático para realizar a divisão justa das moedas, o que servirá de motivação para introduzir o estudo do Máximo Divisor Comum (mdc) como ferramenta para resolver esse tipo de situação de maneira lógica e fundamentada.

Dessa forma, as propostas de sequências didáticas aqui apresentadas buscam desenvolver as seguintes habilidades: EF06MA03, EF06MA04, EF06MA05, EF06MA06, EF07MA01 E EF07MA04 presentes em Brasil (2018):

[...]JEF06MA03: Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, utilizando estratégias variadas. EF06MA04: Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). EF06MA05: Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. EF06MA06: Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor [...]. EF07MA01: Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos[...]. EF07MA04: Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. [...].(Brasil, 2018, p.301 e p.307)

Segundo Brasil (2018), o ensino de Matemática deve promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação, da capacidade de resolver problemas e da comunicação matemática, de modo que os alunos possam compreender o mundo à sua volta e atuar de forma crítica e criativa.

## 4.2 Primeira Proposta Didática: Uma Abordagem para o Ensino do Algoritmo de Euclides

Os números inteiros desempenham um papel fundamental em várias áreas da matemática e têm diversas aplicações práticas. Eles são a base para operações aritméticas fundamentais, como adição, subtração e multiplicação, além de estarem diretamente relacionados ao conceito de múltiplos. Um múltiplo de um número inteiro é definido como o resultado da multiplicação desse número por qualquer outro inteiro.

Por exemplo, ao analisarmos a fatoração de 30 como  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  podemos concluir que 30 é múltiplo de 2, 3 e 5. Além disso, como múltiplos podem ser obtidos a partir do produto desses fatores entre si, 30 também é múltiplo de 6, 10 e 15. Esse entendimento é crucial para

compreender a divisibilidade entre os números inteiros, pois nos permite identificar quando um número pode ser expresso como o produto de outro número por um inteiro.

A compreensão dos múltiplos não apenas facilita a resolução de problemas envolvendo divisões inteiras, mas também desempenha um papel essencial na determinação do máximo divisor comum (mdc) e do mínimo múltiplo comum (MMC). Esses conceitos são amplamente utilizados em diversas áreas da matemática e têm aplicações práticas em situações cotidianas. Além disso, são fundamentais em algoritmos matemáticos, como o Algoritmo de Euclides, que opera sobre números inteiros para alcançar resultados precisos e simplificados.

No entanto, é importante notar que, embora a compreensão dos múltiplos seja crucial em muitas situações, existem infinitos pares de números inteiros onde nenhum deles é múltiplo do outro. Por exemplo, observamos que 3 não é múltiplo de 5, assim como 5 não é múltiplo de 7. Essa característica destaca a diversidade das relações entre os números inteiros e a complexidade dos algoritmos que lidam com tais situações.

É nesse contexto de diversidade de relações entre os números inteiros que o Algoritmo de Euclides se torna uma ferramenta essencial. Este algoritmo, que foi abordado neste trabalho, define claramente o conceito de divisão com resto e se apresenta como uma solução eficiente para identificar o máximo divisor comum (mdc) entre dois ou mais números, ajudando a resolver problemas relacionados à divisibilidade e às operações aritméticas.

Para Pólya (1995)

A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (Pólya, 1995, p.3)

O autor enfatiza que a habilidade de resolver problemas é adquirida por meio da observação, imitação e prática. Desse modo, destaca o papel do outro como referência ou modelo, o que é necessário para que o aluno não seja apenas um sujeito passivo, limitado à aquisição de conhecimentos teóricos, mas sim alguém engajado na prática daquilo que é aprendido, tornando-se um agente ativo na construção de sua própria aprendizagem. Afinal, é por meio da observação de estratégias alheias e da repetição ativa que se constrói uma aprendizagem significativa.

Ao se depararem com problemas envolvendo o conceito de divisão, é comum que os alunos utilizem o método conhecido como "método da chave" ou "divisão por processo longo" na sua resolução, realizando esse procedimento de modo mais mecanizado sem reconhecer os elementos envolvidos no processo.

Mediante essa análise, será apresentada uma proposta didática alinhada à abordagem metodológica de resolução de problemas, com foco no Algoritmo de Euclides (ou Divisão Euclidiana). O objetivo é proporcionar aos alunos a prática de conceitos como múltiplos e

divisibilidade, além de ajudá-los a identificar os elementos do algoritmo: dividendo, divisor, quociente e resto.

Segundo Pólya (1995), para solucionar um problema matemático, devemos seguir quatro etapas essenciais. A primeira é compreender o problema, identificando suas principais características e o que precisa ser resolvido. Em seguida, a segunda etapa, é necessário elaborar um plano, definindo as estratégias que guiarão o caminho para a solução. A terceira etapa consiste em executar o plano, aplicando os métodos planejados. Por fim, a quarta etapa envolve revisar a solução, garantindo que o resultado esteja correto e coerente.

Para o autor, a resolução de problemas matemáticos segue essa estrutura organizada, na qual cada fase tem sua importância para que o aluno chegue ao resultado esperado de forma clara e eficaz.

Embora o "método das chaves" e o Algoritmo de Euclides estejam baseados na mesma lógica matemática, eles se diferenciam quanto à forma como são ensinados e compreendidos. O "método da chave" costuma ser mais procedimental, com foco na execução passo a passo, o que pode limitar a percepção dos alunos sobre o significado das etapas envolvidas na divisão. Em contrapartida, o Algoritmo de Euclides propõe uma abordagem mais conceitual, destacando explicitamente a relação entre dividendo, divisor, quociente e resto por meio da expressão  $D = d \cdot q + r$ . Ao utilizar esse algoritmo, o professor incentiva a reflexão sobre o processo de divisão, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa. Essa estratégia favorece a construção do raciocínio matemático e amplia a capacidade dos alunos de aplicarem esse conhecimento em diferentes contextos, especialmente na resolução de situações-problema.

A subseção a seguir, irá apresentar o passo a passo da primeira sequência didática que propõe explorar o Algoritmo de Euclides em diferentes situações problemas envolvendo divisibilidades presentes no cotidiano dos alunos.

#### **4.2.1 Explorando o Algoritmo de Euclides: passo a passo da aplicação da primeira sequência didática em sala de aula**

A aula será iniciada com uma revisão do Algoritmo de Euclides (ou Divisão Euclidiana), com foco nos conceitos de divisibilidade e suas propriedades fundamentais. O objetivo é proporcionar aos alunos uma compreensão mais aprofundada sobre como os números e o processo de divisão estão conectados.

Para exemplificar, consideremos o seguinte caso: 3 divide 15 e 3 divide 18. A partir dessas informações, podemos concluir que 3 também divide a soma dos dois números ( $15 + 18 = 33$ ) e a diferença positiva entre eles ( $18 - 15 = 3$ ) bem como a diferença negativa ( $15 - 18 = -3$ ). Essa propriedade é importante porque mostra que a divisibilidade é mantida em somas e subtrações.

O objetivo dessa explicação é também mostrar aos estudantes que, no caso de 15 e 18, podemos expressá-los como múltiplos de 3:

$$15 = 3 \cdot 5$$

e

$$18 = 3 \cdot 6.$$

Dessa forma, ao somarmos ou subtrairmos os dois números, estamos sempre trabalhando com múltiplos de 3. Para ilustrar, temos que:

- A soma de 15 e 18, ou seja, 33, pode ser expressa como  $33 = 3 \cdot 11$ .
- A diferença positiva de 18 e 15, ou seja, 3, é  $3 = 3 \cdot 1$ .
- A diferença negativa de 15 e 18, ou seja,  $-3$ , é  $-3 = 3 \cdot (-1)$ .

Em seguida, serão apresentados exemplos contextualizados envolvendo a divisão entre números inteiros. Serão exploradas situações em que, ao dividir um número inteiro por outro, o resto é diferente de zero. A ideia é garantir que os alunos compreendam não apenas o procedimento de divisão, mas também a importância do resto no contexto das divisões, especialmente na aplicação do Algoritmo de Euclides, que será o foco da aula. A partir dessa primeira abordagem conceitual, os estudantes estarão prontos para entender o uso do algoritmo de maneira prática.

Diante do exposto, recomenda-se que esta proposta didática seja desenvolvida em grupos, com o objetivo de estimular a troca de ideias e a discussão sobre as diferentes soluções encontradas. Essa dinâmica favorece o desenvolvimento da aprendizagem ativa, permitindo que os estudantes assumam o protagonismo no processo de construção do conhecimento.

Antes de finalizar a atividade, reserve um momento para a socialização das respostas. Caso algum grupo tenha adotado uma abordagem diferente para resolver os problemas, solicite que um de seus integrantes apresente a estratégia utilizada aos colegas, promovendo o diálogo e a reflexão.

Para a execução desta Atividade I da proposta didática, sugere-se que o docente aplique-a aos alunos antes de explicar o conteúdo desta proposta, para que ele possa aferir o conhecimento prévio dos alunos. Em sequência, realize a exposição inicial do conteúdo, trabalhando todos os conceitos detalhadamente, os quais estão elencados nessa atividade. Ao finalizar as aulas que compõem a sequência, seguindo todas as etapas aqui sugeridas e apresentadas no apêndice desta dissertação, a Atividade I poderá ser retomada com o objetivo de observar a evolução e a construção do conhecimento dos alunos em relação ao tema estudado.

#### **4.2.2 Atividade I da proposta didática**

1. Realize as divisões a seguir, preenchendo o quadro conforme os resultados obtidos.

**Quadro 1 – Divisão por 2**

| Dividendo | divisor | quociente | resto |
|-----------|---------|-----------|-------|
| 50        | 2       |           |       |
| 71        | 2       |           |       |
| 92        | 2       |           |       |
| 103       | 2       |           |       |
| 244       | 2       |           |       |
| 255       | 2       |           |       |
| 376       | 2       |           |       |
| 387       | 2       |           |       |
| 398       | 2       |           |       |
| 409       | 2       |           |       |

**Fonte:** Própria Autora

Com base no quadro que você completou, responda às questões a seguir.

- Ao observar as divisões realizadas acima, o que você percebe sobre os restos obtidos?
- Na divisão por 2, é possível obter um resto diferente do que foi encontrado na questão? Se sim, apresente um exemplo.

2. Realize as divisões a seguir, preenchendo o quadro conforme os resultados obtidos.

**Quadro 2 – Divisão por 3**

| Dividendo | divisor | quociente | resto |
|-----------|---------|-----------|-------|
| 50        | 3       |           |       |
| 71        | 3       |           |       |
| 92        | 3       |           |       |
| 103       | 3       |           |       |
| 244       | 3       |           |       |
| 255       | 3       |           |       |
| 376       | 3       |           |       |
| 387       | 3       |           |       |
| 398       | 3       |           |       |
| 409       | 3       |           |       |

**Fonte:** Própria Autora

Com base no Quadro 2 que você completou, responda às questões a seguir.

- Ao observar as divisões realizadas acima, o que você percebe sobre os restos obtidos?
- Na divisão por 4, é possível obter um resto diferente do que foi encontrado na questão? Se sim, apresente um exemplo.

3. Realize as divisões a seguir, preenchendo o quadro conforme os resultados obtidos.

**Quadro 3** – Divisão por 4

| Dividendo | divisor | quociente | resto |
|-----------|---------|-----------|-------|
| 50        | 4       |           |       |
| 71        | 4       |           |       |
| 92        | 4       |           |       |
| 103       | 4       |           |       |
| 244       | 4       |           |       |
| 255       | 4       |           |       |
| 376       | 4       |           |       |
| 387       | 4       |           |       |
| 398       | 4       |           |       |
| 409       | 4       |           |       |

Fonte: Própria Autora

Com base no quadro que você completou, responda às questões a seguir.

- (a) Ao observar as divisões realizadas acima, o que você percebe sobre os restos obtidos?
- (b) Na divisão por 4, é possível obter um resto diferente do que foi encontrado na questão? Se sim, apresente um exemplo.

**O que se espera:** Após a resolução das três primeiras questões, espera-se que o aluno consiga identificar os múltiplos de 2, 3 e 4 entre os números apresentados, que são aqueles cujo resto é zero. Além disso, espera-se também que ele reconheça os números que não são múltiplos, ou seja, aqueles que deixam resto diferente de zero, e que perceba, ou comece a se questionar que os restos das divisões executadas são sempre menores do que o divisor e maiores do que ou iguais a zero.

4. Resolva as divisões a seguir:

**Figura 4.1** – Divisões dos naturais

a)

$$574 \overline{) 5}$$

c)

$$1049 \overline{) 10}$$

b)

$$387 \overline{) 7}$$

Fonte: Própria Autora

5. Com base nas questões anteriores, responda: quais são os possíveis restos na divisão de um número inteiro por:

- (a) 3
- (b) 7
- (c) 10
- (d) 11
- (e) 19

**O que se espera:** Com base nas questões anteriores e nas observações feitas pelos próprios alunos, espera-se que eles sejam capazes de determinar os restos indicados nos itens a), b), c), d), e) e f) da questão 5, mesmo sem realizar as divisões.

6. Quais são o resto e o quociente das seguintes divisões:

**Figura 4.2** – Divisões dos inteiros.

|    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| a) |  | c) |  |
| b) |  | d) |  |

**Fonte:** Própria Autora

7. A quadrilha junina Flor de Mandacaru, de Açailândia-MA, possui 126 dançantes (homens e mulheres), totalizando 63 pares de dançarinos. Para organizar o espetáculo, o coreógrafo planejou dividir os 63 pares em 5 fileiras com 11 pares cada. Segundo ele, sobriam 3 pares, que formariam a comissão de frente da quadrilha: o par de noivos, o rei e a rainha, e o par-tema. No entanto, algo nessa divisão não está correto. Reveja os cálculos feitos pelo coreógrafo, identifique o erro e apresente a divisão correta dos pares.

A solução presente afirma que  $63 = 11 \cdot 5 + 3$ .

**Solução:** Note que  $63 = 12 \cdot 5 + 3$ , o que nos leva a concluir que, ao dividirmos 63 por 5, temos como quociente 12 e como resto 3. Logo, devem ser formadas 5 fileiras com 12 pares e sobriam 3 pares, que formariam a comissão de frente da quadrilha.

**O que se espera:** Espera-se que o aluno perceba o erro na divisão feita pelo coreógrafo, que considerou 5 fileiras com 11 pares, quando na verdade seriam 5 fileiras com 12 pares, com 3

pares restantes. Ao aplicar corretamente a divisão, o aluno deve identificar e justificar o equívoco, compreendendo a ideia de divisão com resto.

8. Cinco alunas do 9º ano da Escola Estadual Modelo de Araguaína – TO se reuniram para montar um grande quebra-cabeça com 1787 peças, representando o mapa do Tocantins. Para garantir que todas participassem igualmente da montagem, combinaram uma ordem fixa para colocar as peças, uma de cada vez: Alice, Nicole, Vitória, Juliana e Elysa e depois voltavam para Alice, repetindo esse ciclo até encaixar todas as peças.

Quem foi a aluna que colocou a última peça do quebra-cabeça?

- (a) Alice
- (b) Nicole
- (c) Vitória
- (d) Juliana
- (e) Elisa

**Solução:** Veja que temos 1787 peças do quebra-cabeça que será montado por 5 alunas. Aplicando o Algoritmo de Euclides, temos  $1787 = 5 \cdot 357 + 2$ , onde 357 é o quociente e 2 corresponde ao resto da divisão. Note que, pela ordem fixada de se colocar as peças no quebra-cabeça, cada uma das 5 participantes colocou 357 peças sobrando 2 peças. Retornando ao ciclo, conclui-se que a última peça foi colocada pela Nicole.

**O que se espera:** que o aluno note que, para resolver essa questão, basta analisar o resto da divisão do total de peças pela quantidade de participantes, uma vez que esse valor corresponde ao número de peças que vão sobrar depois de percorrer uma quantidade máxima de vezes o ciclo.

9. (OBMEP-NÍVEL I (2024) Pedrinho quer usar os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, um em cada espaço em branco do dividendo, do divisor e do quociente da conta abaixo, de forma que ela fique correta. Qual é o número que ele deve colocar no quociente?

- (a) 3
- (b) 1
- (c) 5
- (d) 2
- (e) 4

Figura 4.3 – Lousa com Algoritmo da divisão



Fonte: OBMEP-Nível I (2024, p.02)

Espera-se que, ao finalizar a aplicação desta sequência didática, os estudantes consigam compreender os elementos envolvidos no processo de divisibilidade e a aplicação do Algoritmo de Euclides na resolução de atividades contextualizadas. Pretende-se que essa sequência didática

possibilite aos alunos além de habilidades técnicas de aplicação dos conteúdos matemáticos, a capacidade de analisar situações do cotidiano que envolvam tais elementos e diferentes estratégias para solucioná-las.

### **4.3 Segunda Sequência Didática: cálculo do mdc e o problema dos três marinheiros**

Nesta seção, será apresentada uma proposta de sequência didática voltada para o ensino do máximo divisor comum (mdc) entre dois números inteiros. A atividade consiste na exploração do “Problema dos Três Marinheiros”, extraído da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, com o objetivo de introduzir e desenvolver o conceito de mdc. A atividade foi escolhida por seu caráter narrativo e envolvente, permitindo que os alunos explorem, de forma prática e reflexiva, os conceitos de divisibilidade, organização de raciocínio lógico-matemático e aplicação do mdc na resolução de problemas do cotidiano.

De acordo com Santos (2016), Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan, nasceu no Rio de Janeiro em 6 de maio de 1895. Por meio da publicação de suas obras, buscou tornar a matemática mais atrativa e acessível e, com seu pseudônimo Malba Tahan, escreveu livros que combinam números, enigmas e aventuras.

Seu livro mais famoso, *O Homem que Calculava*, cuja 1ª edição foi publicada em 1938, conquistou gerações ao apresentar desafios matemáticos em uma narrativa envolvente inspirada no mundo árabe. A ideia de ensinar por meio de histórias tornou seu trabalho único, mudando a forma como muitas pessoas viam a matemática.

Além de escritor, Mello e Souza foi um professor apaixonado e defensor de um ensino criativo e dinâmico. Publicou mais de cem livros, abordando desde matemática até pluralidade cultural e outros. Faleceu em 18 de junho de 1974, mas seu legado segue inspirando professores e alunos. Santos (2016) destaca que:

O professor Júlio Cesar de Melo e Sousa, mais conhecido por Malba Tahan, foi educador e historiador, realmente singular, que encantou e encanta com seus personagens e fantasias, contadas hoje e repetidas amanhã. Um genial professor, escritor, isto é, de um legado amplo, com temas abordados em grande parte de seus livros bem atualizados, desde a década de 1930, nos mais de cem livros publicados, a saber: ética, cidadania, pluralidade cultural, saúde, educação Matemática, dentre outros temas. (Santos, 2016, p.33)

Percebe-se que, até hoje, suas publicações despertam o interesse do público, pois permanecem atuais e relevantes, em particular no cenário educacional, que busca novas maneiras de engajar os estudantes e promover uma aprendizagem mais significativa.

#### **4.3.1 O Problema dos Três Marinheiros**

A seguir, apresentamos uma história contida no livro *O Homem que Calculava*, conhecida como “O Problema dos Três Marinheiros”, de Tahan (2013), que servirá de inspiração para a

proposta de sequência didática que será desenvolvida posteriormente. Destacamos que ela foi retirada de forma íntegra de (Tahan (2013), p.122 a 126).

*O problema dos Três Marinheiros O elogio que Beremiz fez da ciência dos hindus, recordando uma página da História da Matemática, causou ótima impressão no espírito do príncipe Cluzir Schá. O jovem soberano, impressionado pela dissertação, declarou que considerava o calculista um sábio completo, capaz de ensinar a Álgebra de Bháskara a uma centena de brâmanes. — Fiquei encantado — ajuntou ainda — ao ouvir essa lenda da infeliz Lilaváti, que perdeu o noivo por causa de uma pérola do vestido. Os problemas de Bháskara, citados pelo eloquente calculista, são, realmente, interessantes e apresentam, nos seus enunciados, esse “espírito poético” que tão raro se encontra nas obras de Matemática. Lamentei, apenas, que o ilustre matemático não tivesse feito a menor referência ao famoso problema dos três marinheiros, incluído em muitos livros e que se encontra, até agora, sem solução. — Príncipe magnânimo — respondeu Beremiz —, entre os problemas de Bháskara por mim citados não figura, na verdade, o problema dos três marinheiros. Omiti esse problema pela simples razão de não o conhecer senão por uma citação, vaga, incerta e duvidosa, e ignorar o seu enunciado rigoroso. — Conheço-o perfeitamente — retorquiu o príncipe. — E teria grande prazer em recordar, agora, essa questão matemática que tem embarçado tantos algebristas. E o príncipe Cluzir Schá narrou o seguinte: — Um navio que voltava de Serendibe, trazendo grande partida de especiarias, foi enunciado rigoroso. — Conheço-o perfeitamente — retorquiu o príncipe. — E teria grande prazer em recordar, agora, essa questão matemática que tem embarçado tantos algebristas. E o príncipe Cluzir Schá narrou o seguinte: — Um navio que voltava de Serendibe, trazendo grande partida de especiarias, foi assaltado por violenta tempestade. A embarcação teria sido destruída pela fúria das ondas se não fosse a bravura e o esforço de três marinheiros que, no meio da tormenta, manejaram as velas com extrema perícia. O comandante, querendo recompensar os denodados marujos, deu-lhes certo número de catis. Esse número, superior a duzentos, não chegava a trezentos. As moedas foram colocadas numa caixa para que no dia seguinte, por ocasião do desembarque, o almoxarife as repartisse entre os três corajosos marinheiros. Aconteceu, porém, que, durante a noite, um dos marinheiros acordou, lembrou-se das moedas e pensou: “Será melhor que eu tire a minha parte. Assim não terei ocasião de discutir ou brigar com os meus amigos.” E, sem nada dizer aos companheiros, foi, pé ante pé, até onde se achava guardado o dinheiro, dividiu-o em três partes iguais, mas notou que a divisão não era exata e que sobrava um catil. “Por causa desta mísera moedinha é capaz de haver amanhã discussão e rixa. O melhor é jogá-la fora.” E o marinheiro atirou a moeda ao mar, retirando-se cauteloso. Levava a sua parte e deixava no mesmo lugar a que cabia aos companheiros. Horas depois o segundo marinheiro teve a mesma ideia. Foi à arca em que se depositara o prêmio coletivo e dividiu-o em três partes iguais. Sobrava uma moeda. Ao marujo, para evitar futuras dúvidas, veio à lembrança atirá-la ao mar. E dali voltou levando consigo a parte a que se julgava com direito. O terceiro marinheiro, ignorando, por completo, a antecipação dos colegas, teve o mesmo alvitre. Levantou-se de madrugada e foi, pé ante pé, à caixa dos catis. Dividiu as moedas que lá encontrou em três partes iguais; a divisão não foi exata. Sobrou um catil. Não querendo complicar o caso, o marujo atirou ao mar a moedinha excedente, retirou a terça parte para si e voltou tranquilo para o seu leito. No dia seguinte, na ocasião do desembarque, o almoxarife do navio encontrou um punhado de catis na caixa. Soube que essas moedas pertenciam aos três marinheiros. Dividiu-as em três partes iguais, dando a cada um dos marujos uma dessas partes. Ainda dessa vez a divisão não foi exata. Sobrava uma moeda, que o almoxarife guardou como paga do seu trabalho e de sua habilidade. É claro que nenhum dos marinheiros reclamou, pois cada um deles estava convencido de que já havia retirado da caixa a parte que lhe cabia do dinheiro. Pergunta-se, afinal: Quantas eram as*

*moedas? Quanto recebeu cada um dos marujos?* (Santos, 2013, p.122 à 126, grifo nosso).

Esse problema envolve uma divisão por três que sempre deixa resto 1. Em diferentes momentos da noite, cada marinheiro se levantou individualmente, realizou a partilha em partes iguais e, ao encontrar uma sobra de 1 catil (moeda), descartou-a e levou consigo a sua parte correspondente, isto é,  $\frac{1}{3}$  do total restante. Ao final, ainda restaram alguns catis na arca. Posteriormente, o almoxarife dividiu igualmente o que sobrou entre os três marinheiros e, mais uma vez, restou 1 moeda, que ele guardou como pagamento por seu trabalho, conforme narrado ao longo da história.

A quantidade de catis que havia na caixa era superior a 200 e inferior a 300. Assim sendo, na embarcação, poderia ter uma quantidade de moedas igual a 201, 202, 203, ..., 297, 298 e 299.

Diante dessa problemática, faça o seguinte questionamento aos alunos: existe uma maneira eficiente de resolver esse problema e identificar, por exemplo, qual marinheiro levou mais vantagem na separação?

Veremos que, usando o Algoritmo de Euclides e o cálculo de mdc entre dois inteiros, será possível responder esse questionamento.

Espera-se que os estudantes sejam capazes de relacionar esse problema com o cálculo do máximo divisor comum (mdc) e de resolver tanto o Problema dos Três Marinheiros quanto as demais situações-problema que serão propostas ao longo desta sequência didática.

#### **4.3.2 Atividade II: Métodos para o cálculo do mdc e o Problema dos Três Marinheiros**

A seguir, apresenta-se a atividade que será desenvolvida nesta proposta, a qual deverá ser impressa e entregue aos alunos. Ela aborda o conteúdo de Máximo Divisor Comum (mdc) entre dois números inteiros e parte de um problema clássico conhecido como O Problema dos Três Marinheiros, sobre o qual serão propostos questionamentos a serem resolvidos com base no cálculo do mdc. Essa abordagem é especialmente interessante, pois, além de exercitar operações básicas relacionadas ao mdc, permite aplicar a teoria em uma situação concreta, utilizando o Algoritmo de Euclides como ferramenta principal para a resolução dos desafios propostos.

Inicialmente, a atividade propõe questões voltadas para o exercício do cálculo do Máximo Divisor Comum, explorando diferentes métodos de resolução. Um dos procedimentos apresentados consiste em listar os divisores de cada número, identificar os divisores comuns e, por fim, selecionar o maior entre eles.

Em seguida, os alunos terão contato com o método da decomposição em fatores primos, que se baseia no Teorema Fundamental da Aritmética, o qual garante que todo número natural maior que 1 pode ser decomposto de maneira única (salvo a ordem) em fatores primos.

Por fim, será trabalhado o método das divisões sucessivas, uma técnica mais algorítmica que permite encontrar o mdc de forma eficiente, utilizando o Algoritmo de Euclides. Esses três

métodos permitirão aos estudantes compreender o conceito de mdc sob diferentes perspectivas e desenvolver flexibilidade na escolha da abordagem mais adequada a cada situação. Após essa etapa, serão introduzidas as questões relacionadas ao problema dos Três Marinheiros, nas quais os conhecimentos adquiridos serão aplicados na resolução de uma situação contextualizada e desafiadora.

Após a revisão do conceito de Máximo Divisor Comum (mdc), de suas propriedades e dos diferentes métodos de cálculo, o professor dividirá a turma em grupos e entregará a atividade impressa contendo as questões apresentadas logo abaixo. Os alunos deverão discutir as soluções em grupo, promovendo o diálogo e o raciocínio coletivo, e, em seguida, socializar suas respostas com toda a turma, favorecendo o compartilhamento de estratégias e o aprofundamento do conteúdo.

### 4.3.3 Parte I da atividade que deve ser impressa

1. Liste todos os divisores de 18 e de 27. Em seguida, identifique os divisores comuns e determine o Máximo Divisor Comum (mdc) entre 18 e 27.

**Solução:** Temos que os divisores de 18 são:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$  e  $\pm 18$ . Já os divisores de 27 são:  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$  e  $\pm 27$ . Veja que  $\pm 1, \pm 3$  e  $\pm 9$  são divisores comuns de 18 e 27, sendo 9 o maior deles. Logo,  $\text{mdc}(18, 27) = 9$ .

2. Repita o mesmo procedimento para os números 48 e 64: liste os divisores, identifique os comuns e indique o mdc.

**Solução:** Note que os divisores de 48 são:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24$  e  $\pm 48$ . E os divisores de 64 são:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$  e  $\pm 64$ . Veja que  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  e  $\pm 16$  são divisores comuns de 48 e 64, sendo 16 o maior deles. Portanto,  $\text{mdc}(48, 64) = 16$ .

3. Agora, faça o mesmo com os números 36 e 81: determine os divisores de cada um, encontre os divisores comuns e calcule o mdc entre eles.

**Solução:** Perceba que os divisores de 36 são:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18$  e  $\pm 36$ . E os divisores de 81 são:  $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$  e  $\pm 81$ . Veja que  $\pm 1, \pm 3$  e  $\pm 9$  são divisores comuns de 36 e 81, sendo 9 o maior deles. Então,  $\text{mdc}(36, 81) = 9$ .

4. Usando o mesmo procedimento dos itens anteriores, liste todos os divisores de 72 e 120 e, em seguida, determine o mdc de 72 e 120.

**Solução:** Apresentando todos os divisores de 72 temos:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36$  e  $\pm 72$ . E os divisores de 120 são:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 40, \pm 60$  e  $\pm 120$ .

Note que os números  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$  são divisores comuns de 72 e 120. Dentre eles, temos que 24 é o maior e, portanto,  $\text{mdc}(72, 120) = 24$ .

Observa-se que, à medida que os números aumentam, encontrar o mdc por meio da listagem de todos os divisores e da escolha do maior divisor comum torna-se um processo cada vez mais trabalhoso e demorado. Por isso, a seguir, utilizaremos um método alternativo e mais eficiente: a decomposição em fatores primos dos números inteiros envolvidos, fundamentada pelo Teorema Fundamental da Aritmética (Teorema 3.3).

1. Decomponha os números 64 e 84 em fatores primos.

**Solução:** Decompondo os números 64 e 84, temos:

|        |   |
|--------|---|
| 64,84  | ② |
| 32, 42 | ② |
| 16, 21 | 2 |
| 8, 21  | 2 |
| 4, 21  | 2 |
| 2, 21  | 2 |
| 1, 21  | 2 |
| 4, 21  | 3 |
| 1, 7   | 7 |
| 1, 1   |   |

Os números circulados são os fatores primos comuns, ou seja, dividem 64 e 84 ao mesmo tempo.

2. Usando a decomposição em fatores primos, determine o mdc entre 64 e 84.

**Solução:** Com base na resposta do item 1, note que  $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$  é termo em comum, o que nos garante que o mdc de 64 e 84 é 4.

3. Repita o mesmo procedimento para os pares de números: 90 e 210; 35 e 100; 112 e 321.

**Solução:**

I - Decompondo 90 e 210 em fatores primos, temos:

|         |   |
|---------|---|
| 90,210  | ② |
| 45, 105 | ③ |
| 15, 35  | ③ |
| 5, 7    | 5 |
| 1, 7    | 7 |
| 1, 1    |   |

Os números primos circulados na decomposição tratam-se dos fatores primos comuns de 90 e 210, que geram  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ . Portanto, o  $\text{mdc}(90, 210) = 18$ .

II - Agora decompondo os números 35 e 100 em fatores primos, temos:

|        |   |
|--------|---|
| 35,100 | 2 |
| 35, 50 | 2 |
| 35, 25 | ⑤ |
| 7, 5   | 5 |
| 7, 1   | 7 |
| 1, 1   |   |

Perceba que o único fator primo comum de 35 e 100 é o número 5. Logo, o máximo divisor comum procurado é  $mdc(35, 100) = 5$ .

III - Realizando o mesmo procedimento dos itens anteriores com os números 112 e 321, temos:

|         |     |
|---------|-----|
| 112,321 | 2   |
| 56, 321 | 2   |
| 28, 321 | 2   |
| 14, 321 | 2   |
| 7, 321  | 3   |
| 7, 107  | 7   |
| 1, 107  | 107 |
| 1, 1    |     |

Note que, ao finalizarmos a decomposição em fatores primos, não há nenhum número primo comum de 112 e 321. Quando isso ocorre, dizemos que esses números são primos entre si ou co-primos e que o  $mdc(112, 321) = 1$ .

A seguir, analisaremos algumas situações práticas envolvendo o mdc

4. Mariana tem 60 lápis marrons e 90 lápis amarelos. Ela quer organizá-los em estojos com a mesma quantidade de lápis em cada um, de forma que, no final dessa organização, não sobre nenhum lápis. Qual é o maior número possível de estojos que ela pode montar? E quantos lápis de cada cor haverá em cada estojo?

**Solução:** Ao analisar a situação, é necessário encontrar uma forma de dividir os lápis igualmente, de modo que cada estojo receba a mesma quantidade de lápis marrons e amarelos, sem que sobre nenhum lápis. Esse tipo de problema está diretamente relacionado ao conceito de Máximo Divisor Comum (mdc). Por isso, devemos determinar o mdc entre 60 e 90. Utilizando o mesmo raciocínio dos exemplos anteriores, fazemos a decomposição em fatores primos:

|        |  |   |
|--------|--|---|
| 60, 90 |  | ② |
| 30, 45 |  | 2 |
| 15, 45 |  | ③ |
| 5, 15  |  | 3 |
| 5, 5   |  | ⑤ |
| 1, 1   |  |   |

Os números primos circulados são os fatores comuns de 60 e 90, ou seja, os números que os dividem aos mesmo tempo. Portanto, o  $mdc(60,90)$  é:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Logo, Mariana poderá montar 30 estojos com lápis marrons e amarelos.

Agora para verificarmos a quantidade de lápis marrons e amarelos que estão presentes em cada um dos 30 estojos, basta dividir a quantidade de lápis de cada cor pelo o mdc encontrado:

- Lápis marrons:  $\frac{60}{30} = 2$  lápis por estojo.
- Lápis amarelos:  $\frac{90}{30} = 3$  lápis por estojo.

Portanto, a melhor configuração que Mariana pode utilizar para montar seus lápis, sem desperdícios e garantindo uniformidade, é montar 30 estojos, cada um contendo 2 lápis marrons e 3 lápis amarelos.

5. Em uma aula de gastronomia, cujo tema era confeitaria, a professora sugeriu que fossem feitos 3 bolos de tamanhos diferentes:

- Pequeno: 144 gramas de farinha.
- Médio: 216 gramas de farinha.
- Grande: 288 gramas de farinha

Os alunos precisam dividir a farinha em porções iguais, sem sobra. Qual a maior quantidade de farinha que pode estar em cada porção? E quantas porções eles conseguirão formar para cada tamanho de bolo?

**Solução:** Para que os alunos realizem a divisão em porções iguais, sem restar sobra, precisam calcular o mdc de 144, 216 e 288, pois o resultado será a quantia máxima de farinha. Assim,

|               |   |
|---------------|---|
| 144, 216, 288 | ② |
| 72, 108, 144  | ② |
| 36, 54, 72    | ② |
| 18, 27, 36    | 2 |
| 9, 27, 18     | 2 |
| 9, 27, 9      | ③ |
| 3, 9, 3       | ③ |
| 1, 3, 1       | 3 |
| 1, 1, 1       |   |

Temos que os primos circulados são os fatores comuns dos números 144, 216 e 288. Como  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$  e  $3 \cdot 3 = 3^2$ , podemos concluir que: o  $\text{mdc}(144, 216, 288)$  é  $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$ .

Logo, a quantidade máxima de gramas de farinha, sem sobra, é de 72g em cada porção.

Para que possamos determinar quantas porções eles conseguirão formar para cada tamanho de bolo, iremos dividir cada quantidade de farinha necessária para fazer os diferentes tamanhos de bolo pelo o mdc encontrado, ou seja, 72. Temos:

$$144 \div 72 = 2 \text{ porções.}$$

$$216 \div 72 = 3 \text{ porções.}$$

$$288 \div 72 = 4 \text{ porções.}$$

Portanto, serão usadas 2 porções de farinha para fazer o bolo pequeno, 3 porções para fazer o bolo médio e 4 porções para fazer o bolo grande.

6. Crie outro exemplo prático que envolva o cálculo do mdc e discuta sua resolução com seus colegas.
7. Vamos exercitar um pouco mais. Usando o método da decomposição em fatores primos, determine o mdc entre 250 e 625?

**Solução:** Decompondo 250 e 625 em fatores primos, temos

|          |   |
|----------|---|
| 625, 250 | 2 |
| 625, 125 | ⑤ |
| 125, 25  | ⑤ |
| 25, 5    | ⑤ |
| 5, 1     | 5 |
| 5        | 5 |
| 1        |   |

Os primos contornados são os números que dividem 250 e 635 ao mesmo tempo, ou seja, os fatores primos comuns. Como  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ , segue que o  $\text{mdc}(250, 625)$  é 125.

8. Faça o mesmo para os números 728 e 2025.

**Solução:** Decompondo os números 728 e 2025 em fatores primos, temos

|           |    |
|-----------|----|
| 728, 2025 | 2  |
| 364, 2025 | 2  |
| 182, 2025 | 2  |
| 91, 2025  | 3  |
| 91, 675   | 3  |
| 91, 225   | 3  |
| 91, 75    | 3  |
| 91, 25    | 5  |
| 91, 5     | 5  |
| 91, 1     | 7  |
| 13, 1     | 13 |
| 1, 1      |    |

Perceba que não há fatores primos em comum na decomposição de 728 e 2025 e, portanto, 728 e 2025 são primos entre si ou co-primos. Assim, o  $\text{mdc}(728, 2025)$  é 1.

Observe que, à medida que os valores aumentam, utilizar a decomposição em fatores primos torna-se um processo exaustivo. Assim, passaremos a empregar outro método: das divisões sucessivas.

9. Utilizando o método das divisões sucessivas, determine o  $\text{mdc}$  entre os pares de números a seguir:

- (a)  $\text{mdc}(1232, 2056)$ .

**Solução:** Usando o método das divisões sucessivas, que consiste em aplicar o Algoritmo de Euclides uma quantidade finita de vezes entre os divisores e restos até encontrar um resto igual a zero, tem-se

$$2056 = 1 \cdot 1232 + 824$$

$$1232 = 1 \cdot 824 + 408$$

$$824 = 2 \cdot 408 + 8$$

$$408 = 8 \cdot 51 + 0$$

Note que, ao realizarmos a última divisão, o resto se torna zero. Assim, o  $\text{mdc}(1232, 2056)$  é 8.

(b)  $\text{mdc}(3645, 1365)$

**Solução:** Tem-se que

$$3645 = 2 \cdot 1365 + 915$$

$$1365 = 1 \cdot 915 + 450$$

$$915 = 2 \cdot 450 + 15$$

$$450 = 30 \cdot 15 + 0$$

Logo,  $\text{mdc}(3645, 1365) = 15$ .

(c)  $\text{mdc}(9720, 5508)$

**Solução:** Seguindo o mesmo procedimento, obtemos

$$9720 = 1 \cdot 5508 + 4212$$

$$5508 = 1 \cdot 4212 + 1296$$

$$4212 = 3 \cdot 1296 + 324$$

$$1296 = 4 \cdot 324 + 0$$

Portanto, o  $\text{mdc}(9720, 5508)$  é 4.

Veremos na próxima subseção a resolução do Problema dos Três Marinheiros, apresentado no início desta segunda proposta de sequência didática, a qual será realizada por meio do método das divisões sucessivas.

#### 4.3.4 Parte II da atividade que deve ser impressa: O Problema dos Três Marinheiros

Agora que já conhecemos a história curiosa dos Três Marinheiros, contada por Malba Tahan, é hora de mergulharmos no dilema que ela nos apresenta. Para isso, vamos usar uma ferramenta matemática poderosa: O Algoritmo de Euclides.

Mas, antes de resolvermos o problema principal, vamos refletir juntos sobre algumas perguntas simples, que nos ajudarão a entender melhor o que está por trás dessa situação. Pense com atenção e compartilhe suas ideias com o grupo:

1. Quando dividimos 9 por 7, o resultado é uma divisão exata? Quais são o quociente e o resto?

**Solução:**  $9 = 7 \cdot 1 + 2$ , sendo o quociente 1 e o resto 2.

2. E se invertermos a ordem e dividirmos 7 por 9? O que acontece?

**Solução:**  $7 = 9 \cdot 0 + 7$ , sendo o quociente 0 e o resto 7.

Nas questões 1 e 2, estamos analisando se um número pode ser dividido exatamente por outro. Esse raciocínio é fundamental para entendermos a situação apresentada na história dos Três Marinheiros: sempre que um dos marinheiros tenta dividir o montante de moedas

em partes iguais, sobra uma moeda. Isso acontece porque o número total de moedas não é múltiplo de 3 (o número de marinheiros), e a divisão resulta em um resto, exatamente como vimos ao dividir 9 por 7 ou 7 por 9.

Assim, essas perguntas iniciais nos ajudam a entender o que acontece no problema: o dilema dos marinheiros envolve o conceito de divisão com resto, e isso está diretamente relacionado ao Algoritmo de Euclides, que usa esse mesmo princípio para encontrar o mdc entre dois números.

Concluídas as reflexões iniciais, passamos agora à resolução do dilema apresentado na história O Problema dos Três Marinheiros, de Malba Tahan. Com base nas informações fornecidas e nos conhecimentos adquiridos sobre o cálculo do Máximo Divisor Comum, responda às seguintes questões:

3. Qual era a quantia total de moedas encontrada pelos marinheiros?

**Solução:** Os alunos devem perceber que a quantidade de catis (moedas) na arca, quando divididas por três, deixa resto não nulo. Sendo a quantidade de moedas superior a 200 e inferior a 300, os possíveis valores são: 201, 202, ..., 298 e 299. Assim,

$$201 = 3 \cdot 67 + 0$$

$$202 = 3 \cdot 67 + 1$$

$$203 = 3 \cdot 67 + 2$$

$$204 = 3 \cdot 68 + 0$$

$$205 = 3 \cdot 68 + 1$$

⋮

Observamos que, para determinar as quantidades de catis (moedas) entre 200 e 300 que deixam resto 1 na divisão por 3, basta encontrar a primeira quantidade de moedas, que é 202, e seguir somando de 3 em 3 para determinar as outras, não sendo necessário realizar todas as divisões.

A partir disso, os números divididos por 3 que deixam resto 1 são da forma:

$$n = 3 \cdot k + 1, k \in \mathbb{Z}.$$

Começando em 202, os seguintes valores são: 202, 205, 208, 211, 214, 217, 220, 223, 226, 229, 232, 235, 238, 241, 244, 247, 250, 253, 256, 259, 262, 265, 268, 271, 274, 277, 280, 283, 286, 289, 292, 295, 298. Totalizando 33 valores.

**Situação 1 - 1º marinheiro:** O primeiro marinheiro dividiu a quantidade de catis da arca em três partes iguais e ficou com um terço e jogou o que restou, um catis, ao mar, restando

na arca dois terços da quantia original. Daí, temos as seguintes possibilidades para os valores que deixam resto 1.

$$202 = 3 \cdot 67 + 1$$

$$205 = 3 \cdot 68 + 1$$

$$208 = 3 \cdot 69 + 1$$

$$\vdots$$

$$292 = 3 \cdot 97 + 1$$

$$295 = 3 \cdot 98 + 1$$

$$298 = 3 \cdot 99 + 1$$

Como o primeiro marinheiro pegou um terço dos catis, as possíveis quantidades são: 67, 68, 69, ..., 97, 98, 99, totalizando 33 possibilidades. Consequentemente, os dois terços restantes na arca correspondem ao dobro dessa quantidade que são: 134, 136, 138, ..., 194, 196 e 198.

**Situação 2 - 2º marinheiro:** O segundo Marinheiro teve o mesmo impulso do primeiro: ao encontrar a arca, dividiu a quantidade restante por três, pegou um terço do que lhe cabia dos catis e jogou 1 catis que sobrou ao mar, restando na arca dois terços da nova quantia. Dos valores anteriores, analisamos os que, ao dividirmos por 3, deixam resto 1. Temos os seguintes resultados:

$$134 = 3 \cdot 44 + 2$$

$$136 = 3 \cdot 45 + 1$$

$$138 = 3 \cdot 46 + 0$$

$$\vdots$$

$$194 = 3 \cdot 64 + 2$$

$$196 = 3 \cdot 65 + 1$$

$$198 = 3 \cdot 66 + 0$$

Assim, os valores que deixam resto 1 são: 136, 142, 148, ..., 184, 190 e 196 (um total de 11 valores). Observamos que esses valores de 136 a 196 são contados de 6 em 6. Logo, as possibilidades de catis que o segundo marinheiro teria retirado são: 45, 47, 49, ..., 61, 63, 65, que corresponde a um terço da quantidade que restava na arca. Consequentemente, os dois terços restantes na arca correspondem ao dobro dessa quantidade que são: 90, 94, 98, ..., 122, 126 e 130. Note que valores são contados de 4 em 4. Feito isso, o segundo marinheiro voltou tranquilamente a dormir.

**Situação 3 - 3º marinheiro:** Por fim o terceiro marinheiro levantou-se, enquanto os outros dois dormiam, foi até a arca e dividiu a quantidade de catis que encontrou por três, ficou com um terço e jogou o que restou, um catis ao mar. Dos possíveis valores restantes, temos o seguinte:

$$90 = 3 \cdot 30 + 0$$

$$94 = 3 \cdot 31 + 1$$

$$98 = 3 \cdot 32 + 2$$

$$102 = 3 \cdot 34 + 0$$

$$106 = 3 \cdot 35 + 1$$

$$110 = 3 \cdot 36 + 2$$

⋮

$$122 = 3 \cdot 40 + 2$$

$$126 = 3 \cdot 42 + 0$$

$$130 = 3 \cdot 43 + 1$$

Observe que as possíveis quantidades de catis restantes, 90 a 130, encontradas na arca pelo terceiro marinheiro que, ao serem divididas por 3, deixam resto 1 são:

$$94 = 3 \cdot 31 + 1$$

$$106 = 3 \cdot 35 + 1$$

$$118 = 3 \cdot 39 + 1$$

$$130 = 3 \cdot 43 + 1$$

Portanto, as quantidades possíveis de catis na arca antes da última retirada são: 94, 106, 118, 130, determinadas a partir de 94 somando de 12 em 12.

Logo, o terceiro marinheiro pode ter retirado 31, 35, 39 ou 43 catis, deixando na arca o dobro da quantidade que havia encontrado, ou seja, 62, 70, 78 ou 86 catis.

**Situação 4: almoxarife:** No dia seguinte, o almoxarife realizou a divisão da quantidade restante na arca entre os três marinheiros. Após a partilha, restou 1 catis, o qual ele ficou como pagamento pelo serviço prestado.

Vamos analisar agora as quantidades de catis que poderiam estar na arca nesse momento final, considerando que a divisão entre os três deixou resto 1. Tem-se

$$62 = 3 \cdot 20 + 2$$

$$70 = 3 \cdot 23 + 1$$

$$78 = 3 \cdot 26 + 0$$

$$86 = 3 \cdot 28 + 2$$

Diante disso, o único valor possível para o almoxarife ter encontrado na arca e efetuado o pagamento aos três marinheiros é de 70 catis, pois é o único valor que, ao ser dividido por 3, deixa resto 1. Sabendo que o almoxarife ficou com 1 catis, restaram 69 catis para serem divididos igualmente entre os três marinheiros, de modo que cada um recebeu 23 catis.

**Conclusão:** Sabendo que o terceiro marinheiro havia deixado na arca dois terços do que encontrou, que correspondem a 70 catis, isso significa que ele ficou com um terço, isto é, 35 catis, e jogou um catis ao mar. Portanto,  $3 \cdot 35 + 1 = 106$  catis foi a quantia encontrada pelo terceiro marinheiro na arca.

Seguindo a mesma lógica, 106 catis correspondem a dois terços que o segundo marinheiro deixou na arca após jogar um catis ao mar e pegar um terço da quantidade. Logo, a quantidade levada pelo segundo marinheiro é de 53 catis. Podemos concluir que a quantidade de catis encontrada pelo segundo marinheiro foi de  $3 \cdot 53 + 1 = 160$  catis.

Usando o mesmo raciocínio para o primeiro marinheiro, 160 catis correspondem a dois terços que o primeiro marinheiro deixou na arca após jogar um catis ao mar e pegar um terço da quantidade. Logo, a quantidade levada pelo primeiro marinheiro é de 80 catis.

Podemos concluir que a quantidade de catis encontrada pelo primeiro marinheiro foi de  $3 \cdot 80 + 1 = 241$  catis.

4. Qual dos marinheiros ficou com a maior parte das moedas?

**Solução:** Na divisão realizada pelo almoxarife, cada marinheiro ficou com 23 catis, porém cada um já havia anteriormente feito a própria partilha. O primeiro marinheiro já havia retirado 80 catis, o segundo 53 catis e o terceiro 35, somando com o que cada um recebeu do almoxarife, temos que o primeiro marinheiro ficou com 103 catis, o segundo com 76 catis e o terceiro marinheiro com 68 catis. Portanto, o primeiro marinheiro ficou com a maior quantidade de catis.

Com base em tudo o que foi estudado até agora sobre o máximo divisor comum, resolva a seguinte questão.

5. No dia seguinte, um dos marinheiros resolveu entregar todos os seus catis a um dos companheiros. Sabe-se que, após essa doação, o maior divisor comum entre as novas quantidades de catis dos dois marinheiros que ficaram com moedas passou a ser maior que 1. Qual marinheiro fez a doação e qual foi o que recebeu? Existe apenas uma possibilidade?

Para o leitor que desejar explorar o dilema da história sob outra perspectiva, recomenda-se a leitura de uma solução alternativa apresentada no próprio livro *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, mais especificamente na página 240, onde o problema é abordado por meio de progressões aritméticas.

## 5 CONCLUSÃO

Entendendo que este capítulo tem como objetivo destacar os resultados obtidos nesta pesquisa, faz-se necessário apontar que o caminho escolhido para a investigação, da análise bibliográfica ao trabalho prático com as propostas das sequências didáticas, foi essencial para destacar o valor que o ensino da matemática, quando trabalhadas suas teorias de modo aprofundado, pode representar uma abordagem eficaz das suas competências, como ocorre com o Teorema do Algoritmo de Euclides na aplicação da Divisibilidade.

Além disso, ao passo que, bibliograficamente, a pesquisa é conduzida pelo contexto histórico, compreendeu-se quão fundamental é para os alunos entender, que desde a Antiguidade até os dias atuais, a matemática e seus teoremas passaram por evoluções que permitiram compreender situações cotidianas em que eles são empregados.

Desse modo, esta pesquisa apresenta como um dos resultados a importância de apresentar aos alunos as demonstrações do Algoritmo de Euclides, associadas à definição da Divisibilidade a fim de que eles não apenas resolvam as situações-problema de modo mecanizado, mas compreenda todos os fenômenos envolvidos nessa resolução. Outro resultado de impacto foi a elaboração de duas propostas de sequências didáticas, sendo que na primeira houve a contextualização da aplicação do Algoritmo de Euclides dentro das situações cotidianas as quais os alunos frequentemente se deparam e a segunda buscou evidenciar a presença do MDC em diferentes situações do dia a dia. Outrossim, destacou-se, ainda nessa segunda proposta, O Problema dos Três Marinheiros, uma narrativa envolvente, cuja construção resolutiva se apresenta por meio da aplicação do Algoritmo de Euclides.

É importante frisar que, mesmo não havendo uma aplicação diretamente com os alunos, tais propostas não perdem sua essência, podendo servir, futuramente, de apoio pedagógico aos docentes de Matemática que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental.

E com isso, pretende-se contribuir para o ensino da matemática de forma significativa, promovendo a compreensão dos conceitos de divisibilidade e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos.

Portanto, espera-se que o professor, ao aplicar essas propostas de sequências didáticas, desperte nos alunos a percepção da aplicação do Algoritmo de Euclides para solucionar diferentes situações-problema do seu cotidiano.

## Referências

- BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; tradução: Elza f. **Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo**, 1974. Citado 4 vezes nas páginas 13, 15, 16 e 20.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Acesso em: 20 outubro. 2024. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 37 e 38.
- CABRAL, NATANAEL FREITAS. Sequências didáticas. **Belém-Pará: SBEM/SBEM-PA**, 2017. Citado na página 36.
- CAIXETA, Susiane Bezerra. Algoritmo da divisão de euclides. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 22.
- DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. [S.l.]: Atual reform. São Paulo, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 22.
- EUCLIDES, Os Elementos de. **Tradução e introdução de Irineu Bicudo**. [S.l.]: Unesp, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 13, 20, 21 e 25.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.
- HEFEZ, Abramo. Aritmética, coleção profmat, 2a edição. **Sociedade Brasileira de Matemática**, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 13, 22, 24 e 31.
- MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática discreta. **Rio de Janeiro: SBM**, v. 284, 2015. Citado na página 22.
- OBMEP-NÍVEL I. **Provas das Edições Anteriores**. 2024. Acesso em: 30 jul. 2024. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/provas.htm>>. Citado na página 45.
- PIMENTEL, Carolina. **Pisa: menos de 50% dos alunos sabem o básico em matemática e ciências**. 2023. Agência Brasil, Brasília. Acesso em: 28 jun. 2025. Disponível em: <<https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2023-12/menos-de%2050%25-dos-alunos-sabem-o-b%C3%AAsico-em-matem%C3%A1tica-e-ci%C3%A4ncias>>. Citado na página 15.
- PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1995. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Citado 3 vezes nas páginas 13, 39 e 40.
- ROQUE, Tatiana. História da matemática—uma visao critica, desfazendo mitos e lendas. **Sustinere-Revista de Saude e Educacao**, Universidade do Estado do Rio de Janeiro-Uerj, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 18 e 20.
- SANTOS, Alexsandro Fernandes Dos. **Malba Tahan: história de vida e contribuições ao ensino da matemática**. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016. Citado na página 46.
- TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. [S.l.]: Record, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 5, 6, 13, 46 e 47.

VIEIRA, Felipe; CARVALHO, Rafael Aleixo de. Elementos de aritmética e álgebra. **Rio de Janeiro: SBM**, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. [S.l.]: Penso Editora, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 36.