



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS  
CENTRO DE CIÊNCIAS INTEGRADAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Cricya Thelly Alves dos Santos

Futebol e probabilidade: uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas

Araguaína/TO  
2025

Cricya Thelly Alves dos Santos

Futebol e probabilidade: uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Fernanda Vital de Paula.

Araguaína/TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT  
**Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S237f Santos, Cricya Thelly Alves dos.  
Futebol e probabilidade: uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas / Cricya Thelly Alves dos Santos. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.  
82 f.  
Monografia Graduação (Graduação - em Matemática) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.  
Orientadora: Fernanda Vital de Paula.  
1. Contextualização Matemática. 2. Futebol. 3. Sequência Didática..

**CDD 510**

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.


Cricya Thelly Alves dos Santos

Futebol e probabilidade: uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas

Monografia apresentada à Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), Centro de Ciências Integradas (CCI), Curso de Licenciatura em Matemática. Foi avaliada para a obtenção do título de licenciada em Matemática e aprovada em sua forma final pela orientadora e pela banca examinadora.


Aprovada em: 26 / 11 / 2025.

## BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente  
 **FERNANDA VITAL DE PAULA**  
Data: 04/12/2025 10:42:33-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Fernanda Vital de Paula (Orientadora)

Documento assinado digitalmente  
 **ADRIANO FONSECA**  
Data: 04/12/2025 10:36:17-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Adriano Fonseca

Documento assinado digitalmente  
 **CICERO JUNIOR SILVA PINHEIRO**  
Data: 03/12/2025 23:19:13-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Me. Cícero Júnior Silva Pinheiro

*Dedico este trabalho à minha mamãe, que nunca mediu esforços para que eu tivesse oportunidades e chegasse até aqui.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe Maria, ao meu pai Alessandro, à minha avó, ao meu avô e aos meus irmãos Ingrid, Keven e Bruna, pelo amor incondicional e por serem meu alicerce em todos os momentos. Cada passo dado até aqui só foi possível porque tive vocês me dando força, colo e coragem.

Agradeço com profundo carinho a Vinícius, Sumaia, Cristina e Allana que durante esses quatro anos, me acolheram, me deram lar, conforto, cuidado e afeto. Sou imensamente grata por cada gesto, cada sorriso, conselhos e cada momento compartilhado.

Ao Thyago, meu namorado, pois nada existe em você que eu não goste demais. Obrigada por acreditar em mim quando até eu duvidei, por me apoiar, por me ouvir e por caminhar ao meu lado.

Aos meus amigos, minha segunda família construída ao longo da vida. Em especial, à Jaqueline, com quem compartilho cada pedacinho da minha vida e dos meus sonhos. À Kalline e à Shamyra, minhas melhores amigas que a licenciatura em matemática me deu, agradeço pelas piadas internas e por todos os momentos em que a amizade de vocês salvou meus dias. Agradeço aos meus amigos Wellyson, Glaudston, Luiz Fernando, Miguel, Matheus Faustino e Whadyton e aos que, como o Vasco, me ensinaram que é possível se tornar mais forte que os espinhos no caminho. Entre todos os amores e amigos, de vocês me lembro mais.

À minha orientadora, Professora Fernanda Vital de Paula, pela paciência e por ter aceitado me orientar neste Trabalho de Conclusão de Curso. Sua colaboração, atenção, incentivo e amizade foram fundamentais para que este estudo se concretizasse. Tenho profunda admiração não apenas pela professora e profissional excelente que é, mas também pela pessoa inspiradora que representa.

Por fim, agradeço ao colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins - UFNT, em especial aos professores Alvaro, José Carlos, Renata e Adriano pelos ensinamentos e pelas demais experiências que me proporcionaram durante o curso.

*O mundo pode até acabar; mas o sentimento  
nunca!*

*(Clube de Regatas Vasco da Gama)*

## RESUMO

A probabilidade desempenha um papel central na vida cotidiana, auxiliando na tomada de decisões em contextos de incerteza e contribuindo, na Educação Básica, para o desenvolvimento do pensamento crítico. No currículo escolar, destacam-se os conceitos de espaço amostral, eventos, probabilidade condicional, independência de eventos e teorema de Bayes. Nesse contexto, este trabalho investigou como o uso do tema futebol pode motivar a aprendizagem desses conceitos entre estudantes da Educação Básica, ao contextualizar a Matemática por meio da análise de jogos e resultados do Campeonato Brasileiro de Futebol. A pesquisa, de caráter qualitativo, foi desenvolvida por meio de revisão bibliográfica e análise documental, fundamentada em autores que defendem a resolução de problemas e a contextualização como estratégias pedagógicas significativas. Propõe-se uma sequência didática composta por seis atividades, estruturada a partir da metodologia de resolução de problemas e apoiada em dados da edição de 2024 do Campeonato Brasileiro, masculino e feminino, de modo a articular conceitos probabilísticos ao universo do futebol. A análise teórica realizada indica que esse contexto apresenta potencial didático para despertar o interesse dos estudantes, favorecer a análise e atribuir sentido a conteúdos frequentemente ensinados de forma abstrata. Em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular e do Documento Curricular do Tocantins, a proposta mostra que o pensamento probabilístico vai além dos cálculos, envolvendo reflexão, tomada de decisão e interpretação crítica. Assim, esta monografia reafirma a importância de um ensino de Matemática conectado ao cotidiano dos alunos e abre espaço para uma aprendizagem mais humana, em que o erro, o acaso e a estratégia, elementos fundamentais do raciocínio probabilístico, também se tornam parte do processo de aprender.

**Palavras-chave:** Probabilidade. Resolução de Problemas. Contextualização Matemática. Futebol. Sequência Didática.

## ABSTRACT

Probability plays a central role in everyday life, supporting decision-making in situations of uncertainty and contributing, within Basic Education, to the development of critical thinking. In the school curriculum, key concepts include sample space, events, conditional probability, independence of events, and Bayes' theorem. In this context, this study investigated how the use of the theme of soccer can motivate the learning of these concepts among students in Basic Education by contextualizing Mathematics through the analysis of matches and results from the Brazilian Soccer Championship. This qualitative research was conducted through a literature review and documentary analysis, grounded in authors who advocate problem solving and contextualization as meaningful pedagogical strategies. The study proposes a didactic sequence composed of six activities, structured according to the problem-solving methodology and supported by data from the 2024 edition of the Brazilian Championship, both male and female, in order to articulate probabilistic concepts within the context of soccer. The theoretical analysis indicates that this context has the pedagogical potential to spark interest among learners, foster analytical thinking, and give meaning to concepts often taught in an abstract manner. In line with the guidelines of the National Common Curriculum Base and the Curricular Document of Tocantins, the proposal shows that probabilistic thinking extends beyond calculations, involving reflection, decision-making, and critical interpretation. Therefore, this monograph reaffirms the importance of Mathematics education that is connected to experiences in real-world contexts and opens space for more humanized learning, in which error, chance, and strategy, fundamental elements of probabilistic reasoning, become part of the learning process.

**Keywords:** Probability. Problem Solving. Mathematical Contextualization. Soccer. Didactic Sequence.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Torcida do Flamengo tem a melhor média de público do Brasileirão 2025. . . .	20
2.2	Final do Brasileirão Feminino 2024. . . . .	21
3.1	Representação das operações entre eventos do Exemplo 3.5 . . . . .	25
3.2	Árvore de probabilidades associada aos casos $C_1$ , $C_2$ e $C_3$ . . . . .	30

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>13</b>
<b>2.1 Contextualização Matemática e Futebol nos Documentos Normatizadores</b> .....	<b>13</b>
<b>2.2 Resolução de Problemas e Contextualização no Ensino de Matemática</b> .....	<b>15</b>
<b>2.3 O Futebol no Brasil</b> .....	<b>18</b>
2.3.1 O Futebol Masculino no Brasil .....	18
2.3.2 O Futebol Feminino no Brasil .....	20
<b>3 PRELIMINARES MATEMÁTICAS</b> .....	<b>22</b>
<b>3.1 Conceitos Fundamentais da Probabilidade</b> .....	<b>22</b>
<b>3.2 Probabilidade condicional e independência</b> .....	<b>26</b>
<b>3.3 O Teorema de Bayes</b> .....	<b>28</b>
3.3.1 O Teorema da Probabilidade Total .....	29
3.3.2 A Forma Geral do Teorema de Bayes .....	29
<b>4 ATIVIDADES PROPOSTAS</b> .....	<b>32</b>
<b>4.1 Dados de referência para a sequência didática</b> .....	<b>32</b>
<b>4.2 Material do Aluno</b> .....	<b>35</b>
4.2.1 Atividade 1: Fundamentos da Probabilidade no Futebol .....	35
4.2.2 Atividade 2: Probabilidades Simples e Condicionais .....	36
4.2.3 Atividade 3: Probabilidade Condicional e Independência no Futebol .....	37
4.2.4 Atividade 4: Teorema de Bayes e Aplicações .....	39
4.2.5 Atividade 5: Análise Comparativa .....	41
4.2.6 Atividade 6: O Fator Casa .....	43
<b>4.3 Material do Professor</b> .....	<b>45</b>
4.3.1 Atividade 1: Fundamentos da Probabilidade no Futebol .....	45
4.3.2 Atividade 2: Probabilidades simples e condicionais .....	49
4.3.3 Atividade 3: Probabilidade Condicional e Independência no Futebol .....	54
4.3.4 Atividade 4: Teorema de Bayes e Aplicações .....	59
4.3.5 Atividade 5: Análise Comparativa .....	64
4.3.6 Atividade 6: O Fator Casa .....	69
<b>4.4 Articulação das atividades com a BNCC e seus focos conceituais</b> .....	<b>76</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>78</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A probabilidade desempenha um papel fundamental na vida cotidiana, possibilitando a tomada de decisões em situações de incerteza. Nesse sentido, o ensino e aprendizagem de probabilidade na Educação Básica contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, permitindo que os alunos avaliem riscos e façam previsões com base em dados, o que os prepara para lidar com informações e tomar decisões bem fundamentadas. Além disso, os conceitos probabilísticos conectam-se a outras situações e outras ciências, como Biologia, Física e Economia.

São diversos os exemplos da utilização da probabilidade no cotidiano. Na saúde pública, ela é utilizada na epidemiologia para prever surtos de doenças e na avaliação de testes diagnósticos, por meio de medidas como sensibilidade e especificidade. No campo da economia e finanças, é usada para análise de riscos de investimentos, cálculos de seguros e previsões econômicas baseadas em dados históricos. Em engenharia e tecnologia, a probabilidade está presente na estimativa de falhas em sistemas, na segurança de projetos e no desenvolvimento de algoritmos de inteligência artificial. Na vida de todos os cidadãos, ela está presente em pesquisas eleitorais, que utilizam modelos probabilísticos para inferir intenções de voto e nas previsões meteorológicas disponibilizadas por aplicativos de celulares. No esporte, a probabilidade é empregada por equipes para definir estratégias e estimar desempenhos com base em dados históricos, além de ser um elemento central nos sistemas de apostas esportivas.

Segundo Gutstein (2003), incentivar os alunos a analisarem questões complexas com impactos no cotidiano pode transformar a forma como eles se relacionam com a Matemática. Dessa forma, ensinar probabilidade a partir de situações reais contribui para que os estudantes percebam que seus conceitos são úteis para prever eventos tão distintos quanto os efeitos de uma política pública ou as chances de vitória de um time em uma partida de futebol.

O futebol, reconhecido como uma paixão nacional no Brasil, permeia o cotidiano de grande parte da população. Mesmo aqueles que não acompanham diretamente os campeonatos são frequentemente expostos ao tema em conversas nos mais diversos contextos, como no trabalho, nas reuniões familiares ou na escola. Essas discussões atravessam o dia a dia e mobilizam debates e reflexões que fazem parte das interações sociais. Nesse sentido, Suzuki (2015, p.33) comenta que “o futebol sempre foi alvo de especulações sobre quem seria o campeão, o vice campeão, quais os clubes seriam rebaixados, qual o time que marcaria mais gols, entre muitas outras perguntas relacionadas”.

Segundo Almeida (2012), abordar questões do cotidiano que são do interesse dos alunos, motiva e favorece a compreensão dos métodos e conceitos matemáticos, além de contribuir para a construção do conhecimento. Vertuan e Almeida (2009, p. 14) reforçam essa perspectiva ao afirmarem que, ao “[desenvolvem] uma atividade deste tipo, utilizam vários conceitos

matemáticos em problemas reais e se obrigam, inclusive, a conhecerem melhor outras áreas do conhecimento”.

O futebol, nesse contexto, pode ser compreendido como um elemento significativo da cultura brasileira, presente no cotidiano de muitos alunos, seja nas brincadeiras do recreio, nas partidas improvisadas nos intervalos entre as aulas ou no acompanhamento das competições como o Campeonato Brasileiro. Essa presença cotidiana vai além do entretenimento, criando um ambiente de interação que reflete valores culturais e sociais.

Diante disso, o problema que orienta esta pesquisa é: como o tema futebol pode motivar o aprendizado de conceitos probabilísticos na Educação Básica, tomando como referência os jogos e resultados do Campeonato Brasileiro?

Nesse contexto, este estudo tem como objetivo geral compreender como o tema futebol pode contribuir com o ensino e a aprendizagem de conceitos probabilísticos entre alunos da Educação Básica e do Ensino Superior. De maneira mais específica, pretende-se contextualizar a Matemática por meio da aplicação de conceitos e fórmulas de probabilidade ao universo dos jogos e resultados do Campeonato Brasileiro de Futebol, bem como propor uma sequência didática com atividades que possibilitem o desenvolvimento dos conceitos probabilísticos em sala de aula a partir de situações relacionadas ao esporte..

Para alcançar esse objetivo, adotou-se uma pesquisa de caráter qualitativo, considerada a abordagem mais adequada para possibilitar a exploração de significados e a compreensão aprofundada do fenômeno estudado. A pesquisa qualitativa se mostra pertinente por valorizar a interpretação, buscando compreender aspectos sociais, culturais e educacionais a partir de dados não numéricos, como textos, registros e reflexões. O percurso metodológico foi estruturado em duas etapas complementares: uma pesquisa documental e, posteriormente, uma pesquisa bibliográfica.

No primeiro momento, empregou-se a pesquisa documental, de caráter informativo, voltada para a análise de documentos oficiais da educação, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Documento Curricular do Tocantins (DCT). O objetivo foi identificar as orientações destinadas aos docentes da Educação Básica no que se refere ao ensino da probabilidade e à possibilidade de contextualizar o conteúdo por meio de situações reais, como o futebol. A análise documental, “busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões e hipóteses de interesse” (Lüdke e Andre, 1986. p. 38).

Num segundo momento, desenvolvemos a pesquisa bibliográfica, essencial para compor o referencial teórico desta monografia. Essa etapa permitiu levantar contribuições de diferentes autores sobre o ensino de probabilidade, a contextualização no ensino de Matemática, a Resolução de Problemas como metodologia de aprendizagem e o uso do futebol como recurso didático. A revisão bibliográfica também possibilitou aprofundar fundamentos teóricos e pedagógicos que dialogam com a proposta construída neste trabalho.

Segundo Fonseca (2002), a pesquisa bibliográfica parte do levantamento de materiais já publicados, em livros, artigos científicos e outros meios, permitindo ao pesquisador se situar em relação ao que já foi produzido sobre o tema. Assim, essa etapa teve papel central na sustentação desse trabalho, organizando informações e fundamentando a proposta pedagógica aqui apresentada.

Tendo em vista a problemática e os objetivos apresentados, o segundo capítulo foi dedicado à revisão bibliográfica, organizado em três seções que fundamentam teoricamente esta monografia. Inicialmente, abordaremos a contextualização da Matemática e do futebol nos documentos normativos, em especial a BNCC e o DCT, destacando as orientações voltadas ao ensino contextualizado. Em seguida, discutiremos a importância da Resolução de Problemas e contextualização no ensino de Matemática, à luz de autores que defendem essa tendência metodológica e enfatizam a necessidade de contextualização no ensino da Matemática. Por fim, trataremos do futebol e do Campeonato Brasileiro, compreendendo sua dimensão cultural e social no Brasil e analisando seu funcionamento, de modo a evidenciar seu potencial pedagógico para a construção de propostas de ensino de probabilidade.

Ademais, no terceiro capítulo, apresentamos os fundamentos matemáticos necessários à compreensão da probabilidade, reunindo conceitos, definições e fórmulas que servem como base para a sequência didática proposta neste trabalho. Essa etapa tem como finalidade estabelecer os elementos conceituais que intenciona-se desenvolver por meio das atividades que serão propostas.

No Capítulo 4, será apresentada a sequência didática elaborada para este trabalho, composta por seis atividades baseadas na resolução de problemas que articulam os conceitos de probabilidade ao universo do futebol. A sequência, concebida como um conjunto de atividades ordenadas e articuladas para atingir objetivos educacionais específicos (Zabala, 2014), toma como referência dados e situações reais do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2024.

Busca-se, com isso, relacionar teoria e prática, demonstrando como os conceitos probabilísticos podem ser explorados por meio de contextos esportivos, aproximando o conteúdo matemático da realidade dos estudantes. Cada atividade será descrita em detalhes, contemplando os procedimentos, o público-alvo e as habilidades a serem trabalhadas, em consonância com a BNCC. Dessa forma, buscamos oferecer possibilidades pedagógicas que favoreçam a compreensão da probabilidade e contribuam para o desenvolvimento de competências voltadas ao raciocínio lógico, à interpretação de informações e à resolução de problemas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A presente revisão bibliográfica tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos que sustentam este trabalho, abordando a contextualização do ensino de Matemática por meio do futebol, utilizado como recurso didático para o ensino de Probabilidade. Inicialmente, discute-se o que os documentos normativos, como a BNCC e o DCT, orientam sobre práticas contextualizadas no ensino de Matemática. A seguir, são exploradas contribuições de autores que analisam a importância de inserir situações reais e significativas nas aulas, com ênfase especial na abordagem da Probabilidade. Também é investigado o futebol como fenômeno cultural e social, com foco no Campeonato Brasileiro e seu potencial como contexto significativo para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico na escola.

### 2.1 Contextualização Matemática e Futebol nos Documentos Normatizadores

A BNCC propõe um ensino de Matemática que dialogue com os interesses, vivências e contextos dos estudantes. Para isso, se recomenda que os conteúdos não sejam apresentados de forma isolada, mas sim integrados a situações-problema que façam sentido para o aluno e que estejam ancoradas na realidade. Nessa perspectiva, o documento destaca que o conhecimento matemático deve estar a serviço da formação integral do estudante, reconhecendo sua relevância social e formativa. Como destaca a BNCC:

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (Brasil, 2018, p. 265).

No âmbito da unidade temática Probabilidade e Estatística, a BNCC enfatiza que o estudo da incerteza e o tratamento de dados devem ser desenvolvidos de forma articulada, a partir de contextos reais do cotidiano, das ciências e da tecnologia. Assim, o aprendizado da probabilidade torna-se mais significativo quando trabalhado em atividades que desafiam o estudante a interpretar informações, refletir sobre situações de incerteza e elaborar previsões com base em dados, conforme orienta o próprio documento, acerca da unidade:

[...] Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (Brasil, 2018, p. 274).

Embora o trecho citado não mencione explicitamente o estudo da probabilidade, é possível perceber que a BNCC atribui a essa unidade temática um papel central na compreensão e análise de fenômenos incertos e aleatórios. Ao destacar a importância de descrever, explicar e prever fenômenos, o documento abre espaço para o raciocínio probabilístico, já que a

capacidade de fazer previsões fundamentadas está diretamente relacionada à avaliação de incertezas e à estimativa de probabilidades em situações concretas. Dessa forma, a probabilidade, em conjunto com a estatística, contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e para a formação de cidadãos capazes de tomar decisões conscientes diante da incerteza, uma competência essencial na sociedade contemporânea.

Isso torna o futebol uma excelente temática para o ensino de probabilidade e estatística, por constituir um elemento marcante da cultura brasileira e estar presente no cotidiano dos estudantes, seja nas partidas improvisadas nos intervalos entre as aulas ou no acompanhamento de competições como o Campeonato Brasileiro de Futebol. Essa familiaridade com o esporte pode ser potente para criar um ambiente de interação e engajamento que vai além do entretenimento, refletindo valores culturais e sociais e, sobretudo, oferecendo um rico contexto para o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas.

Esse potencial é respaldado pela BNCC, que preconiza que o ensino de Matemática deve permitir aos alunos relacionar observações do mundo real a representações e conceitos da disciplina, identificando oportunidades de aplicá-la para resolver e interpretar problemas em contextos específicos. Assim, a análise de dados e a probabilidade emergem como importantes áreas para essa abordagem, onde os estudantes podem, por exemplo, realizar experimentos e simulações para confrontar resultados empíricos com a probabilidade teórica (Brasil, 2018) e promovendo, assim, um aprendizado mais investigativo, contextualizado e significativo.

O DCT, ao complementar a BNCC com uma perspectiva regional, corrobora essa visão ao valorizar os saberes e as referências culturais do estudante. Ainda segundo o documento, “A Matemática vem se mostrando ao longo da história como uma importante ferramenta na evolução científica, não apenas na quantificação de fenômenos, mas também no entendimento da evolução social em todo o mundo” (Tocantins, 2019, p. 75). Nesse contexto, a palavra futebol aparece mencionada sete vezes na unidade de Probabilidade e Estatística, ainda que, em sua maioria, vinculada à realização de pesquisas e à construção de gráficos voltados para os anos iniciais. Ainda assim, esses exemplos são significativos, pois evidenciam o reconhecimento do documento quanto ao papel do futebol como contexto estratégico para a abordagem de conteúdos matemáticos, reforçando sua relevância e pertinência na prática pedagógica.

Dessa forma, tanto a BNCC quanto o DCT convergem ao apontar que o ensino de Matemática deve ser contextualizado, e o futebol, como fenômeno cultural e social, constitui uma possibilidade concreta para essa abordagem. Essa visão é reforçada pela própria BNCC quando estabelece uma linha de progressão do conhecimento, destacando que:

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (Brasil, 2018, p. 471).

Nessa perspectiva, a proposta de utilizar o futebol como contexto para o ensino de probabilidade mostra-se coerente com as orientações curriculares, pois favorece que o estudante comece a desenvolver, ainda no Ensino Fundamental, as bases para uma compreensão mais crítica e integrada da Matemática. Ao explorar situações reais e significativas, como as que envolvem o universo do futebol, o ensino ganha sentido e aproxima-se das expectativas delineadas para o Ensino Médio, que preveem a ampliação da capacidade de formular e resolver problemas em contextos diversos.

Essas transições entre o concreto como o real vivido e suas diversas formas de abstração apoiam-se em tendências metodológicas da Educação Matemática que valorizam o raciocínio, a investigação e a reflexão, entre as quais se encontra a Resolução de Problemas, abordada na seção a seguir como uma perspectiva que contribui para a aprendizagem significativa e para o desenvolvimento do pensamento matemático, especialmente quando o ensino é pautado em situações desafiadoras e socialmente contextualizadas.

## **2.2 Resolução de Problemas e Contextualização no Ensino de Matemática**

A perspectiva da Resolução de Problemas constitui um dos pilares metodológicos relevantes para o ensino de Matemática. Em Polya (1975), o autor propõe que o processo de aprendizagem matemática deve partir de situações que desafiem o estudante a pensar, formular hipóteses, testar estratégias e refletir sobre os resultados. Para ele, o processo de resolução segue quatro etapas essenciais: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer o retrospecto, sendo essa a fase de verificação da solução, análise de caminhos alternativos e consolidação do conhecimento adquirido.

Nessa mesma perspectiva, Onuchic (1999) afirma que, ao se ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas, os problemas deixam de ser meros exercícios de aplicação de fórmulas para se tornarem pontos de partida da aprendizagem. Nesse modelo, conceitos, técnicas e algoritmos são introduzidos à medida que se mostram necessários para resolver o problema em questão, invertendo a lógica tradicional do “definição-exemplo-exercício”. Essa distinção fundamental entre “problema” e “exercício” é precisamente o que define a abordagem. Proença (2018) sintetiza essa ideia ao afirmar que

[...] uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas – quando isso ocorre, a situação tende a se configurar como um exercício (Proença, 2018, p.18).

Para operacionalizar essa abordagem, Proença (2018) propõe uma sequência de ações pedagógicas que se inicia pela escolha do problema, momento de planejamento em que o professor seleciona situações que mobilizem conhecimentos anteriores e permitam a construção de novos conceitos. Em seguida, na introdução do problema, o contexto é apresentado aos alunos, que se organizam em grupos para a resolução. Durante a fase de auxílio aos alunos durante a resolução, o professor atua como mediador, orientando os estudantes por meio de questionamentos sem fornecer respostas prontas. Na discussão das estratégias dos alunos, os diferentes caminhos utilizados pelos grupos são socializados e debatidos coletivamente. Por fim, na articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo, o professor sistematiza o conhecimento, relacionando as soluções dos alunos com os conceitos matemáticos formais.

Nesse mesmo sentido, Romanatto (2012) reforça que o problema deve ser efetivamente o elemento propulsor da atividade em sala de aula, afirmando que

[...] o problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição. No processo de ensinar e de aprender ideias, propriedades e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (Romanatto, 2012, p. 302).

Nessa perspectiva, a Resolução de Problemas articula-se com a contextualização no ensino da Matemática, constituindo uma exigência contemporânea para que os conteúdos escolares não sejam vistos pelos alunos só como um amontoado de cálculos abstratos, mas como conhecimentos que fazem sentido em sua vida prática e social. D'Ambrosio (2005, p. 31) comenta que “do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta”, essa crítica apresentada pelo autor reforça a necessidade de práticas pedagógicas que deem sentido a matemática e façam com que os alunos estabeleçam conexões entre o saber matemático e as situações no cotidiano.

Esse pensamento converge com a perspectiva de Skovsmose (2001), ao afirmar que a Matemática deve ser trabalhada a partir de contextos que façam sentido para o aluno, possibilitando a compreensão de conceitos e também o desenvolvimento de uma postura crítica diante da realidade. Nas palavras do autor, “Problemas não devem pertencer a realidades de faz-de-conta sem nenhuma significação exceto como ilustração da matemática como ciência das situações hipotéticas” (Skovsmose, 2001, p. 24).

Essa premissa teórica de que a aprendizagem deve partir de problemas contextualizados e significativos é particularmente fundamental para o ensino de tópicos que, como a Probabilidade, são intrinsecamente abstratos e contra-intuitivos para os estudantes, pois desafiam a lógica determinista que costuma orientar os demais conteúdos da Matemática. A abordagem tradicional, criticada pelos autores citados anteriormente, frequentemente se manifesta nessa área pela redução do conteúdo a exercícios de aplicação mecânica de fórmulas, esvaziando seu significado e potencial interpretativo.

É justamente nesse cenário que a Resolução de Problemas, aliada a contextos de alta relevância social e cultural para o aluno, mostra-se além de uma alternativa metodológica, também uma necessidade. O futebol, enquanto manifestação cultural profundamente enraizada no cotidiano brasileiro, se configura como um contexto privilegiado para operacionalizar essa abordagem no ensino dos conceitos probabilísticos.

Entretanto, Santos e Carvalho (2018) afirmam que os conceitos de probabilidade, quando são apresentados na educação básica, aparecem de maneira reduzida a resolver problemas que na maioria das vezes depende de aplicação de fórmulas e o aluno não compreende o conceito que está sendo aplicado. Essa visão é ampliada por Nascimento (2017), que associa o problema à formação docente e a uma abordagem superficial no Ensino Fundamental, resultando em atividades desinteressantes que não preparam o aluno para as etapas posteriores. Consequentemente, ao chegarem ao Ensino Médio, os estudantes enfrentam grandes dificuldades e tendem a aprender de forma mecânica, sem desenvolver o raciocínio e a reflexão necessários para a Probabilidade.

Seguindo essa mesma linha de pensamento, Lopes (2008) defende a necessidade de trabalhar as ideias do acaso e a aleatoriedade no currículo de Matemática. Para a autora, deixar de explorar esses conceitos implica reduzir o ensino da Matemática a uma visão limitada, centrada apenas na lógica do verdadeiro ou falso, em detrimento da compreensão aplicável da Matemática. Nesse mesmo sentido, Desidério (2017) amplia a discussão ao afirmar que

na sala de aula deve haver uma constante preocupação em desenvolver o espírito crítico dos alunos, a sua capacidade argumentativa e a sua capacidade interpretativa. Desta forma, o desenvolvimento destas capacidades deve ocupar todas as aulas da Matemática, incluindo as centradas no ensino das Probabilidades. Para isto, o ensino não se pode limitar à aprendizagem da Matemática, mas também à sua aplicabilidade no cotidiano dos estudantes (Desidério, 2017, p. 22).

Essa reflexão evidencia que o ensino da Matemática, em especial da Probabilidade, não pode se restringir ao domínio de técnicas ou à resolução de exercícios descontextualizados, é necessário criar situações didáticas que possibilitem aos alunos interpretar, argumentar e criticar, conectando o conhecimento matemático com práticas sociais e problemas reais. Corroborando essa visão, Santana (2020) defende que

[...] é necessário que o ensino e aprendizagem da Probabilidade no Ensino Básico ocorra por meio de abordagens que conduzam os alunos a aplicabilidades em seu cotidiano, utilizando-se os mais diversos recursos de ensino como desafios, jogos, realização de experimentos em softwares e destacando a importância da Probabilidade para a formação integral do cidadão (Santana, 2020, p. 31).

Assim, a articulação entre a Resolução de Problemas e uma contextualização autêntica encontra no futebol, um cenário ideal para tornar o ensino da Probabilidade mais significativo. Essa abordagem permite que os conceitos abstratos sejam trabalhados por meio de problemas reais, promovendo simultaneamente a aprendizagem matemática e o desenvolvimento do pensamento crítico voltado para a compreensão da realidade social.

Como forma de operacionalizar essa abordagem, optamos pela construção de uma sequência didática. Conforme Zabala (2014, p. 24), uma sequência didática consiste em “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Essa definição é amplamente referenciada na literatura especializada, como em Costa (2013), que investigou o Processo de Construção de Sequência Didática (PCSD) como um mecanismo promotor da Educação Matemática na formação de professores. O autor reforça que a Sequência Didática, na perspectiva de Zabala, vai além de uma simples lista de exercícios, ela é uma unidade de intervenção pedagógica que articula intencionalmente atividades ordenadas e estruturadas, a articulação entre teoria e prática e a promoção do professor reflexivo.

Assim, essa concepção orientou a elaboração das seis atividades propostas, organizadas como uma sequência didática articulada para o ensino de probabilidade. A estrutura avança das noções fundamentais para a análise de situações reais do futebol, permitindo que os conceitos sejam introduzidos de forma progressiva e aplicada.

## **2.3 O Futebol no Brasil**

O futebol se constitui como um dos pilares centrais da cultura e da identidade nacional brasileira, um fenômeno social que ultrapassa a dimensão de um simples esporte. Introduzido no país no final do século XIX, popularizou-se rapidamente devido à sua simplicidade e acessibilidade, sendo praticado em diversos contextos sociais. Esta seção abordará especificamente o Campeonato Brasileiro de Futebol, popularmente conhecido como Brasileirão, analisando as trajetórias e as particularidades das modalidades masculina e feminina da competição, com destaque para seus aspectos históricos, econômicos e socioculturais.

### **2.3.1 O Futebol Masculino no Brasil**

Conforme observa DaMatta (1982), o futebol opera como um veículo de dramatização de questões sociais importantes, funcionando como um espelho da sociedade brasileira, com suas hierarquias, contradições e paixões. Essa força simbólica se manifesta de modo evidente na dimensão do Brasileirão, principal competição nacional e espaço onde rivalidades regionais, paixão clubística e interesses econômicos se encontram. Criado em 1971 pela então Confederação Brasileira de Desportos (CBD), hoje Confederação Brasileira de Futebol (CBF), o torneio unificou o futebol nacional ao substituir competições anteriores, como a Taça Brasil (1959-1968) e o Torneio Roberto Gomes Pedrosa (1967-1970).

Ao longo das décadas seguintes, o campeonato passou por diversas modificações em seu formato, especialmente no que se refere ao número de participantes e às fases eliminatórias. Essas mudanças refletiam a tentativa de tornar o torneio competitivo, representativo e comercialmente atrativo. Foi apenas em 2003 que o modelo de pontos corridos foi adotado de forma

definitiva, aproximando o Brasil das principais ligas europeias. Nesse formato, as 20 equipes disputam 38 rodadas, e o campeão é definido pela maior pontuação ao final da competição. De acordo com a CBF (2024), o sistema trouxe maior previsibilidade esportiva, maior justiça competitiva e aumento de receita com transmissão e bilheteria.

Além da dimensão simbólica, o Brasileirão possui grande impacto econômico. Segundo a Serasa Experian (2024), 81% dos brasileiros que gastam com futebol declaram realizar esse consumo todos os meses, seja com ingressos, serviços de streaming, produtos licenciados ou apostas esportivas. Um relatório financeiro da CBF (2024) aponta que, apenas naquele ano, os clubes da Série A movimentaram aproximadamente R\$ 8,7 bilhões. Esse fluxo inclui bilheteria, direitos de transmissão, patrocínios, venda de atletas e produtos oficiais, demonstrando o papel central do futebol na economia do entretenimento.

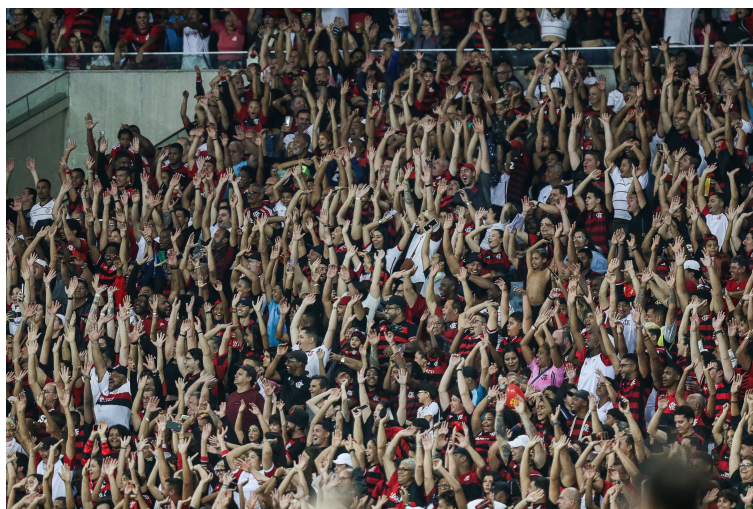
O impacto também se expressa dentro dos estádios. De acordo com dados da Confederação Brasileira de Futebol (CBF, 2025), a edição mais recente do torneio registrou a terceira maior média de público da história, com 24.748 torcedores por jogo, totalizando quase 2,9 milhões de pagantes. Essa média só foi superada nas últimas duas temporadas, quando foram registradas médias de 25.773 torcedores em 2024 e 26.519 em 2023, ano recordista. Para efeito de comparação histórica, o número de 2025 é superior ao registrado em 1983 (22.953), 2019 (22.601) e 2022 (21.646).

Entre os clubes participantes, o Flamengo lidera a estatística, atraindo em média mais de 51 mil torcedores por jogo, conforme pode ser visualizado na Figura 2.1, seguido pelo Corinthians, cuja torcida lota a Neo Química Arena com quase 44 mil pagantes. Outros destaques incluem o Bahia, que reúne cerca de 39 mil torcedores na Arena Fonte Nova. Esses números evidenciam a força das torcidas organizadas, além do impacto econômico gerado por ingressos, produtos oficiais e patrocínios, consolidando o futebol como fenômeno cultural e social de grande relevância.

As pesquisas nacionais mais recentes ajudam a dimensionar a força da identificação coletiva com o futebol no Brasil. Dados da Pesquisa CBF/Nexus (2025), realizada em agosto de 2025, revelam que quase 8 em cada 10 brasileiros têm um time para chamar de seu, já que 78% da população declara torcer por algum clube. Entre esses torcedores, o Flamengo lidera as preferências nacionais com 26%, seguido por Corinthians (19%), São Paulo (9%) e Palmeiras (7%), configurando um cenário de ampla concentração das maiores torcidas do país.

Além da escolha clubística, o estudo mostra que o envolvimento com o futebol é marcante no cotidiano: 47% dos entrevistados assistem a pelo menos uma partida por semana, enquanto 41% acompanham regularmente mesas redondas e programas esportivos, evidenciando que o consumo do futebol ultrapassa o ato de torcer e permeia diferentes práticas culturais, sociais e midiáticas.

Figura 2.1. Torcida do Flamengo tem a melhor média de público do Brasileirão 2025.



Fonte: ASSESSORIA CBF; Foto: Gilvan de Souza/Flamengo (2025).

### 2.3.2 O Futebol Feminino no Brasil

Apesar de historicamente marcado por proibições e exclusões, o futebol feminino tem conquistado espaço e reconhecimento. Como destacam Oliveira e Maldonado (2020), a história das mulheres no futebol brasileiro foi construída sob forte resistência cultural, pois o esporte foi por muito tempo compreendido como um “espaço de masculinidade”, o que contribuiu para invisibilizar a presença feminina na modalidade. Ainda assim, as mulheres sempre estiveram presentes nas práticas futebolísticas, mesmo quando enfrentavam barreiras institucionais e simbólicas.

Um marco recente desse processo foi a consolidação do Campeonato Brasileiro Feminino a partir de 2013, quando a CBF estruturou oficialmente a competição com calendário fixo, regulamento padronizado e apoio financeiro às equipes. Atualmente, o torneio é dividido em duas séries: A1 e A2. A elite nacional reúne 16 clubes que, na primeira fase, jogam entre si em sistema de pontos corridos. As oito melhores equipes avançam para as quartas de final, que, assim como as semifinais e a decisão, são disputadas em partidas de ida e volta. Já as equipes de pior desempenho são rebaixadas à segunda divisão, o que mantém a rotatividade e o fortalecimento técnico do campeonato.

Nos últimos anos, o formato da competição tem evoluído para ampliar a competitividade e a visibilidade da modalidade. Para 2025, mudanças foram implementadas com o objetivo de expandir a Série A1, a partir desta temporada, apenas dois clubes serão rebaixados, enquanto quatro subirão da Série A2, permitindo que o Brasileirão Feminino passe a contar com 20 equipes em 2027, ano em que o Brasil sediará a Copa do Mundo Feminina. Outra novidade é a ampliação do uso do árbitro de vídeo (VAR) em todas as fases eliminatórias, com custeio da própria CBF.

O crescimento estrutural também se reflete no interesse do público. Segundo a Agência Brasil (2025) a final do Brasileirão Feminino Série A1 de 2025, chegou a alcançar 228.697 telespectadores em todo o país. A presença nos estádios acompanha esse movimento, a decisão de 2024 disputada na Neo Química Arena, teve um público total de 44.529 torcedores presentes, conforme a Figura 2.2, a partida marcou o recorde de público no futebol feminino brasileiro e sul-americano.

Figura 2.2. Final do Brasileirão Feminino 2024.



Fonte: Marcos Ribolli/Ge Globo (2024).

O avanço da modalidade também se manifesta no engajamento das torcidas. A presença organizada de torcedores tem se tornado cada vez mais visível nos estádios e nas redes sociais, reforçando a construção de identidade e pertencimento no futebol feminino. Clubes como Corinthians, Palmeiras, São Paulo, Internacional e Ferroviária apresentam alguns dos maiores índices de mobilização de público e de consumo de produtos oficiais, segundo levantamentos setoriais divulgados pela CBF e por institutos esportivos especializados. Esse cenário indica que o futebol feminino além de ampliar sua audiência, consolida uma base de torcedores ativa, capaz de sustentar a modalidade a longo prazo no cenário nacional.

### 3 PRELIMINARES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos fundamentais da teoria das probabilidades que servirão de base para a compreensão das discussões posteriores deste trabalho. Para isso, retomaremos definições essenciais como espaço amostral e eventos, além de propriedades básicas que estruturam o raciocínio probabilístico. Em seguida, abordaremos noções de probabilidade condicional e independência, finalizando com o Teorema de Bayes, que desempenha um papel central em situações de atualização de informações.

O objetivo desta seção é estabelecer as ferramentas matemáticas iniciais que permitirão compreender tanto as aplicações quanto as propostas desenvolvidas nos capítulos seguintes. Para a construção deste capítulo, utilizamos Bussad e Morettin (2017) e Devore (2016).

Para fins de exemplificação, recorreu-se a Dante (2016), obra amplamente utilizada nas escolas de Ensino Médio de Araguaína - TO, o que permite aproximar a discussão dos contextos reais de ensino e aprendizagem, em consonância com as orientações da BNCC. Dessa forma, busca-se não apenas apresentar os fundamentos teóricos, mas também estimular o olhar crítico e reflexivo do leitor sobre a adequação dos exemplos apresentados pelo livro didático.

#### 3.1 Conceitos Fundamentais da Probabilidade

A Teoria das Probabilidades dedica-se ao estudo dos experimentos aleatórios, isto é, daqueles cujos resultados não podem ser previstos com certeza. Em outras palavras, tratam-se de situações cujo desfecho varia de forma imprevisível, mesmo quando repetidas nas mesmas condições. Assim, os experimentos aleatórios constituem o principal objeto de estudo da Probabilidade.

Denominamos experimento aleatório toda situação em que, embora o conjunto de todos os resultados possíveis seja conhecido, não é possível determinar antecipadamente qual resultado ocorrerá em uma realização específica. Exemplos clássicos incluem o lançamento de um dado, o sorteio de uma carta ou a seleção de uma amostra em um estudo estatístico.

**Definição 3.1** (Espaço amostral). *O espaço amostral, geralmente denotado por  $\Omega$ , é o conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, isto é,*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}.$$

Cada elemento  $\omega_i$  é chamado de ponto amostral. O número de elementos do espaço amostral é indicado por  $|\Omega|$ .

**Definição 3.2** (Evento). *Um evento é qualquer subconjunto de  $\Omega$ , ou seja,  $A \subseteq \Omega$ . É, geralmente, representado por uma letra maiúscula do alfabeto latino.*

**Exemplo 3.3.** No lançamento simultâneo de dois dados, um verde e um vermelho, determine:

- (a) o espaço amostral;
- (b) o evento  $A$ : sair o mesmo número em ambos os dados;
- (c) o evento  $B$ : sair soma 7;
- (d) o evento  $C$ : sair soma maior do que 10;
- (e) o evento  $D$ : sair soma menor do que 5;
- (f) o evento  $E$ : sair soma maior do que 12;
- (g) o evento  $F$ : sair soma maior do que 1 e menor do que 13.

**Resolução.** Com base nas definições de espaço amostral e evento apresentadas, modelamos o experimento “lançamento simultâneo de dois dados, um verde (primeira coordenada) e um vermelho (segunda coordenada)”. Seja  $\Omega$  o espaço amostral e, para cada resultado  $(x, y) \in \Omega$ , defina a variável soma  $S(x, y) = x + y$ .

- (a) **Espaço amostral.** Pelo conceito de espaço amostral,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \quad |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36.$$

- (b) **Evento  $A$  (mesmo número nos dois dados).**

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

- (c) **Evento  $B$  (soma igual a 7).**

$$B = \{(x, y) \in \Omega \mid S(x, y) = 7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

- (d) **Evento  $C$  (soma maior que 10).**

$$C = \{(x, y) \in \Omega \mid S(x, y) > 10\} = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

- (e) **Evento  $D$  (soma menor que 5).**

$$D = \{(x, y) \in \Omega \mid S(x, y) < 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

(f) **Evento  $E$  (soma maior que 12).** Como  $S(x, y) \in \{2, \dots, 12\}$  para todos  $(x, y) \in \Omega$ , segue que

$$E = \emptyset.$$

(g) **Evento  $F$  (soma maior que 1 e menor que 13).** Todas as somas possíveis satisfazem  $2 \leq S(x, y) \leq 12$ , portanto

$$F = \Omega.$$

**Definição 3.4** (Operações entre eventos). *Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um espaço amostral  $\Omega$ :*

- A **união** de  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \cup B$ , é o conjunto dos resultados que pertencem a  $A$ , a  $B$  ou a ambos.
- A **interseção** de  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \cap B$ , é o conjunto dos resultados que pertencem simultaneamente a  $A$  e  $B$ .
- O **complementar** de  $A$  em relação a  $\Omega$ , denotado por  $A^c$ ,  $\bar{A}$  ou  $C_{\Omega}^A$ , é o conjunto dos elementos de  $\Omega$  que não pertencem a  $A$ . Assim,  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

**Exemplo 3.5.** *Consideremos, no exemplo do lançamento de um dado, os eventos:*

(a)  $C$ : ocorrência de número par  $\rightarrow C = \{2, 4, 6\}$ .

(b)  $D$ : ocorrência de múltiplo de 3  $\rightarrow D = \{3, 6\}$ .

(c)  $E$ : ocorrência de número par ou número múltiplo de 3  $\rightarrow E = C \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$  (união de eventos).

(d)  $F$ : ocorrência de número par e múltiplo de 3  $\rightarrow F = C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$  (intersecção de eventos).

(e)  $H$ : ocorrência de número ímpar  $\rightarrow H = \{1, 3, 5\}$ .

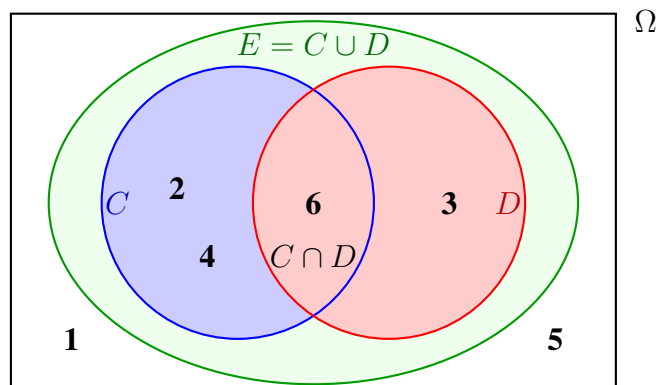
*Indicamos assim:*

$$H = \bar{C} = C_{\Omega}^C \text{ (complementar de } C \text{ em relação a } \Omega).$$

$C$  e  $H$  são chamados **eventos complementares**. Observe que

$$C \cap H = \emptyset \quad e \quad C \cup H = \Omega.$$

Figura 3.1. Representação das operações entre eventos do Exemplo 3.5



Fonte: Elaborada pela autora.

Essas operações podem ser representadas graficamente por diagramas de Venn, que facilitam a visualização das relações entre eventos, conforme apresentado por Devore (2006, p. 49). Nesse contexto, os itens solicitados de (a) a (d) no Exemplo 3.5 estão ilustrados na Figura 3.1.

A probabilidade associada a um evento  $A$  expressa a medida da chance de sua ocorrência dentro do conjunto de resultados possíveis.

Segundo a abordagem clássica, a probabilidade de um evento  $A$  ocorrer é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a  $A$  e o número total de casos possíveis, desde que todos os resultados do espaço amostral sejam igualmente prováveis. Matematicamente, essa definição é expressa por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

em que

- $n(A)$  é o número de elementos do evento  $A$ ;
- $n(\Omega)$  é o número de elementos do espaço amostral  $\Omega$ .

Para garantir a coerência lógica e a validade dos cálculos probabilísticos, a Teoria das Probabilidades estabelece um conjunto de propriedades fundamentais, apresentadas a seguir:

**P1. Limites da probabilidade:**

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

**P2. Evento certo ( $\Omega$ ) e evento impossível ( $\emptyset$ ):**

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{e} \quad P(\emptyset) = 0.$$

**P3. União de dois eventos:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

No caso em que  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente exclusivos, ou seja,  $A \cap B = \emptyset$ , tem-se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

já que  $P(\emptyset) = 0$ .

**P4. Evento complementar:**

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

**3.2 Probabilidade condicional e independência**

Em muitas situações práticas, o interesse está em determinar a probabilidade de ocorrência de um evento quando já se sabe que outro evento ocorreu. Nesses casos, o conhecimento prévio de uma ocorrência modifica o espaço amostral relevante para a análise. Surge, assim, o conceito de probabilidade condicional.

**Definição 3.6** (Probabilidade condicional). *Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos de um mesmo espaço amostral, com  $P(B) > 0$ . A probabilidade de  $A$  ocorrer dado que  $B$  ocorreu é definida por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

No caso da abordagem clássica, em que todos os resultados do espaço amostral são igualmente prováveis, tem-se que:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \quad \text{e} \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}.$$

Substituindo essas expressões na definição geral de probabilidade condicional, obtém-se:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

**Exemplo 3.7.** *Ao retirar aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de se retirar um ás vermelho? E qual é a probabilidade de se retirar um ás vermelho de copas?*

**Resolução.** Nesse caso, temos  $n(\Omega) = 52$ , onde  $n(\Omega)$  representa o número total de casos possíveis.

Consideremos o evento  $A = \text{retirada de um ás vermelho} = \{\text{ás de copas, ás de ouros}\}$   
 Nesse caso, O número de elementos (casos favoráveis) do evento  $A$  é  $n(A) = 2$ . Assim,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \approx 0,038.$$

Esse valor representa a probabilidade de se retirar um ás vermelho antes da realização do experimento.

Suponha agora que, ao realizar o experimento, verificou-se que foi retirada uma carta de copas. Nesse caso, tem-se o evento  $B = \text{retirada de uma carta de copas}$ , para o qual o número de elementos (casos favoráveis) é  $n(B) = 13$ .

A probabilidade de ocorrer  $A$ , condicionada ao fato de que já ocorreu  $B$ , ou seja,  $P(A|B)$ , é dada por:

$$\frac{1}{13} \approx 0,077.$$

Observe que, nesse caso, o conjunto dos casos possíveis restringe-se aos 13 elementos do evento  $B$  ( $n(B) = 13$ ), e não mais aos 52 elementos do espaço amostral inicial  $\Omega$ . Além disso, os casos favoráveis à ocorrência de  $A$ , já tendo ocorrido  $B$ , correspondem apenas aos elementos pertencentes à interseção  $A \cap B = \text{retirada de um ás de copas}$ , sendo  $n(A \cap B) = 1$ . Assim, pela forma clássica da probabilidade condicional, obtém-se:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{13}.$$

De modo equivalente, aplicando a definição geral da probabilidade condicional, tem-se:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}.$$

Essa definição expressa que, uma vez conhecido que  $B$  ocorreu, a análise se restringe apenas aos casos em que  $B$  é verdadeiro, e a probabilidade de  $A$  é calculada em relação a esse subconjunto reduzido do espaço amostral.

A probabilidade condicional é particularmente útil em experimentos compostos, nos quais o resultado de um evento influencia o outro. Contudo, em algumas situações, o conhecimento sobre a ocorrência de um evento não altera a probabilidade do outro. Isso nos leva ao conceito de independência de eventos.

**Definição 3.8** (Independência de eventos). *Dois eventos  $A$  e  $B$  são ditos independentes quando a ocorrência de um não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, isto é,*

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

**Exemplo 3.9.** *Uma moeda perfeita é lançada duas vezes. Considerando os eventos  $A$ : sair cara na 1ª jogada e  $B$ : sair cara na 2ª jogada, demonstre que os eventos  $A$  e  $B$  são independentes.*

**Resolução.**

**1ª maneira:**

Seja  $C$  = sair cara e  $\bar{C}$  = sair coroa. Assim,

$$\Omega = \{CC, C\bar{C}, \bar{C}C, \bar{C}\bar{C}\}.$$

$$A = \{CC, C\bar{C}\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{CC, \bar{C}C\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = \{CC\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Como  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ , então  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Logo,  $A$  e  $B$  são independentes.

**2ª maneira:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Como  $P(A) = \frac{1}{2}$ , então  $P(A|B) = P(A)$  e os eventos  $A$  e  $B$  são independentes.

A noção de independência desempenha papel central na teoria das probabilidades, pois permite a simplificação de cálculos e o desenvolvimento de modelos probabilísticos mais gerais. De acordo com Devore (2006, p. 56), muitas aplicações práticas, como testes sucessivos, confiabilidade de sistemas e amostragem estatística, dependem diretamente da suposição de independência entre eventos.

### 3.3 O Teorema de Bayes

Uma aplicação importante do conceito de probabilidade condicional é o Teorema de Bayes, que fornece um meio sistemático de atualizar probabilidades à medida que novas informações se tornam disponíveis. O ponto de partida é a regra do produto, obtida a partir da definição de probabilidade condicional:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B).$$

Dessa relação, podemos expressar a probabilidade condicional de  $A$  dado que  $B$  ocorreu como

$$P(A|B) = \frac{P(A) P(B|A)}{P(B)}, \quad \text{com } P(B) > 0.$$

Essa forma simples do teorema mostra como uma probabilidade inicial (ou *a priori*) de  $A$  pode ser atualizada em uma probabilidade revisada (ou *a posteriori*) quando a ocorrência de  $B$  é observada. Como destaca Devore (2006, p. 58), esse processo reflete o raciocínio indutivo comum em situações de incerteza: começamos com uma crença inicial e a modificamos à luz de novas evidências.

### 3.3.1 O Teorema da Probabilidade Total

Para aplicar o Teorema de Bayes em situações em que o espaço amostral é particionado em eventos mutuamente exclusivos e exaustivos, faz-se uso do Teorema da Probabilidade Total.

Dizemos que os eventos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  são mutuamente exclusivos quando não ocorrem simultaneamente, isto é,  $C_i \cap C_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Além disso, são chamados de exaustivos quando cobrem todo o espaço amostral, ou seja,

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = \Omega.$$

Isso significa que, ao menos um desses eventos deve ocorrer em qualquer realização do experimento.

Assim, sejam  $C_1, \dots, C_n$  eventos mutuamente exclusivos e exaustivos. Então, para qualquer outro evento  $A$ ,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C_1)P(C_1) + \dots + P(A|C_n)P(C_n) \\ &= \sum_{j=1}^n P(A|C_j)P(C_j). \end{aligned}$$

Esse resultado permite calcular a probabilidade total de  $A$  considerando todas as maneiras possíveis pelas quais  $A$  pode ocorrer, levando em conta a contribuição de cada cenário  $C_j$ .

### 3.3.2 A Forma Geral do Teorema de Bayes

A forma geral do Teorema de Bayes permite calcular a probabilidade total de  $B$  considerando todas as maneiras possíveis pelas quais  $B$  pode ocorrer, ponderadas pelas probabilidades de cada cenário  $A_i$ .

Em muitos casos, o espaço amostral é dividido em uma coleção de eventos mutuamente exclusivos e exaustivos  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , de modo que exatamente um deles deve ocorrer. Quando se observa um evento  $A$ , o teorema de Bayes permite determinar a probabilidade de que  $A$  tenha sido causado por um evento específico  $C_i$ . A forma geral é dada por:

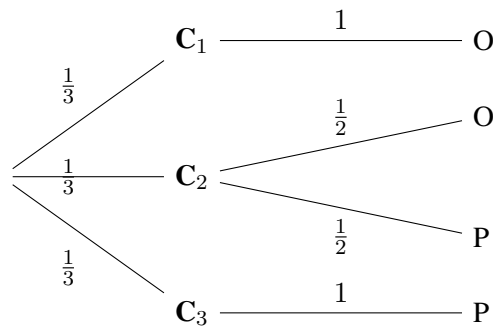
$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i) P(A|C_i)}{\sum_{j=1}^n P(C_j) P(A|C_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Essa expressão fornece a base para numerosos modelos probabilísticos e aplicações práticas, como inferência estatística, diagnóstico médico e sistemas de classificação. Segundo Devore (2006), o poder do Teorema de Bayes está em formalizar o processo de revisão de crenças diante de novas informações, combinando dados observados com conhecimentos prévios.

**Exemplo 3.10.** *Existem três caixas idênticas. A 1ª contém duas moedas de ouro, a 2ª contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a 3ª, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda escolhida for de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?*

**Resolução.** A situação pode ser representada pela árvore de probabilidades mostrada na Figura 3.2.

Figura 3.2. Árvore de probabilidades associada aos casos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

O problema pode ser reformulado da seguinte maneira: sabendo que a moeda escolhida é de ouro, qual é a probabilidade de ela ter sido retirada da 1ª caixa, já que apenas essa caixa contém duas moedas de ouro.

Sejam os eventos:

$C_1$ : a caixa sorteada é a 1ª;

$C_2$ : a caixa sorteada é a 2ª;

$C_3$ : a caixa sorteada é a 3ª;

$A$ : a moeda sorteada é de ouro.

Deseja-se determinar  $P(C_1|A)$ , ou seja, a probabilidade de que a moeda tenha vindo da caixa 1, dado que foi obtida uma moeda de ouro.

Pela fórmula de Bayes, temos:

$$P(C_1|A) = \frac{P(C_1) P(A|C_1)}{\sum_{j=1}^3 P(C_j) P(A|C_j)},$$

em que:

- $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$ ;
- $P(A|C_1) = 1$ ;
- $P(A|C_2) = \frac{1}{2}$ ;
- $P(A|C_3) = 0$ .

A probabilidade total de se retirar uma moeda de ouro,  $P(A)$ , é obtida somando-se as probabilidades de cada caixa ser selecionada multiplicadas pelas probabilidades de se retirar uma moeda de ouro dessa caixa. Assim,

$$P(A) = \sum_{j=1}^3 P(C_j) \cdot P(A|C_j) = P(C_1) \cdot P(A|C_1) + P(C_2) \cdot P(A|C_2) + P(C_3) \cdot P(A|C_3).$$

Substituindo os valores conhecidos, tem-se:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

O numerador da expressão de Bayes representa a probabilidade conjunta de selecionar a caixa 1 e retirar uma moeda de ouro, ou seja,

$$P(C_1) \cdot P(A|C_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Tendo determinados o denominador e o numerador, aplica-se a fórmula de Bayes:

$$P(C_1|A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Conclui-se, portanto, que a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro é igual a  $\frac{2}{3}$ .

## 4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, apresenta-se uma sequência didática desenvolvida para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, utilizando o contexto do futebol brasileiro. A elaboração dessa proposta baseou-se na concepção de sequência didática discutida por Zabala (2014), conforme apresentado no Capítulo 2, a qual orientou a organização progressiva das seis atividades destinadas aos estudantes. Além disso, sua construção articula-se a perspectiva de contextualização defendida por D’Ambrosio (2005) e Skovsmose (2001).

Além do material destinado aos estudantes, este capítulo apresenta também um conjunto de orientações para o professor que foi organizado segundo as cinco ações pedagógicas sistematizadas por Proença (2018), que integram a perspectiva do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP). Nesse material, são detalhados encaminhamentos didáticos, possíveis intervenções, respostas esperadas e diferentes caminhos de resolução para cada atividade, de modo a oferecer ao professor um suporte consistente para a condução da sequência.

A sequência é composta por seis atividades interligadas, planejadas para favorecer o desenvolvimento progressivo dos conceitos probabilísticos no contexto do futebol brasileiro:

1. Fundamentos da Probabilidade no Futebol;
2. Probabilidades Simples e Condicionais;
3. Probabilidade Condicional e Independência no Futebol;
4. Teorema de Bayes e Aplicações;
5. Análise Comparativa;
6. O Fator Casa.

O objetivo desta proposta é mostrar como os conceitos probabilísticos podem ser trabalhados em contextos culturalmente relevantes, permitindo que os estudantes vivenciem esses conceitos por meio da análise de dados, desenvolvam o pensamento crítico e exerçam uma cidadania baseada em evidências. Na seção 4.1 apresentam-se os dados utilizados como referência para as atividades, enquanto na seção 4.2 é disponibilizado o material destinado ao aluno e, na seção 4.3, o material destinado ao professor.

### 4.1 Dados de referência para a sequência didática

Os dados utilizados como referência para a construção das atividades correspondem aos campeonatos masculino (Série A) e feminino (Série A1), o que possibilitou contextualizar os

conceitos probabilísticos no universo do futebol brasileiro. A maior parte das análises, cálculos e discussões desenvolvidas ao longo da sequência tem como base as tabelas gerais desses campeonatos. Esses dados, apresentados nos Quadros 4.1 e 4.2, foram elaborados a partir das informações disponibilizadas pela Confederação Brasileira de Futebol (CBF, 2024), referentes ao Campeonato Brasileiro de 2024. Para que os estudantes possam realizar as atividades, é importante que o professor disponibilize previamente esses quadros.

Quadro 4.1. Resultados do Campeonato Brasileiro Série A 2024 (Masculino)

<b>P</b>	<b>Clube</b>	<b>Pts</b>	<b>PJ</b>	<b>VIT</b>	<b>E</b>	<b>DER</b>	<b>GM</b>	<b>GC</b>	<b>SG</b>
1	Botafogo	79	38	23	10	5	59	29	30
2	Palmeiras	73	38	22	7	9	60	33	27
3	Flamengo	70	38	20	10	8	61	42	19
4	Fortaleza	68	38	19	11	8	53	39	14
5	Internacional	65	38	18	11	9	53	35	17
6	São Paulo	59	38	17	8	13	53	43	10
7	Corinthians	56	38	15	11	12	54	45	9
8	Bahia	53	38	15	8	15	49	49	0
9	Cruzeiro	52	38	14	10	14	43	41	2
10	Vasco da Gama	50	38	14	8	16	43	55	-13
11	EC Vitória	47	38	13	8	17	45	52	-7
12	Atlético-MG	47	38	11	14	13	47	54	-7
13	Fluminense	46	38	12	10	16	33	39	-6
14	Grêmio	45	38	12	9	17	44	50	-6
15	Juventude	45	38	11	12	15	48	59	-11
16	Bragantino	44	38	10	14	14	44	49	-4
17	Athletico-PR	42	38	11	9	18	40	45	-6
18	Criciúma	38	38	9	11	18	42	61	-19
19	Atlético-GO	30	38	7	9	22	29	58	-29
20	Cuiabá	30	38	5	12	20	29	49	-20

Fonte: Elaborado pela autora a partir de CBF (2024).

Quadro 4.2. Resultados do Campeonato Brasileiro Série A1 2024 (Feminino)

<b>P</b>	<b>Clube</b>	<b>Pts</b>	<b>PJ</b>	<b>VIT</b>	<b>E</b>	<b>DER</b>	<b>GM</b>	<b>GC</b>	<b>SG</b>
1	Corinthians	40	15	13	1	1	40	17	23
2	Ferroviária	32	15	9	5	1	20	9	11
3	São Paulo	30	15	9	3	3	35	15	20
4	Palmeiras	28	15	9	1	5	36	17	18
5	Cruzeiro	24	15	7	3	5	30	17	13
6	Grêmio	23	15	7	2	6	22	19	3
7	Internacional	23	15	5	5	4	24	16	6
8	Bragantino	23	15	5	5	4	21	19	2
9	Flamengo	22	15	5	4	5	30	22	8
10	América Mineiro	20	15	5	5	5	24	20	4
11	Fluminense	19	15	5	4	6	14	19	-5
12	Real Brasília	17	15	4	5	6	11	16	-5
13	Botafogo	12	15	2	6	7	13	24	-11
14	Santos	11	15	3	2	10	15	40	-25
15	Kindermann	7	15	1	4	10	11	35	-24
16	Atlético Mineiro	1	15	0	1	14	11	49	-38

Fonte: Elaborado pela autora a partir de CBF (2024).

Além desses quadros gerais, alguns dados específicos utilizados na sequência, especialmente os empregados na Atividade 6, referente ao fator casa, foram organizados separadamente, a partir de outras informações do Campeonato Brasileiro Masculino de 2024. Esse procedimento consistiu em contabilizar, para cada equipe analisada, o número de vitórias, empates e derrotas em jogos como mandante e como visitante. Dessa forma, o professor pode reproduzir ou adaptar a atividade para outras equipes, temporadas ou competições, bastando consultar a tabela oficial do campeonato escolhido e aplicar o mesmo critério de categorização dos resultados.

## 4.2 Material do Aluno

Nesta seção são apresentadas as atividades propostas para uso em sala de aula. Para facilitar a organização, cada atividade aparece em um quadro próprio. Esses quadros não foram pensados para impressão ou entrega direta aos alunos e, por isso, não incluem espaço para respostas. Caso o professor deseje aplicá-las, pode distribuir folhas A4 ou orientar o uso dos próprios cadernos para que os alunos realizem os cálculos e registrem as respostas. Outra possibilidade é o professor editar os quadros, inserindo espaços específicos para que os estudantes escrevam suas soluções, o que fizer mais sentido para a dinâmica da turma.

### 4.2.1 Atividade 1: Fundamentos da Probabilidade no Futebol

Esta atividade tem como objetivo introduzir e fortalecer conceitos fundamentais de Probabilidade a partir de um conjunto de situações reais do Campeonato Brasileiro Masculino de Futebol. A proposta está alinhada às habilidades EF06MA30, que recomenda o cálculo de probabilidades simples expressas nas formas fracionária, decimal e percentual a partir da contagem de casos, e EF08MA22, que propõe o uso da definição formal do espaço amostral e a determinação do número de elementos para o cálculo de probabilidades simples e condicionais.

No Ensino Médio, a atividade avança para a habilidade EM13MAT312, na qual os estudantes interpretam probabilidades em contextos de experimentos sucessivos, analisando características dos times que são resultado da sequência de jogos do campeonato.

A seguir, apresenta-se a proposta da Atividade 1 no Quadro 4.3, que será desenvolvida com base em informações da edição de 2024 do Campeonato Brasileiro Masculino e explorará situações que envolvem a construção do espaço amostral, a contagem de resultados possíveis e o cálculo e interpretação de probabilidades.

## Quadro 4.3. Atividade 1

<p><b>Problema:</b> Como os times se relacionam com duas características importantes? Considere:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Característica A: Time com saldo de gols (SG) positivo;</li> <li>• Característica B: Time com mais de 15 vitórias.</li> </ul>
<p><b>Fase 1:</b> Coleta de Dados: use a tabela do Campeonato Brasileiro Masculino de 2024 para:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Listar os times com a característica A</li> <li>2. Listar os times com a característica B</li> </ol>
<p><b>Fase 2:</b> Análise das Relações: observe a tabela do Campeonato Brasileiro Masculino de 2024 e responda:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Há times que têm as duas características ao mesmo tempo? (Se sim, quais?)</li> <li>2. Há algum time que não tem nenhuma das duas características? (Se sim, quais?)</li> <li>3. Liste os times que venceram até 15 jogos:</li> </ol>
<p><b>Fase 3:</b> Representação Matemática</p> <p>Após discutir e responder às perguntas anteriores, represente as relações encontradas utilizando os símbolos matemáticos apropriados, sabendo que:</p> <p style="text-align: center;"> <math>A</math> : Times com saldo de gols positivo  <math>B</math> : Times que venceram mais de 15 jogos  <math>A \cap B</math> : Times que satisfazem ambas as condições  <math>A \cup B</math> : Times que satisfazem pelo menos uma das condições  <math>\bar{A}</math> : Times que não têm saldo de gols positivo </p> <p>Descreva os seguintes eventos com base na sua investigação:</p> <p style="text-align: center;"><math>A \cap B</math>, <math>A \cup B</math>, <math>\bar{A}</math>.</p> <p><i>Dica:</i> Construa um diagrama ou uma tabela para visualizar a relação entre os conjuntos. Depois, analise como esses resultados se conectam à ideia de espaço amostral.</p>
<p><b>Fase 4:</b> Reflexão final e discussão nos grupos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• O que o resultado de <math>A \cap B</math> nos diz sobre o futebol masculino brasileiro?</li> <li>• Ao sortear um time, é mais provável ter saldo de gols positivo ou mais de 15 vitórias?</li> </ul>
<p><b>Preparando o Relatório:</b> Esteja pronto para apresentar suas descobertas para a turma!</p>

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

#### 4.2.2 Atividade 2: Probabilidades Simples e Condicionais

Esta atividade tem como objetivo introduzir e consolidar os conceitos de eventos dependentes e independentes e o cálculo de probabilidades em diferentes contextos. A proposta está alinhada à habilidade EF09MA20 da BNCC, que prevê que o estudante reconheça, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcule a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

No Ensino Médio, a atividade desenvolve a habilidade EM13MAT311, que consiste em identificar e descrever o espaço amostral para resolver e elaborar problemas de probabilidade. Neste contexto, a habilidade é aplicada para a resolução de problemas que envolvem o cálculo de probabilidade condicional, utilizando os dados reais dos campeonatos masculino e feminino para a aplicação e comparação desses conceitos.

A seguir, apresenta-se, no Quadro 4.4, a proposta da Atividade 2, construída a partir dessas habilidades e voltada à análise e resolução de situações que envolvem o uso de probabilidades em contextos reais.

Quadro 4.4. Atividade 2

<b>Problema:</b> Como calcular a probabilidade de um evento no futebol?
<b>Desafio 1</b> No Brasileirão Masculino, se todos os 20 times tivessem a mesma probabilidade: a) Qual seria a probabilidade de um time específico ser campeão? b) E a probabilidade de um time específico ser rebaixado?
<b>Desafio 2</b> Agora, usando os dados da tabela, calcule a probabilidade de sortear um time do Brasileirão Masculino 2024 que: a) Seja do Top 5 da tabela; b) Tenha sofrido mais de 50 gols; c) Não tenha saldo de gols (SG) negativo (ou seja, SG positivo ou zero). <b>Dica:</b> Para saber a probabilidade, divida o número de times que se encaixam no que você quer pelo número total de times.
<b>Desafio 3</b> No Campeonato Brasileiro Feminino de 2024, sabendo que um time tem SG positivo, qual a probabilidade de estar entre os 5 primeiros colocados?
<b>Preparando o Relatório:</b> Esteja pronto para explicar para a turma como você resolveu o Desafio 3.

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

#### 4.2.3 Atividade 3: Probabilidade Condicional e Independência no Futebol

Esta atividade, exibida no Quadro 4.5, tem como objetivo aprofundar a compreensão dos conceitos de probabilidade condicional e independência entre eventos, utilizando situações do contexto esportivo como ponto de partida. A proposta está alinhada à habilidade EF09MA20, que orienta o estudante a aplicar o teste de independência entre eventos por meio da relação  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  e à habilidade EM13MAT311, que propõe identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios e realizar a contagem das possibilidades como base para

resolver e elaborar problemas de probabilidade, favorecendo o raciocínio lógico e a interpretação dos resultados obtidos.

Com base em dados do Campeonato Brasileiro Masculino e Feminino de 2024, busca-se promover a análise crítica e a comparação de probabilidades, incentivando o aluno a explorar situações que envolvem o cálculo e a interpretação de probabilidades condicionais e independentes. A atividade também possibilita identificar relações de dependência ou independência entre eventos e interpretar esses resultados de maneira contextualizada.

#### Quadro 4.5. Atividade 3

<p><b>Problema:</b> Quando duas informações são independentes no futebol?</p>
<p><b>Desafio 1</b></p> <p>No Brasileirão Masculino, investigue:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Calcule a probabilidade de marcar mais de 60 gols estando no G4;</li> <li>Calcule a probabilidade de marcar mais de 60 gols entre todos os times;</li> <li>Compare os resultados: O G4 eleva ou reduz a chance de mais de 60 gols?</li> </ol>
<p><b>Desafio 2</b></p> <p>No Brasileirão Feminino, teste se os eventos são independentes seguindo os passos indicados:</p> <p style="text-align: center;">A: time ter mais de 30 pontos    e    B: time ter saldo de gols positivo.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Calcule <math>P(A)</math>: probabilidade do time ter mais de 30 pontos;</li> <li>Calcule <math>P(B)</math>: probabilidade do time ter saldo de gols positivo;</li> <li>Calcule <math>P(A \cap B)</math>: probabilidade do time ter mais de 30 pontos e saldo de gols positivo;</li> <li>Calcule <math>P(A) \times P(B)</math>;</li> <li>Compare: <math>P(A \cap B)</math> é igual a <math>P(A) \times P(B)</math>?</li> </ol> <p><b>Conclusão:</b> Se forem iguais, os eventos são independentes. Caso contrário, são dependentes.</p>
<p><b>Desafio 3</b></p> <p>O saldo de gols reflete, em geral, o desempenho de uma equipe ao longo da temporada. Times que marcam mais do que sofrem costumam apresentar melhores resultados e entram em campo com maior confiança, enquanto seus adversários enfrentam pressão adicional. Por isso, é raro que equipes com saldo negativo permaneçam entre as primeiras colocações.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Verifique esta afirmação no Brasileirão Masculino;</li> <li>Calcule a probabilidade de um time estar da décima posição em diante (posições 10 a 20), dado que tem saldo de gols menor ou igual a zero.</li> </ol>
<p><b>Preparando o Relatório:</b> Esteja pronto para apresentar à turma o seu teste de independência desenvolvido no Desafio 2!</p>

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

#### 4.2.4 Atividade 4: Teorema de Bayes e Aplicações

Esta atividade tem como objetivo introduzir e aplicar o Teorema de Bayes em situações contextualizadas, destacando suas possibilidades de uso na Educação Básica. Embora não seja um teorema explicitamente previsto na BNCC, nem seja amplamente abordado nos livros didáticos, ele oferece grande potencial para promover o raciocínio probabilístico e o pensamento crítico dos estudantes. De acordo com Moraes e Costa (2024, p. 3), “propor atividades que apliquem o teorema em situações práticas e reais confere significado ao que está sendo aprendido, amplia o conhecimento sobre outras ciências e motiva os alunos.”

A proposta está alinhada à habilidade EM13MAT511, que incentiva a exploração de diferentes partições do espaço amostral, o que permite discutir o Teorema de Bayes como uma ferramenta para atualização de probabilidades diante de novas evidências. Por meio desse enfoque, busca-se torná-lo mais acessível e significativo aos alunos, aproximando a matemática de contextos reais e interdisciplinares.

A seguir, apresenta-se a proposta da Atividade 4 no Quadro 4.6, construída para explorar a aplicação do Teorema de Bayes em situações que envolvem probabilidades condicionais e eventos dependentes.

## Quadro 4.6. Atividade 4

**Problema:** Como “pensar ao contrário” usando probabilidades?

**Desafio 1**

No Brasileirão Masculino, queremos estimar a probabilidade de que um time escolhido ao acaso tenha empatado mais de 10 jogos. Para isso, vamos dividir os times em dois grupos e aplicar a regra da probabilidade total.

**Estratégia:** Vamos dividir em casos!

Calcule as probabilidades de cada caso e siga os passos a seguir.

- **Caso 1:** Times do Top 5

$$P(\text{ser do Top 5}) \quad \text{e} \quad P(\text{ter mais de 10 empates} \mid \text{ser do Top 5})$$

- **Caso 2:** Demais times (posições 6 a 20)

$$P(\text{não ser do Top 5}) \quad \text{e} \quad P(\text{ter mais de 10 empates} \mid \text{não ser do Top 5})$$

1. Calcule as probabilidades solicitadas em cada caso a partir dos resultados do Brasileirão.
2. No Caso 1, calcule  $P(\text{Top 5}) \times P(\text{Empate} > 10 \mid \text{Top 5})$ .
3. No Caso 2, calcule  $P(\text{Demais}) \times P(\text{Empate} > 10 \mid \text{Demais})$ .
4. Some os dois resultados obtidos nos passos anteriores e interprete: essa soma corresponde à probabilidade de um time qualquer ter empatado mais de 10 jogos?

**Probabilidade Total:**

$$P(\text{Empate} > 10) = \underbrace{P(\text{Top 5}) \times P(\text{Empate} > 10 \mid \text{Top 5})}_{\text{Caso 1}} + \underbrace{P(\text{Demais}) \times P(\text{Empate} > 10 \mid \text{Demais})}_{\text{Caso 2}}$$

**Desafio 2**

Agora, vamos inverter o raciocínio do Desafio 1!

No Desafio 1, calculamos a probabilidade de um time ter muitos empates sabendo que era do Top 5. Agora, queremos responder à seguinte pergunta:

- Se um time tem mais de 10 empates, qual a probabilidade de ele estar no Top 5?

**Dica:** Use os resultados do Desafio 1 e lembre-se da fórmula:

$$P(\text{Top 5} \mid >10 \text{ empates}) = \frac{P(\text{Top 5}) \times P(>10 \text{ empates} \mid \text{Top 5})}{P(>10 \text{ empates})}$$

- Como o denominador se relaciona com a probabilidade total obtida no Desafio 1?

**Desafio 3**

Você acabou de resolver com sucesso o Desafio 2 usando o Teorema de Bayes!

Agora chegou a hora de mostrar que você realmente entendeu o conceito!

O Desafio 3 segue exatamente a mesma lógica. Descubra, para o Brasileirão Feminino de 2024:

- Se um time tem saldo de gols negativo, qual a probabilidade de estar entre os últimos 2 colocados?

**Dica:** Defina os eventos, calcule as probabilidades e encontre a resposta!

**Preparando o Relatório:** Esteja pronto para explicar como funciona o “pensamento ao contrário” do Desafio 2!

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

#### 4.2.5 Atividade 5: Análise Comparativa

Esta atividade tem como objetivo promover a síntese dos conceitos probabilísticos trabalhados nas etapas anteriores, incentivando o aluno a aplicar de forma criativa os conhecimentos adquiridos. A proposta está alinhada às habilidades EF07MA34, que propõe planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências, e EF09MA20, que orienta o aluno a reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes, calculando a probabilidade de sua ocorrência em ambos os casos.

Nesta atividade, parte-se do pressuposto de que os estudantes já dominam as ferramentas básicas de análise probabilística e estão prontos para aplicá-las na elaboração e resolução de problemas próprios. O objetivo é consolidar a compreensão conceitual, promovendo autonomia investigativa e criatividade na construção de experimentos baseados em dados.

A seguir, apresenta-se a proposta da Atividade 5 no Quadro 4.7, desenvolvida a partir de informações do Campeonato Brasileiro Masculino e Feminino e voltada à criação, análise e interpretação de experimentos probabilísticos, estimulando o raciocínio crítico dos alunos.

## Quadro 4.7. Atividade 5

**Problema:** Como comparar desempenhos de forma justa usando probabilidades?

---

**Desafio 1**

No Campeonato Brasileiro Masculino de 2024, avalie o desempenho do Corinthians considerando os eventos  $A$  : Terminar entre os 8 primeiros e  $B$  : Ter saldo de gols positivo.

- Calcule  $P(A)$ ,  $P(B)$  e  $P(A \cap B)$ .
- Teste se  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  para avaliar se os eventos são independentes.
- Calcule  $P(A | B)$  e  $P(B | A)$  e interprete seus significados.

Agora, repita a mesma análise para o Corinthians no Campeonato Brasileiro Feminino de 2024.

---

**Desafio 2**

O saldo de gols (SG) é um indicador de desempenho, mas será que ele está realmente associado às melhores posições?

Usando os dados da tabela do Brasileirão Masculino de 2024, investigue a relação entre estar no Top 5 e ter SG positivo:

- Calcule  $P(\text{Top 5} | SG > 0)$ .
- Calcule  $P(SG > 0 | \text{Top 5})$ .

**Análise:** Com base nos valores encontrados, discuta o que parece mais determinante para o desempenho: ter SG positivo ou estar entre os primeiros colocados?

---

**Desafio 3**

Crie seu próprio problema probabilístico!

Elabore um experimento usando dados dos dois Campeonatos (Masculino e Feminino, 2024) e calcule pelo menos duas probabilidades.

**Exemplo:** Se sortearmos um time do Brasileirão Masculino ou Feminino de 2024, qual a probabilidade de ele ter mais de 10 vitórias e SG positivo?

Troca entre grupos: Troque seu problema com outro grupo e resolva o problema deles.

Preparando o Relatório: Explique à turma como você resolveu o Desafio 3.

#### 4.2.6 Atividade 6: O Fator Casa

A Atividade 6, apresentada no Quadro 4.8, tem como foco o estudo da probabilidade condicional aplicada à tomada de decisão estratégica em contextos reais. O objetivo é levar os alunos a analisar situações que envolvem eventos sucessivos, como o desempenho de um time jogando em casa (mandante) ou fora de casa (visitante).

A proposta está alinhada às habilidades EM13MAT312, que propõe resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidades em experimentos aleatórios sucessivos, e EM13MAT106, que orienta o estudante a reconhecer situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando em conta riscos probabilísticos. Cabe destacar que os dados utilizados nesta atividade foram sistematizados especificamente para sua elaboração, conforme detalhado ao final da seção 4.1.

Nessa perspectiva, a atividade busca desenvolver a capacidade dos estudantes de interpretar probabilidades, avaliar cenários de risco e retorno e utilizar esses conhecimentos na compreensão de situações reais. Com base na análise probabilística dos desempenhos de diferentes times como mandantes e visitantes no Campeonato Brasileiro Masculino e Feminino, pretende-se estimular o pensamento crítico e evidenciar a Matemática como ferramenta de interpretação e tomada de decisão.

Quadro 4.8. Atividade 6

<b>Problema:</b> O mando de campo beneficia igualmente times grandes e pequenos?				
<b>Dados fornecidos:</b>				
<b>Time</b>	<b>Condição</b>	<b>Vitórias</b>	<b>Empates</b>	<b>Derrotas</b>
<b>Botafogo(Campeão)</b>	Mandante	12	5	2
	Visitante	11	5	3
<b>Cuiabá(Rebaixado)</b>	Mandante	3	5	11
	Visitante	2	7	10
<b>Desafio 1:</b> Use os dados do Botafogo como mandante e visitante para calcular as probabilidades abaixo e avaliar se jogar em casa trouxe uma vantagem significativa ao campeão. A vantagem de jogar em casa foi significativa para o campeão?				
a) $P(\text{Vitória} \mid \text{Mandante})$		b) $P(\text{Vitória} \mid \text{Visitante})$		
c) $P(\text{Não Perder} \mid \text{Mandante})$		d) $P(\text{Não Perder} \mid \text{Visitante})$		
<b>Desafio 2:</b> Para o Cuiabá, calcule as probabilidades e compare o desempenho como mandante e como visitante. Em qual condição o time foi mais competitivo?				
a) $P(\text{Vitória} \mid \text{Mandante})$		b) $P(\text{Vitória} \mid \text{Visitante})$		
c) $P(\text{Não Perder} \mid \text{Mandante})$		d) $P(\text{Não Perder} \mid \text{Visitante})$		
<b>Desafio 3:</b> Compare agora o Botafogo como visitante com o Cuiabá como mandante. O Botafogo teve maior probabilidade de vencer fora de casa do que o Cuiabá em casa?				
a) $P(\text{Vitória} \mid \text{Visitante})$ do Botafogo		b) $P(\text{Vitória} \mid \text{Mandante})$ do Cuiabá		
<b>Desafio 4</b>				
(a) <b>Complete:</b> Analisando os resultados, percebemos que o Botafogo teve um desempenho muito bom nos dois cenários. A probabilidade de vitória como mandante foi um pouco maior do que como visitante, com uma diferença de _____. Isso mostra que jogar em casa ajudou, mas o time já era forte em qualquer condição. No caso do Cuiabá, a situação foi diferente. A probabilidade de não perder foi menor quando jogou em casa e maior quando jogou fora, com diferença de _____. Isso indica que, para um time que lutou contra o rebaixamento, jogar em casa não funcionou como vantagem. Pelo contrário, sua atuação como mandante foi _____ do que sua atuação como visitante.				
(b) <b>Desafio Extra:</b> Se você fosse um dirigente com recursos limitados, investiria em melhorar o desempenho fora de casa de um time grande ou em fortalecer o mando de campo de um time pequeno? Justifique usando os dados e explique a base matemática da sua escolha.				

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

### 4.3 Material do Professor

Nesta seção será apresentado o material destinado ao professor seguindo a abordagem do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP), baseada em Proença (2018). São detalhados os encaminhamentos didáticos estruturados nas cinco ações propostas pelo autor: a escolha do problema, a introdução do problema aos alunos, o auxílio durante a resolução, a discussão das estratégias utilizadas e a articulação dessas estratégias ao conteúdo matemático. Além disso, são apresentadas as respostas esperadas e possíveis caminhos de solução para cada atividade do material do aluno, oferecendo ao professor um guia completo para condução da sequência didática.

As orientações de cada atividade estão organizadas em caixas de texto, de modo a proporcionar uma visualização mais clara e objetiva dos passos didáticos. Antes de apresentar o material destinados aos professores, é importante destacar que, ao longo deste, aparecem trechos entre aspas que representam sugestões de falas que podem ser utilizadas durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula. Elas não são obrigatórias, mas funcionam como possibilidades de intervenção que auxiliam o(a) professor(a) na condução da aula dentro da perspectiva da Resolução de Problemas, na qual o professor atua como mediador do processo.

#### 4.3.1 Atividade 1: Fundamentos da Probabilidade no Futebol

**Habilidades (BNCC):** EF06MA30, EF08MA22, EM13MAT312.

**Problema Norteador:** “Como os times do Brasileirão se distribuem entre saldo de gols positivo e número de vitórias? Existe relação entre essas duas características?”

#### **Ação 1: A escolha do problema**

1. Por que este problema? **Exemplo de resposta possível:** Este problema foi escolhido por constituir uma porta de entrada intuitiva e visual para os conceitos iniciais da teoria de conjuntos aplicados à Probabilidade. A contextualização no futebol favorece o engajamento dos alunos, enquanto a tarefa de classificar times em categorias, como saldo de gols positivo e número de vitórias, os leva a refletir sobre como essas características se relacionam. Esse processo se traduz naturalmente em operações com conjuntos, facilitando a compreensão dos conceitos abstratos envolvidos.
2. Quais conceitos, princípios e procedimentos matemáticos já estudados os alunos precisam mobilizar? **Exemplo de resposta possível:** Os alunos precisarão mobilizar leitura e interpretação de tabelas, habilidades de contagem e listagem e uma compreensão inicial de classificação por propriedades.

3. Qual conteúdo ou conceito será introduzido? **Exemplo de resposta possível:** Serão introduzidos e construídos os conceitos de Espaço Amostral ( $\Omega$ ), Evento, Interseção de Eventos ( $A \cap B$ ), União de Eventos ( $A \cup B$ ) e Complementar de um Evento ( $A^c$ ).
4. Que relações entre conhecimentos serão estabelecidas? **Exemplo de resposta possível:** A atividade estabelece a relação entre a linguagem cotidiana (“times que têm as características  $A$  e  $B$ ”) e a linguagem matemática formal ( $A \cap B$ ), e como a teoria de conjuntos fornece a base para a modelagem de situações probabilísticas.

### **Ação 2: Introdução do problema**

1. Contextualização e Motivação:
  - Inicie com perguntas motivadoras para a turma: “Um time que faz muitos gols (SG positivo) geralmente ganha muitos jogos?”; “É possível um time ter saldo positivo mas poucas vitórias?”.
  - Promova um breve debate, ouvindo as opiniões e intuições dos alunos.
2. Apresentação Formal do Problema:
  - Apresente o problema norteador escrito no quadro ou em um slide.
  - Explique que, para investigar essas questões, a turma se tornará uma equipe de “detetives do futebol”, cuja missão é descobrir padrões escondidos na tabela do campeonato.
3. Organização da Turma:
  - Divida os alunos em grupos pequenos (3 a 4 integrantes).
  - Distribua a folha de atividade com a tabela do Brasileirão e as questões guia.
4. Mobilização para a Tarefa:
  - Finalize a introdução com um chamado para a ação: “Vamos às pistas! Mãos à obra para descobrir esses padrões interessantes.”

### **Ação 3: Auxílio aos alunos durante a resolução**

- Fase 1 - Coleta e Identificação:
  - Questione grupos que parecem hesitantes: “Como vocês estão identificando os times com SG positivo? E os com mais de 15 vitórias?”.
  - Observe a contagem: “Conferiram se não esqueceram nenhum time na lista?”.

- Fase 2 - Análise e Interseção:
  - Questão-chave 1 (Interseção): “Algum time aparece nas duas listas ao mesmo tempo? O que isso significa na prática?”.
  - Questão-chave 2 (União e Complementar): “E quando juntamos todas as equipes que aparecem em pelo menos uma das listas? O conjunto aumenta muito? E os times que não aparecem em nenhuma delas?”.
  - Dificuldade Esperada: Fique atento à possível confusão entre “até 15” e “mais de 15” vitórias. Reforce a leitura atenta do enunciado.
- Fase 3 - Representação:
  - Incentive a organização dos dados: “Que tal fazer um desenho com dois círculos sobrepostos para visualizar isso?”.
  - Introduza os símbolos de forma interrogativa: “O símbolo  $\cap$  lembra alguma coisa para vocês? E o  $\cup$ ?”.

#### **Ação 4: Discussão das estratégias dos alunos**

- Socialização das Estratégias:
  - Peça que diferentes grupos apresentem suas listas para os eventos  $A$  e  $B$ .
  - Peça que mostrem no quadro como encontraram  $A \cap B$  e  $A \cup B$ .
  - Peça aos grupos que usaram diagramas de Venn para apresentá-los.
- Comparação e Debate:
  - Pergunte à turma: “Os grupos chegaram às mesmas listas? Alguém organizou os dados de uma forma diferente?”.
  - Promova a reflexão: “O que acham de  $A \cap B$  não ser vazio? Isso faz sentido no futebol? O que isso nos diz?”.

#### **Ação 5: Articulação das estratégias ao conteúdo**

- Sistematização dos Conceitos:
  - Espaço Amostral ( $\Omega$ ): “O conjunto completo de 20 times que vocês listaram é o que chamamos de espaço amostral”.
  - Eventos: “Cada característica que investigamos é um evento. Vamos chamá-los de  $A$  e  $B$ ”.
  - “A intersecção ( $A \cap B$ ) são os times que têm ambas as características”.
  - “A união ( $A \cup B$ ) são os times que têm pelo menos uma das características”.
  - “O complementar  $A^c$  são os times que não têm a característica  $A$ ”.

- Generalização:

“Essas operações que usamos entre os eventos com os times servem para qualquer situação onde estamos trabalhando com conjuntos e possibilidades!”.

### Respostas Comentadas:

- $A = \{\text{Botafogo, Palmeiras, Flamengo, Fortaleza, Internacional, São Paulo, Corinthians, Cruzeiro}\}$ .  $A$  é composto por 8 times.
- $B = \{\text{Botafogo, Palmeiras, Flamengo, Fortaleza, Internacional, São Paulo}\}$ .  $B$  é composto por 6 times.
- $A \cap B = \{\text{Botafogo, Palmeiras, Flamengo, Fortaleza, Internacional, São Paulo}\}$ .  $A \cap B$  é composto por 6 times.
- $A \cup B = \{\text{Botafogo, Palmeiras, Flamengo, Fortaleza, Internacional, São Paulo, Corinthians, Cruzeiro}\}$ .  $A \cup B$  é composto por 8 times.
- $\bar{A}$ : Todos os times com  $\text{SG} \leq 0$  (12 times)
- “O que  $A \cap B$  nos diz sobre o futebol brasileiro?":  $A \cap B$  mostra os times que, ao mesmo tempo, ficaram entre os 8 primeiros e apresentaram saldo de gols positivo. Isso indica que os melhores colocados no campeonato normalmente também exibem desempenho ofensivo e defensivo superior, evidenciado por um SG positivo. Em outras palavras, o conjunto dos times de alto rendimento competitivo coincide fortemente com os times que mantêm um saldo de gols favorável.

**Reflexões a serem incentivadas:** Os dados revelam que times bem sucedidos tendem a ser bons em múltiplos aspectos. Fale sobre o conceito de eventos dependentes no contexto esportivo.

- É mais provável saldo positivo ( $A$ ) OU mais de 15 vitórias ( $B$ )?

$$P(A) = \frac{8}{20} = 40\% \quad P(B) = \frac{6}{20} = 30\% \quad P(A \cup B) = \frac{8}{20} = 40\%$$

**Reflexões a serem incentivadas:** Os dados revelam que  $B \subset A$  (todo time com muitas vitórias tem saldo positivo). Fale sobre o conceito de inclusão entre eventos.

### Avaliação:

- Processual: Participação nas discussões, organização dos dados.
- Conceitual: Compreensão dos símbolos e operações.
- Atitudinal: Trabalho em grupo, argumentação baseada em dados.

## 4.3.2 Atividade 2: Probabilidades simples e condicionais

**Habilidades (BNCC):** EF09MA20 , EM13MAT311.

**Problema Norteador:** “Como podemos medir e comparar a sorte ou azar de diferentes situações?”

**Ação 1: A escolha do problema**

1. Por que este problema? **Exemplo de resposta possível:** Este problema é fundamental para fazer a transição da teoria de conjuntos para o cálculo de chances. Ele cria uma necessidade concreta de quantificar incertezas, introduzindo a definição clássica de forma intuitiva. A probabilidade condicional surge naturalmente quando uma informação extra modifica o espaço amostral, abrindo caminho para conceitos mais avançados.
2. Quais conceitos, princípios e procedimentos matemáticos já estudados os alunos precisam mobilizar? **Exemplo de resposta possível:** Os alunos precisarão mobilizar os conceitos de Espaço Amostral e Evento (da Atividade 1), além de habilidades de fração, porcentagem e razão.
3. Qual conteúdo ou conceito será introduzido? **Exemplo de resposta possível:** Serão introduzidos formalmente os seguintes conceitos: Serão introduzidos formalmente os seguintes conceitos:
  - Probabilidade Clássica:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ ;
  - Probabilidade Condicional:  $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ;
  - Probabilidade do Evento Complementar:  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .
4. Que relações entre conhecimentos serão estabelecidas? **Exemplo de resposta possível:** A atividade estabelece a relação entre a contagem de elementos (teoria de conjuntos) e o cálculo de probabilidades. Também mostra como uma informação prévia pode restringir o universo de possibilidades, alterando a probabilidade de um evento.

**Ação 2: Introdução do problema**

1. Contextualização e Motivação:

Inicie com perguntas motivadoras: “Se eu sortear um time qualquer, qual a chance de ele ser campeão? É a mesma para todos?”; “Se eu te disser que esse time tem saldo de gols positivo, essa chance aumenta?”; “Como traduzir essa chance em um número?”.

## 2. Apresentação Formal do Problema:

Apresente o problema norteador. Explique que os alunos agora atuarão como “calculistas da sorte”, aprendendo a linguagem matemática usada para medir chances e como uma pista nova pode revolucionar uma previsão.

## 3. Organização da Turma:

Mantenha os grupos da atividade anterior. Distribua a folha de atividade.

## 4. Mobilização para a Tarefa:

Finalize: “Vamos aprender a calcular chances e descobrir como uma informação pode mudar completamente o jogo!”

### **Ação 3: Auxílio aos alunos durante a resolução**

- Desafio 1 (Probabilidade Simples):

- Questione: “Se todos os times tivessem a mesma chance, como calcularíamos?”; “O que seriam casos favoráveis e casos possíveis aqui?”.

- Desafio 2 (Evento Complementar):

- Instigue: “Calcular a chance de não ser rebaixado é mais fácil pela definição ou pensando no oposto?”.

- Desafio 3 (Probabilidade Condicional - Intuição):

- Questão-chave: A informação “sabendo que tem SG positivo” muda o total de casos possíveis? Por quê? Como representar isso?.

**Dificuldade Esperada:** A mudança do espaço amostral no cálculo da probabilidade condicional é o ponto crítico. Observe se os alunos mantêm o total geral (16) ou se ajustam para o total da condição (10).

#### Ação 4: Discussão das estratégias dos alunos

- Socialização das Estratégias:
  - Peça que grupos compartilhem como calcularam as probabilidades simples. Destaque diferentes formas de representação (fração, decimal, porcentagem).
  - Foque no Desafio 3: Peça que expliquem com suas palavras como fizeram o cálculo condicional.
- Comparação e Debate:
  - “A probabilidade de estar no Top 5 mudou muito quando consideramos apenas times com SG positivo? O que isso significa?”.
  - “Alguém usou o evento complementar no Desafio 2? Foi mais fácil?”.

#### Ação 5: Articulação das estratégias ao conteúdo

- Sistematização dos Conceitos:
  - Definição Clássica: A estratégia de dividir casos favoráveis por casos possíveis é a Definição Clássica de Probabilidade:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ .
  - Probabilidade Condicional: Quando temos uma informação extra, mudamos o universo. Isso é a Probabilidade Condicional:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . A barra vertical “|” significa pode ser lida como “dado que” ou “condicionado a”.
  - Evento Complementar: Quando é mais simples pensar no que não ocorre, usamos o Evento Complementar:  $P(\text{não } A) = 1 - P(A)$ .
- Generalização: “A probabilidade condicional é usada sempre que temos uma informação prévia, desde diagnósticos médicos até previsões de jogo.”

#### Respostas comentadas:

##### Desafio 1:

- a) A probabilidade de um time específico ser campeão é de 5%, já que cada um dos 20 times tem a mesma chance inicial, resultando em  $P(\text{Campeão}) = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$ .

**Reflexões a serem incentivadas:** Aqui se introduz o conceito de equiprobabilidade, quando todos os elementos do espaço amostral têm a mesma chance ou probabilidade de ocorrer.

- b) A probabilidade de um time específico ser rebaixado é de 20%, considerando que 4 dos 20 times caem para a Série B. Assim,  $P(\text{Rebaixado}) = \frac{4}{20} = 0,20 = 20\%$ .

**Reflexões a serem incentivadas:** Reforçar que a probabilidade está diretamente relacionada ao número de casos favoráveis em relação ao total de casos possíveis.

**Desafio 2:**

- a) A probabilidade de sortear um time que esteja entre os cinco primeiros colocados (Top 5) é de 25%, dado que  $P(\text{Top 5}) = \frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$ .  
Os times que estão no Top 5 são: Botafogo, Palmeiras, Flamengo, Fortaleza e Internacional.
- b) Probabilidade de ter sofrido mais de 50 gols:  $P(GC > 50) = \frac{6}{20} = 0,30 = 30\%$ .  
Times: Vasco (55), Vitória (52), Atlético-MG (54), Juventude (59), Criciúma (61), Atlético-GO (58)
- c) A probabilidade de sortear um time no brasileirão e ele não ter SG negativo é de 45%, dado que 9 dos 20 times possuem saldo de gol maior ou igual a zero. Assim,  $P(SG \geq 0) = \frac{9}{20} = 0,45 = 45\%$ .

**Reflexões a serem incentivadas:** Introduzir o conceito de evento complementar e o cálculo de sua probabilidade, usando a relação  $P(A^c) = 1 - P(A)$ . Assim, pode-se obter de forma alternativa que  $P(SG \geq 0) = 1 - P(SG < 0) = 1 - \frac{11}{20} = 0,45$ .

**Desafio 3:**

Para encontrar a probabilidade de um time estar entre os cinco primeiros dentre aqueles que têm saldo de gols positivo, considera-se apenas os times com  $SG > 0$ . Há, ao todo, 10 times nessa situação. Dentro desse grupo reduzido, contam-se quantos estão entre os cinco primeiros colocados. Observa-se que 5 desses 10 times pertencem ao Top 5. Portanto, a razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis é:

$$\frac{5}{10} = 0,5 = 50\%.$$

Isso mostra que, entre os times com saldo de gols positivo, metade aparece entre os cinco primeiros colocados.

**Reflexões a serem incentivadas:**

Promover uma análise comparativa entre  $P(\text{Top 5})$  e  $P(\text{Top 5} \mid \text{SG positivo})$ , destacando que saber que um time possui saldo de gols positivo eleva significativamente a probabilidade de ele estar entre os cinco primeiros colocados.

### **Momento de formalização:**

Professor(a), observe que os alunos acabaram de resolver o Desafio 3 de forma intuitiva. Este é um excelente momento para nomear e formalizar o conceito que emergiu durante a atividade: a probabilidade condicional. A seguir, você encontrará um roteiro que pode guiá-lo na sistematização do conteúdo junto aos alunos.

### **Roteiro para a Sistematização**

#### **1. Retomada do Raciocínio dos Alunos:**

- Inicie perguntando: No desafio, o que fizemos de diferente quando a pergunta começou com “Sabendo que um time tem SG positivo...”?
- Espera-se que os alunos percebam que mudaram o total de times considerados.
- Destaque: Vocês criaram um “novo universo” apenas com times que têm SG positivo.

#### **2. Apresentação do Conceito e Notação:**

- Apresente a nomenclatura: “Essa ideia de calcular uma probabilidade dentro de um novo universo tem um nome: Probabilidade Condicional.”
- Escreva a notação formal no quadro:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

- Explique cada parte:
  - $P(A|B)$ : “Probabilidade de A acontecer, dado que B já aconteceu.”
  - $B$ : “É a nossa condição, a informação nova que recebemos. Ela define o novo universo.”
  - $A \cap B$ : “São os casos que nos interessam, dentro desse novo universo.”

#### **3. Vinculação com o Desafio Resolvido:**

- Mostre a correspondência com o que os alunos já calcularam. Explique que  $B$  representa o grupo de times com saldo de gols positivo, ou seja, agora estamos olhando apenas para esse “novo universo”. Mostre também que  $A \cap B$  corresponde aos times que estão no Top 5 e, ao mesmo tempo, possuem saldo de gols positivo. Daí se encontra a probabilidade de sortear um time que esteja no Top 5 sabendo que ele tem

saldo de gols positivo:

$$P(\text{Top 5} | \text{SG positivo}) = \frac{P(\text{Top 5} \cap \text{SG positivo})}{P(\text{SG positivo})} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{10}{20}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

- Enfatize: “A fórmula é só um jeito formal de escrever a conta que vocês já fizeram: casos que nos interessam dividido pelos casos possíveis, mas dentro da condição.”

### Atividade Rápida de Fixação:

Proponha aos alunos a seguinte questão: “Agora, usando a mesma lógica, como calcularíamos  $P(\text{SG positivo} | \text{Top 5})$ ?” Em seguida, deixe-os discutir e tentar justificar suas respostas. A solução esperada é  $\frac{5}{5} = 100\%$ .

Essa atividade reforça que a ordem  $P(A|B) \neq P(B|A)$  importa, assim, podemos concluir que a probabilidade condicional surge da necessidade de responder perguntas que incluem informações adicionais sobre um evento já conhecido. Ela nos permite recalculer a probabilidade levando em conta um “novo universo” reduzido. Nesse sentido, a expressão  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  formaliza exatamente esse raciocínio intuitivo, mostrando matematicamente como ajustamos a probabilidade quando sabemos que o evento  $B$  já ocorreu.

### 4.3.3 Atividade 3: Probabilidade Condicional e Independência no Futebol

**Habilidades (BNCC):** EF09MA20, EM13MAT311.

**Problema Norteador:** Quando uma informação não muda a probabilidade de outra coisa acontecer? Como testar se eventos são independentes?

#### Ação 1: A escolha do problema

1. Por que este problema? **Exemplo de resposta possível:** Este problema introduz o conceito de independência de forma exploratória. Ele provoca um desafio cognitivo ao confrontar a intuição de que eventos no futebol são sempre correlacionados, levando os alunos a identificar a relação  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  como critério de independência.
2. Quais conceitos, princípios e procedimentos matemáticos já estudados os alunos precisam mobilizar? **Exemplo de resposta possível:** Os alunos precisarão mobilizar o cálculo de probabilidades simples e condicionais, e a compreensão de interseção de eventos.
3. Qual conteúdo ou conceito será introduzido? **Exemplo de resposta possível:** Será

introduzido e formalizado o conceito de Independência Estatística entre dois eventos, incluindo sua definição e teste.

4. Que relações entre conhecimentos serão estabelecidas? **Exemplo de resposta possível:** A atividade estabelece a relação entre a probabilidade condicional  $P(A|B)$  e a probabilidade simples  $P(A)$  para definir independência. Também diferencia claramente eventos disjuntos (mutuamente exclusivos) de eventos independentes, uma confusão comum.

### **Ação 2: Introdução do problema**

1. Contextualização e Motivação:

Inicie com exemplos: “Saber que choveu muda a probabilidade de eu encontrar guarda-chuvas? E saber que um time está no G4, muda a chance de ele ter feito muitos gols?”.

2. Apresentação Formal do Problema:

Apresente o problema norteador. Contextualize: “No futebol, algumas coisas estão conectadas, outras não. Hoje, seremos caçadores de relações para descobrir a diferença.”

3. Organização da Turma:

Mantenha os grupos. Distribua a folha de atividade.

4. Mobilização para a Tarefa:

“Vamos descobrir o que é e o que não é independente no futebol!”

### **Ação 3: Auxílio aos alunos durante a resolução**

- Desafio 1 (Comparação de Probabilidades):

Questione: “Para calcular  $P(> 60 \text{ gols} | G4)$ , qual é o novo universo? Como ele se compara com o universo de  $P(> 60 \text{ gols})$  geral?”.

- Desafio 2 (Teste de Independência):

Questão-chave: “Se os eventos fossem realmente independentes, a probabilidade de ocorrerem ao mesmo tempo, isto é,  $P(A \cap B)$ , deveria ser igual ao produto das probabilidades individuais  $P(A)P(B)$ . Os dados observados confirmam essa igualdade? Se houver diferença entre esses valores, o que isso indica sobre a relação entre os eventos?”.

- Desafio 3 (Interpretação Contextual)

Instigue: “A probabilidade condicional calculada é alta? Isso sustenta a afirmação do comentarista?”.

**Dificuldade Esperada:** Os alunos podem confundir o conceito de eventos mutuamente exclusivos ( $A \cap B = \emptyset$ ) com independentes:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Destaque a diferença.

#### Ação 4: Discussão das estratégias dos alunos

- Socialização das Estratégias:

- Peça a comparação entre os valores de  $P(\text{mais de 60 gols} | G4)$  e  $P(\text{mais de 60 gols})$  do Desafio 1.
- Foque no Desafio 2: Pergunte aos grupos se os valores de  $P(A \cap B)$  e  $P(A) \times P(B)$  foram próximos ou diferentes. “O que isso significa sobre a relação entre os eventos?”.

- Comparação e Debate:

- “No Desafio 3, a informação “saldo de gols menor ou igual a zero” foi uma pista forte ou fraca? Por quê?”.
- “Alguém pode dar um exemplo hipotético de dois eventos que seriam independentes no futebol?”.

#### Ação 5: Articulação das estratégias ao conteúdo

- Sistematização dos Conceitos:

- Definição de Independência: “Quando vocês testaram se  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ , estavam verificando a independência estatística.”
- Definição Formal: “Dois eventos A e B são independentes se e somente se  $P(A|B) = P(A)$  ou, equivalentemente,  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .”

- Generalização:

“A independência significa que saber que B ocorreu não dá qualquer informação sobre a ocorrência de A. É como lançar um dado duas vezes: o resultado do primeiro lançamento não afeta o segundo.”

## Respostas Comentadas:

### Desafio 1

a) A probabilidade de um time do brasileirão masculino de 2024 ter mais de 60 gols marcados (GM) dado que ele está entre os 4 primeiros colocados (G4) na tabela de classificação é dada pela fórmula:

$$P(GM > 60 | G4) = \frac{P(GM > 60 \cap G4)}{P(G4)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{20}} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

b) A probabilidade de um time ter marcado mais de 60 gols nesta edição do campeonato é de 5%, já que apenas 1 dos 20 times atingiu essa marca. Assim,

$$P(GM > 60) = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$$

c) Comparação e análise: Podemos comparar a probabilidade de um time marcar mais de 60 gols sabendo que está no G4 com a probabilidade geral entre todos os times do campeonato. No primeiro caso, obtemos 25%, enquanto a probabilidade geral é de apenas 5%. Isso mostra que os dois eventos não são independentes e que estar no G4 aumenta significativamente a chance de marcar mais de 60 gols, tornando essa probabilidade cinco vezes maior do que a média do campeonato.

### Desafio 2

Antes de testarmos se os eventos são independentes, precisamos identificar, dentro da tabela do Brasileirão Feminino, quais times pertencem a cada evento:

- Total de times: 16
- Evento A (times com mais de 30 pontos): 2 times (Corinthians e Ferroviária)
- Evento B (times com SG positivo): 10 times (Corinthians até América Mineiro)
- Evento  $A \cap B$  (times com mais de 30 pontos e SG positivo): 2 times (Corinthians e Ferroviária)

**Cálculo das probabilidades:**

$$P(A) = \frac{2}{16} = 0,125 = 12,5\%$$

$$P(B) = \frac{10}{16} = 0,625 = 62,5\%$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{16} = 0,125 = 12,5\%$$

$$P(A) \times P(B) = 0,125 \times 0,625 = 0,078125 = 7,81\%$$

Comparação:

$$P(A \cap B) = 12,5\% \neq P(A) \times P(B) = 7,81\%$$

Concluimos, portanto, que os eventos são dependentes pois,  $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ .

**Interpretação:** No Campeonato Brasileiro Feminino 2024, ter mais de 30 pontos está fortemente associado a ter saldo de gols positivo. A diferença de 4,69 pontos percentuais ( $12,5 - 7,81$ ) confirma que essas características não são independentes, ou seja times com bons rendimentos no Futebol Brasileiro feminino tendem a ser eficientes tanto na pontuação quanto no saldo de gols.

**Desafio 3**

A organização apresentada a seguir foi construída para mostrar aos alunos como a probabilidade condicional pode ser usada para testar, com base em dados reais, a afirmação de que um time com saldo de gols negativo dificilmente permanece nas primeiras posições da tabela. Para isso, iniciamos com as probabilidades simples:

$$P(\text{SG} \leq 0) = \frac{12}{20} = 0,60 = 60\%$$

$$P(\text{Posição} \geq 10) = \frac{11}{20} = 0,55 = 55\%$$

$$P(\text{SG} \leq 0 | \text{Posição} \geq 10) = \frac{11}{11} = 1,00 = 100\%$$

Esses valores já permitem observar que os times da décima posição em diante quase sempre apresentam saldo de gols negativo. Para responder ao item b) do desafio, aplicamos a definição formal de probabilidade condicional:

$$P(\text{Posição} \geq 10 | \text{SG} \leq 0) = \frac{P(\text{Posição} \geq 10 \cap \text{SG} \leq 0)}{P(\text{SG} \leq 0)} = \frac{\frac{11}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{11}{12} = 0,9167.$$

Concluimos, portanto, que um time com saldo de gols menor ou igual a zero tem cerca de 91,67% de probabilidade de estar da décima posição em diante. Em outras palavras, os dados sustentam fortemente a afirmação apresentada no desafio de que os times com saldo de gols negativo tendem, de fato, a ocupar as posições inferiores da tabela.

#### 4.3.4 Atividade 4: Teorema de Bayes e Aplicações

**Habilidades (BNCC):** EM13MAT511.

**Problema Norteador:** Como pensar ao contrário nas probabilidades? Como descobrir origens a partir de resultados?”

##### **Ação 1: A escolha do problema**

1. Por que este problema? **Exemplo de resposta possível:** Este problema é escolhido por ser a porta de entrada intuitiva para um dos teoremas mais poderosos e contra-intuitivos da probabilidade: o Teorema de Bayes. Ele materializa a ideia de inverter o sentido da condição, mostrando como atualizar nossas crenças (probabilidades) com base em novas evidências, uma habilidade crítica no mundo real.
2. Quais conceitos, princípios e procedimentos matemáticos já estudados os alunos precisam mobilizar? **Exemplo de resposta possível:** Os alunos precisarão mobilizar o cálculo de probabilidades simples, condicionais e da interseção de eventos.
3. Qual conteúdo ou conceito será introduzido? **Exemplo de resposta possível:** Serão introduzidos o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes.
4. Que relações entre conhecimentos serão estabelecidas? **Exemplo de resposta possível:** A atividade estabelece a relação fundamental entre probabilidades diretas, dadas por  $P(\text{evidência}|\text{causa})$ , e probabilidades que invertem o sentido da condição, dadas por  $P(\text{causa}|\text{evidência})$ , mostrando como uma está ligada à outra através do Teorema da Probabilidade Total.

##### **Ação 2: Introdução do problema**

1. Contextualização e Motivação:
 

Use uma analogia: “Um médico vê um sintoma (efeito, ex: febre) e quer descobrir a doença (causa, ex: gripe). Nós vemos um resultado (efeito) e queremos saber a origem (causa).”
2. Apresentação Formal do Problema:

Apresente o problema norteador. Explique que, em muitos momentos, sabemos o que aconteceu, mas queremos descobrir de onde aquilo veio. “Hoje, seremos detetives invertidos.”

3. Organização da Turma: Mantenha os grupos. Distribua a folha de atividade.
4. Mobilização para a Tarefa: “Vamos aprender a virar as probabilidades de cabeça para baixo!”

### **Ação 3: Auxílio aos alunos durante a resolução**

- Desafio 1 (Probabilidade Total):

Instigação: “Para calcular a probabilidade total de um time empatar muito, precisamos dividir o problema em casos. Quais são os casos mutuamente exclusivos que cobrem todos os times?” (Top 5 e Demais).

- Desafio 2 (Invertendo a condição para entender Bayes)

Questão-chave: Agora queremos inverter o sentido da condição: sabendo que um time empata muito, qual a chance de ser do Top 5? Como podemos usar os resultados que já temos do Desafio 1 para responder isso? Qual fração devemos montar?

**Dificuldade Esperada:** O conceito de inversão é contra-intuitivo. Ajude-os a ver que estão pegando a parte do Top 5 e dividindo pelo total de times que empatam muito.

### **Ação 4: Discussão das estratégias dos alunos**

- Socialização das Estratégias:

- Peça que os grupos compartilhem como chegaram ao cálculo da Probabilidade Total no Desafio 1.
- No Desafio 2, pergunte: “Como vocês relacionaram  $P(\text{ser Top 5} | \text{empatou muito})$  com as probabilidades que já tinham calculado?”. Incentive os grupos a irem ao quadro e apresentarem a fração que utilizaram.

- Comparação e Debate:

- “Por que essa inversão é útil?”.

### Ação 5: Articulação das estratégias ao conteúdo

- Sistematização dos Conceitos:
  - Teorema da Probabilidade Total: A ideia de dividir o problema em grupos mutuamente exclusivos para obter uma probabilidade geral é justamente o que expressa o Teorema da Probabilidade Total.
  - Teorema de Bayes: A expressão utilizada para inverter o sentido da condição em uma probabilidade corresponde ao Teorema de Bayes.
  - Cálculo Formal: Apresente no quadro a expressão

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}.$$

Explique o significado de cada termo:  $P(A)$  representa a crença inicial (priori),  $P(B | A)$  corresponde à evidência observada e  $P(A | B)$  é a crença atualizada após incorporar a nova informação (posteriori).

- Generalização:
 

O Teorema de Bayes nos permite atualizar nossas crenças quando recebemos novas evidências. É usado em filtros de spam, diagnósticos médicos e inteligência artificial.

### Respostas Comentadas:

#### Desafio 1

Para resolver este desafio, os alunos irão separar a análise em dois cenários: primeiro considerar apenas os times do Top 5 e depois os demais times. Em cada caso, eles calcularão a probabilidade de um time pertencer ao grupo analisado e, em seguida, a probabilidade de que esse time tenha mais de 10 empates. Assim, será possível combinar essas informações para obter a probabilidade total usando o teorema da probabilidade total.

- Caso 1 - Times do Top 5:

$$P(\text{Top 5}) = \frac{5}{20} = 0,25 = 25\% \quad \text{e} \quad P(>10 \text{ empates} | \text{Top 5}) = \frac{2}{5} = 0,40 = 40\%.$$

- Caso 2 - Demais Times:

$$P(\text{Demais}) = \frac{15}{20} = 0,75 = 75\% \quad \text{e} \quad P(>10 \text{ empates} | \text{Demais}) = \frac{6}{15} = 0,40 = 40\%.$$

- Probabilidade Total:

$$P(\text{mais de 10 empates}) = (0,25 \times 0,40) + (0,75 \times 0,40) = 0,10 + 0,30 = 0,40 = 40\%.$$

## Desafio 2

Neste desafio, os alunos trabalharão com a ideia de inverter o sentido da condição: em vez de perguntar a probabilidade de um time ter muitos empates dado que é do Top 5 (como no Desafio 1), analisaremos a situação oposta. O problema agora é: se escolhermos um time que tem mais de 10 empates, qual é a probabilidade de que ele pertença ao Top 5?

- Relembre os conceitos do Desafio 1 e peça aos alunos que retomem os valores já calculados, como  $P(\text{Top 5})$ ,  $P(\text{mais de 10 empates} | \text{Top 5})$  e  $P(\text{mais de 10 empates})$ .
- Explique que o objetivo agora é determinar, sabendo que um time possui mais de 10 empates, qual é a probabilidade de ele pertencer ao Top 5. Em termos matemáticos, buscamos calcular  $P(\text{Top 5} | \text{mais de 10 empates})$ .
- Abordagem intuitiva por contagem: oriente os alunos a identificar quantos times possuem mais de 10 empates e, dentro desse subconjunto, quantos pertencem ao Top 5. A probabilidade desejada resulta do quociente entre o número de times do Top 5 com mais de 10 empates e o total de times que ultrapassam esse limite de empates.
- Mostrando a conexão com as probabilidades já calculadas: o número de times do Top 5 com muitos empates pode ser obtido por

$$P(\text{mais de 10 empates} | \text{Top 5}) \times \text{Total de times do Top 5}.$$

De forma análoga, o número total de times com muitos empates é dado por

$$P(\text{mais de 10 empates}) \times \text{Total de times no campeonato}.$$

- Construção da fórmula: Ao dividir as duas expressões anteriores, chegamos direta-

mente à forma conhecida:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Top 5} \mid \text{mais de 10 empates}) &= \frac{P(\text{mais de 10 empates} \mid \text{Top 5}) \times P(\text{Top 5})}{P(\text{mais de 10 empates})} \\
 &= \frac{0,40 \times 0,25}{0,40} \\
 &= \frac{0,10}{0,40} \\
 &= 0,25 \\
 &= 25\%.
 \end{aligned}$$

Logo, entre os times que possuem mais de 10 empates, aproximadamente 25% pertencem ao Top 5.

- **Conclusão e nomeação do conceito:** Ao final da atividade, destaque aos alunos que, sem recorrer a fórmulas prontas, eles aplicaram intuitivamente a lógica do Teorema de Bayes: utilizaram probabilidades já calculadas anteriormente, reorganizaram-nas para responder a uma pergunta “no sentido contrário” da condição original e compreenderam como uma informação adicional altera a probabilidade de interesse. Conclua explicitando a descoberta: “Todo esse processo que vocês acabaram de realizar corresponde exatamente ao Teorema de Bayes.”

**Dicas pedagógicas:** Incentive a troca de ideias entre os grupos e peça que expliquem o raciocínio em palavras, não apenas nas contas. Traga exemplos do cotidiano para reforçar a intuição do problema e destaque o papel central da probabilidade total no denominador, já que é ela que garante a consistência da atualização da probabilidade.

### Desafio 3

$$P(\text{últimos 2 colocados} \mid \text{SG negativo}) = \frac{2}{6} = 0,333 = 33,33\%.$$

**Interpretação:** No Campeonato Brasileiro Feminino de 2024, entre os 6 times que apresentam saldo de gols negativo, 2 estão na zona de rebaixamento. Assim, um time com SG negativo possui aproximadamente 33,33% de probabilidade de figurar entre os dois últimos colocados da tabela.

#### 4.3.5 Atividade 5: Análise Comparativa

**Habilidades (BNCC):** EF07MA34, EF09MA20.

**Problema Norteador:** “Como comparar probabilisticamente o desempenho de times em diferentes contextos? Podemos criar nossos próprios problemas?”

##### **Ação 1: A escolha do problema**

1. Por que este problema? **Exemplo de resposta possível:** Este problema foi escolhido como uma atividade de síntese e avaliação formativa. Ele obriga os alunos a aplicarem, de forma integrada, todos os conceitos probabilísticos aprendidos (espaço amostral, operações, probabilidade simples, condicional, independência, Bayes). A criação de problemas é o ápice da compreensão, demonstrando domínio da linguagem probabilística.
2. Quais conceitos, princípios e procedimentos matemáticos já estudados os alunos precisam mobilizar? **Exemplo de resposta possível:** Os alunos precisarão mobilizar todos os conceitos trabalhados nas atividades 1 a 4.
3. Qual conteúdo ou conceito será introduzido? **Exemplo de resposta possível:** Não introduz um conceito novo, mas promove a síntese e a aplicação criativa dos conteúdos já trabalhados. O foco está na organização das ideias e na comunicação matemática.
4. Que relações entre conhecimentos serão estabelecidas? **Exemplo de resposta possível:** A atividade articula todos os tópicos já trabalhados, mostrando como eles se conectam para permitir a análise de situações mais elaboradas e a comunicação precisa de resultados probabilísticos.

##### **Ação 2: Introdução do problema**

1. Contextualização e Motivação: “Agora somos analistas esportivos profissionais! Dominamos as ferramentas. Chegou a hora de aplicá-las de maneira criativa e decisiva.”
2. Apresentação Formal do Problema: Apresente o problema norteador.
3. Organização da Turma: Mantenha os grupos. Distribua a folha de atividade com dados dos campeonatos masculino e feminino.
4. Mobilização para a Tarefa: “Esta é a missão final: usar tudo que aprendemos até aqui para fazer análises profundas e, o desafio máximo, criar os nossos próprios problemas!”

### **Ação 3: Auxílio aos alunos durante a resolução**

- Desafio 1 (Análise do Corinthians - Síntese):  
Instigue: “Lembrem do teste de independência da Atividade 3! Apliquem para o Corinthians. Usem também probabilidades condicionais para enriquecer a análise.”
- Desafio 2 (Comparação Justa):  
Questione: “Para comparar justamente entre os campeonatos (masculino e feminino), é melhor usar números absolutos ou probabilidades? Por quê?”.
- Desafio 3 (Criação de Problemas):  
Incentive a criatividade: “Pensem em perguntas interessantes que usem probabilidade condicional, teorema de Bayes ou testes de independência. O céu é o limite!”.

### **Ação 4: Discussão das estratégias dos alunos**

- Socialização das Estratégias:
  - Peça para grupos compartilharem suas análises do Corinthians. Comparem as conclusões.
  - Foque na comparação entre campeonatos do Desafio 2: “É justo comparar números absolutos entre campeonatos com números diferentes de times?”.
  - Destaque os problemas criados no Desafio 3. Sugira uma “feira de problemas”: os grupos trocam e tentam resolver os problemas uns dos outros.
- Comparação e Debate:  
“Qual conceito probabilístico foi mais útil para suas análises? Por quê?”.

### **Ação 5: Articulação das estratégias ao conteúdo**

- Reflexões:
  - “Hoje usamos todos os conceitos probabilísticos que aprendemos: espaço amostral, operações, probabilidade condicional, independência e teorema de Bayes’.”
  - “A vantagem de usar probabilidades é que podemos comparar situações diferentes de maneira justa e padronizada.”
  - “Criar seus próprios problemas é o nível mais alto de compreensão! Significa que vocês dominam a linguagem probabilística e podem usá-la para questionar o mundo.”

- Generalização:

“Essas ferramentas não servem apenas para o futebol. Servem para analisar qualquer situação incerta na vida de um cidadão crítico.”

### Respostas Comentadas:

#### Desafio 1

#### Corinthians Masculino

Neste primeiro desafio, o objetivo é analisar o desempenho do Corinthians Masculino a partir de dois eventos relevantes no contexto do Brasileirão: o evento  $A$ , que representa terminar entre os 8 primeiros colocados, e o evento  $B$ , que corresponde a ter saldo de gols positivo. Antes dos cálculos, confirme com os alunos as informações da tabela: o time está na 7ª posição, possui 56 pontos, somou 15 vitórias e apresenta saldo de gols igual a 9.

As probabilidades são dadas por:

$$P(A) = \frac{8}{20} = 0,40 ; P(B) = \frac{8}{20} = 0,40 ; P(A \cap B) = \frac{7}{20} = 0,35.$$

**Momento pedagógico:** Peça aos alunos para interpretarem cada probabilidade antes de seguir.

**Independência:** Para testar se os eventos são independentes, comparamos

$$P(A) \times P(B) = 0,40 \times 0,40 = 0,16 \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = 0,35.$$

Como os valores diferem, concluímos que  $A$  e  $B$  são eventos dependentes.

#### Probabilidades condicionais:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,35}{0,40} = 0,875 \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,40}.$$

**Interpretação:** Se o Corinthians tem saldo de gols positivo, então há aproximadamente 87,5% de probabilidade de ele estar entre os 8 primeiros colocados. De modo equivalente, se o Corinthians está entre os 8 primeiros, também há cerca de 87,5% de probabilidade de que ele apresente saldo de gols positivo. Explique que isso mostra uma relação forte entre boa posição e SG positivo.

## Corinthians Feminino

Retome os dados com os alunos: o time está na 1ª posição, acumula 40 pontos, registra 13 vitórias e apresenta saldo de gols igual a 23. No masculino, o Corinthians atendeu aos dois critérios com uma campanha consistente. Já no feminino, a equipe se destacou ainda mais, liderando a competição de forma absoluta. Assim, a performance corinthiana mostrou-se significativamente mais dominante no feminino.

### Desafio 2

Neste desafio, os alunos investigam se ter SG positivo está associado a estar no Top 5. É uma ótima oportunidade para reforçar a ideia de probabilidade condicional.

#### Resolução esperada:

Para responder às perguntas, vamos representar os eventos por letras, de modo a facilitar os cálculos:  $A$ : time está no Top 5 e  $B$ : time possui SG positivo. Tem-se:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{8} = 0,625 \quad \text{e} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5}{5} = 1.$$

**Interpretação:** Entre os times com saldo de gols positivo, 62,5% estão no Top 5. Além disso, todo time que compõe o Top 5 apresenta saldo de gols positivo. Saber que o time tem saldo de gols positivo não garante que ele está no Top 5 e vimos através dos cálculos que na verdade, isso ocorre em apenas 62,5% dos casos. Por outro lado, saber que o time está no Top 5 garante que ele possui saldo de gols positivo, já que essa probabilidade é de 100%.

**Momento Pedagógico:** Agora que os alunos já usaram probabilidade condicional intuitivamente, é o momento de formalizar o conceito.

#### Apresentação da Fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A expressão  $P(A|B)$  é lida como “probabilidade de  $A$  dado  $B$ ”. Ela indica a probabilidade de o evento  $A$  ocorrer sabendo que o evento  $B$  já ocorreu. O denominador  $P(B)$  aparece porque o universo passa a ser apenas os casos em que  $B$  acontece. No numerador, contamos somente os casos em que  $A$  e  $B$  ocorrem simultaneamente, isto é,  $A \cap B$ .

A expressão  $P(A|B)$  não deve ser confundida com  $P(B|A)$ . A ordem importa e altera completamente a interpretação. Por isso, ao trabalhar com probabilidade condicional, é fundamental pensar sempre na frase correspondente: “dado que sabemos  $A$ , qual é a chance de  $B$  ocorrer?” e, em outra situação, “dado que sabemos  $B$ , qual é a chance de  $A$  ocorrer?”.

### Desafio 3

Neste desafio, os alunos criarão seu próprio experimento aleatório usando dados dos Campeonatos Brasileiros Masculino e Feminino. Cada grupo deverá formular uma situação que permita calcular ao menos duas probabilidades associadas ao contexto escolhido. Os estudantes devem escolher um critério dos times e construir um experimento simples como sortear um time, duas equipes ou uma posição e, a partir dele, definir eventos e calcular probabilidades coerentes com o contexto escolhido.

Assim, os alunos podem aplicar conceitos já trabalhados de forma investigativa e autônoma, explorando os dados do campeonato e formulando perguntas que despertem seu interesse.

Um exemplo que o(a) professor(a) pode compartilhar é o seguinte:

**Exemplo de problema:** Se sortearmos um time do Brasileirão Masculino ou Feminino de 2024, qual a probabilidade de ele ter mais de 10 vitórias e SG positivo?

#### 1. Contexto e objetivos de aprendizagem

Neste exemplo, aplicam-se os conceitos de interseção de eventos e o cálculo de  $P(A \cap B)$  em um contexto futebolístico. O objetivo é verificar se os alunos:

- Sabem identificar corretamente o espaço amostral e eventos;
- Compreendem a definição clássica de probabilidade;
- Conseguem calcular probabilidades de interseções;
- Percebem a diferença entre eventos independentes e dependentes.

#### 2. Definição dos eventos e cálculo de suas probabilidades

**Dica para o(a) professor(a):** Certifique-se de que os alunos contabilizaram corretamente os 36 times (20 do masculino e 16 do feminino) e compreenderam que o espaço amostral abrange ambas as modalidades.

#### 3. Definição dos Eventos e suas probabilidades

$A$  : mais de 10 vitórias       $B$  : SG positivo       $A \cap B$  : mais de 10 vitórias e SG positivo

$$P(A) = \frac{17}{36} \approx 0,47, \quad P(B) = \frac{18}{36} = 0,5, \quad P(A \cap B) = \frac{9}{36} = 0,25.$$

**Dica para o(a) professor(a):** Observe se os alunos identificaram corretamente a interseção e compreenderam que o termo “e” indica a operação de interseção entre eventos.

#### 4. Análise de Dependência entre Eventos

Se os eventos fossem independentes, teríamos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,47 \times 0,5 = 0,235.$$

Como 0,25 é ligeiramente maior que o valor esperado sob independência, isso indica uma pequena dependência positiva entre vitórias e SG positivo.

#### **Possíveis perguntas para guiar uma discussão em aula:**

- Por que vitórias e SG positivo estão correlacionados?

**Resposta:** Há uma relação direta entre esses eventos: ao vencer partidas, o time tende a marcar mais gols do que sofre, o que naturalmente melhora seu saldo de gols.

- O que significa dependência positiva neste contexto?

**Resposta:** Isso quer dizer que, quando um time vence muitas partidas, é bem provável que ele também tenha saldo de gols positivo, e o contrário também costuma acontecer. Ou seja, vitórias e saldo de gols positivo aparecem juntos mais vezes do que aconteceria se uma característica não tivesse relação com a outra.

**Analogia para os alunos:** Assim como estudar bastante costuma levar a boas notas, vencer jogos geralmente vem acompanhado de saldo de gols positivo. Por isso, quando um time vence muitas partidas, isso é um sinal de que ele provavelmente também apresenta SG positivo.

#### 4.3.6 Atividade 6: O Fator Casa

**Habilidades (BNCC):** EM13MAT312, EM13MAT106.

**Problema Norteador:** “O mando de campo beneficia igualmente todos os times? Como usar probabilidade para tomar decisões estratégicas?”

#### **Ação 1: A escolha do problema**

1. Por que este problema? **Exemplo de resposta possível:** Este problema foi escolhido para fechar a sequência com uma aplicação prática e estratégica da probabilidade condicional. Ele vai além do cálculo puro, levando os alunos a usarem os dados probabilísticos para fundamentar tomadas de decisão, simulando um cenário real de gestão esportiva. Isso valoriza a matemática como ferramenta para ação.
2. Quais conceitos, princípios e procedimentos matemáticos já estudados os alunos pre-

cisam mobilizar? **Exemplo de resposta possível:** Os alunos precisarão mobilizar o cálculo de probabilidade condicional e a interpretação de dados probabilísticos em contexto.

3. Qual conteúdo ou conceito será introduzido? **Exemplo de resposta possível:** O foco não é introduzir um novo conceito, mas aprofundar a interpretação e aplicação estratégica da probabilidade condicional na tomada de decisões baseada em dados.
4. Que relações entre conhecimentos serão estabelecidas? **Exemplo de resposta possível:** A atividade estabelece a relação entre a análise probabilística e a economia (conceito de retorno marginal do investimento), mostrando como a matemática pode orientar escolhas racionais em contextos de recursos limitados.

### **Ação 2: Introdução do problema**

1. Contextualização e Motivação:

Inicie com um debate rápido: “Time grande joga melhor em casa? E time pequeno? Por quê?”; “Se você fosse dirigente, investiria para melhorar o time em casa ou fora?”.

2. Apresentação Formal do Problema:

Apresente o problema norteador. Explique que os alunos serão os diretores esportivos por um dia, usando dados para tomar decisões de investimento.

3. Organização da Turma: Mantenha os grupos. Distribua a folha com dados de mandante/visitante.
4. Mobilização para a Tarefa: Vamos analisar os números e dar um veredito final: onde um clube deve investir para ter o maior retorno?

### **Ação 3: Auxílio aos alunos durante a resolução**

- Desafios 1-2 (Cálculo das Probabilidades):

Relembre: “Lembrem que  $P(\text{vitória}|\text{mandante}) = \frac{\text{vitórias em casa}}{\text{total de jogos em casa}}$ . Apliquem essa lógica para todos os cenários.”

- Desafio 3 (Análise Comparativa):

Questione: “Comparando números absolutos com probabilidades, qual forma é mais justa para comparar times diferentes? Por quê?”.

- Desafio 4 (Tomada de Decisão):

Questão-chave: “Pensem como dirigentes: onde o investimento traz mais retorno? Usem os dados para justificar. Qual time tem mais a ganhar?”.

Instigação: “Observem padrões: o mando de campo funciona igual para campeões e rebaixados?”.

#### **Ação 4: Discussão das estratégias dos alunos**

- **Socialização das Estratégias:**

Peça comparações entre as probabilidades do Botafogo (campeão) e Cuiabá (rebaixado).

Discuta o Desafio 4. Se os grupos fizeram escolhas diferentes, promova o debate: “Por quê? Qual argumento é mais forte?”.

- **Comparação e Debate:**

Destaque as argumentações econômicas baseadas em dados probabilísticos.

“O que os dados nos dizem sobre a vantagem de jogar em casa para times de diferentes níveis?”.

#### **Ação 5: Articulação das estratégias ao conteúdo**

- **Sistematização dos Conceitos:**

- Tomada de decisão baseada em dados: “A probabilidade nos permite tomar decisões mais inteligentes, indo além do achismo e da intuição.”
- Análise estratégica: “Vimos que o mesmo fator (mando de campo) tem impactos probabilísticos diferentes dependendo do contexto (time grande e pequeno).”
- Probabilidade como ferramenta: “Conseguimos responder: vale mais a pena investir em *A* ou *B*? Com base em quais dados?”
- Conclusão da sequência: “Ao longo destas 6 aulas, transformamos achismos sobre futebol em análises probabilísticas!”

- **Generalização:**

Para reflexão final: “De todo esse percurso, qual foi o conceito ou descoberta que mais chamou a atenção de vocês?”

### Respostas Comentadas

Nesta atividade, os alunos investigarão, com base nos dados fornecidos a seguir, se atuar como mandante ou visitante influenciou de forma distinta o desempenho de um time de elite e de uma equipe que lutou contra o rebaixamento no Campeonato Brasileiro Masculino de 2024.

Time	Condição	Vitórias	Empates	Derrotas
<b>Botafogo(Campeão)</b>	Mandante	12	5	2
	Visitante	11	5	3
<b>Cuiabá(Rebaixado)</b>	Mandante	3	5	11
	Visitante	2	7	10

#### Desafio 1 - Botafogo

$$P(\text{Vitória} | \text{Mandante}) = \frac{P(\text{Vitória} \cap \text{Mandante})}{P(\text{Mandante})} = \frac{12}{19} \approx 0,6316,$$

$$P(\text{Vitória} | \text{Visitante}) = \frac{P(\text{Vitória} \cap \text{Visitante})}{P(\text{Visitante})} = \frac{11}{19} \approx 0,5789,$$

$$P(\text{Não Perder} | \text{Mandante}) = \frac{P(\text{Não Perder} \cap \text{Mandante})}{P(\text{Mandante})} = \frac{12 + 5}{19} = \frac{17}{19} \approx 0,8947,$$

$$P(\text{Não Perder} | \text{Visitante}) = \frac{P(\text{Não Perder} \cap \text{Visitante})}{P(\text{Visitante})} = \frac{11 + 5}{19} = \frac{16}{19} \approx 0,8421.$$

**Interpretação:** A vantagem de jogar em casa mostrou-se moderada, com cerca de 5% de diferença nas probabilidades de vitória. Isso indica que o Botafogo, como equipe campeã, manteve um desempenho competitivo em ambas as condições.

#### Desafio 2 - Cuiabá

$$P(\text{Vitória} | \text{Mandante}) = \frac{P(\text{Vitória} \cap \text{Mandante})}{P(\text{Mandante})} = \frac{3}{19} \approx 0,1579,$$

$$P(\text{Vitória} | \text{Visitante}) = \frac{P(\text{Vitória} \cap \text{Visitante})}{P(\text{Visitante})} = \frac{2}{19} \approx 0,1053,$$

$$P(\text{Não Perder} | \text{Mandante}) = \frac{P(\text{Não Perder} \cap \text{Mandante})}{P(\text{Mandante})} = \frac{3 + 5}{19} = \frac{8}{19} \approx 0,4211,$$

$$P(\text{Não Perder} | \text{Visitante}) = \frac{P(\text{Não Perder} \cap \text{Visitante})}{P(\text{Visitante})} = \frac{2 + 7}{19} = \frac{9}{19} \approx 0,4737.$$

**Interpretação:** No caso do Cuiabá, a vantagem de jogar em casa praticamente não se

confirmou. A probabilidade de não perder foi ligeiramente maior como visitante (47,37% contra 42,11%), sugerindo que a equipe apresentou desempenho relativamente melhor fora de casa e buscou pontos principalmente como visitante.

### Desafio 3: Análise Individual e Comparativa

$$P(\text{Vitória} \mid \text{Visitante})_{\text{Botafogo}} = 0,5789 \text{ e } P(\text{Vitória} \mid \text{Mandante})_{\text{Cuiabá}} = \frac{3}{19} = 0,1579.$$

**Interpretação:** A probabilidade de vitória do Botafogo como visitante (57,89%) supera a do Cuiabá como mandante (15,79%) em 42,10 pontos percentuais (57,89-15,79). Esse contraste evidencia a enorme diferença de desempenho entre um time campeão e um time rebaixado: mesmo fora de casa, o Botafogo apresentava uma probabilidade de vitória muito superior à do Cuiabá jogando em seus domínios.

### Desafio 4: Interpretação

(a) Com base na análise das probabilidades calculadas, para o Botafogo, tem-se:

$$P(\text{Vitória} \mid \text{Mandante}) = 0,6316; \quad P(\text{Vitória} \mid \text{Visitante}) = 0,5789;$$

$$\text{Diferença} = 0,6316 - 0,5789 = 0,0527 = 5,27\%.$$

No caso do Cuiabá:

$$P(\text{Não Perder} \mid \text{Mandante}) = 0,4211; \quad P(\text{Não Perder} \mid \text{Visitante}) = 0,4737;$$

$$\text{Diferença} = 0,4211 - 0,4737 = -0,0526 = -5,26\%.$$

**Resposta:** Analisando os resultados, percebemos que o Botafogo teve um desempenho muito bom nos dois cenários. A probabilidade de vitória como mandante foi um pouco maior do que como visitante, com uma diferença de **5,27 pontos percentuais**. Isso mostra que jogar em casa ajudou, mas o time já era forte em qualquer condição.

No caso do Cuiabá, a situação foi diferente. A probabilidade de não perder foi menor quando jogou em casa e maior quando jogou fora, com diferença de **5,26 pontos percentuais**. Isso indica que, para um time que lutou contra o rebaixamento, jogar em casa não funcionou como vantagem. Pelo contrário, sua atuação como mandante foi **pior** do que sua atuação como visitante.

(b) Decisão de investimento

**Análise econômica baseada nos dados:**

**Botafogo:** Para um time grande como o Botafogo, que já apresenta uma performance elevada mesmo como visitante (57,89% de vitórias), investir especificamente na melhora do desempenho fora de casa provavelmente traria um retorno marginal pequeno. Como o rendimento já é alto, qualquer investimento adicional resultaria em um ganho limitado em relação ao que a equipe já alcança nessas condições.

**Cuiabá:** Para um time pequeno como o Cuiabá, cuja performance como mandante é bastante baixa (apenas 15,79% de vitórias), investir no fortalecimento do mando de campo pode ter impacto significativo. Melhorar o desempenho em casa ajudaria a reverter parte da desvantagem atual, aumentando as chances de transformar derrotas em empates ou vitórias. Nesse cenário, o retorno marginal do investimento tende a ser muito maior do que em um time que já apresenta bons resultados.

**Decisão justificada:** Investiria os recursos limitados em fortalecer o mando de campo do time pequeno (Cuiabá), pois o retorno marginal seria muito maior: melhorar o desempenho em casa pode render pontos decisivos e até evitar o rebaixamento. Para o time grande, o ganho seria menor, já que se parte de uma base de desempenho mais alta.

### Reflexões a serem exploradas

A análise revela que para times de elite como o Botafogo, o mando de campo representa um complemento de aproximadamente 5,26% no desempenho tanto em vitórias quanto em não derrotas.

Para times como o Cuiabá, jogar em casa representou uma pequena vantagem nas vitórias (+5,26%), mas uma desvantagem quando consideramos não perder (-5,26%). Isso sugere que o time se defendia melhor fora de casa, mas tinha dificuldade em converter a vantagem do mando em resultados positivos.

A probabilidade do visitante vencer contra o Botafogo:

$$P(\text{Visitante vencer}) = 1 - P(\text{Botafogo não perder como mandante}) = 1 - 0,8947 = 0,1053.$$

Assim, a probabilidade de um visitante vencer o Botafogo em casa é de apenas 10,53%. O mando de campo tem impacto diferente dependendo da qualidade da equipe: para times fortes, funciona como um reforço positivo; já para times mais fracos, pode até se tornar desfavorável em alguns aspectos.

### Orientações pedagógicas e verificação da aprendizagem

O professor deve verificar se o aluno compreendeu a ideia de probabilidade condicional, expressa por  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , e se consegue aplicá-la corretamente em situações reais, como no uso de dados esportivos para realizar cálculos probabilísticos. Também é importante observar se o estudante interpreta adequadamente os resultados obtidos, transformando valores numéricos em conclusões coerentes, e se desenvolve a capacidade de realizar análises comparativas, identificando diferenças de desempenho entre equipes com características distintas.

Nesse processo, é essencial verificar se o aluno identificou corretamente:

- o evento condicionante, que corresponde à condição de jogo (mandante ou visitante);
- o evento de interesse, que representa o resultado analisado (como vitória ou não perder);
- o cálculo da interseção, isto é, a contagem das situações em que ambos os eventos ocorrem simultaneamente.

### Questões para verificar o entendimento dos alunos

**Questão 1:** Por que a probabilidade condicional é mais informativa que a probabilidade simples neste contexto?

**Resposta esperada:** Porque isola o efeito do mando de campo ou outra condição, permitindo comparar desempenho em condições específicas.

**Questão 2:** A diferença entre o desempenho do Cuiabá em casa e fora é pequena. Você acha que ela pode ter acontecido só por acaso, ou isso realmente mostra que o time joga melhor fora? Explique sua conclusão.

**Resposta esperada:** Sim, essa diferença pode ter acontecido por acaso. Ela é muito pequena e foi calculada usando apenas 19 jogos em casa e 19 jogos fora. Com tão poucos jogos, os resultados podem variar bastante de uma temporada para outra. Por isso, não dá para generalizar e dizer que o Cuiabá realmente joga melhor fora de casa. Os dados desta temporada podem refletir apenas coincidências ou situações específicas dos jogos, e não um padrão verdadeiro do time.

### Avaliação

- Processual: Participação nas discussões, qualidade das argumentações nos grupos.

- Resultados esperados: Resolução dos desafios e criatividade na elaboração dos problemas.
- Autoavaliação: Reflexão sobre o próprio aprendizado e dificuldades superadas.

#### **4.4 Articulação das atividades com a BNCC e seus focos conceituais**

Nesta seção, apresentamos no Quadro 4.9 uma síntese da organização das atividades propostas, relacionando-as às etapas de escolaridade, às habilidades da BNCC e aos focos conceituais trabalhados em cada atividade. Embora no material do professor cada atividade já esteja acompanhada das habilidades correspondentes, o que indica implicitamente o ano ou a série a que se destina, optamos por reunir essas informações em um único quadro, a fim de facilitar a visualização e o planejamento do docente.

Ressaltamos que a aplicação das atividades pode variar conforme o perfil da turma, o nível de desenvolvimento dos estudantes e os objetivos do professor. Assim, o quadro a seguir funciona como uma orientação geral, que pode ser adaptada, ampliada ou ajustada conforme a realidade de cada contexto escolar.

Além de serem aplicáveis às etapas da Educação Básica, as atividades também podem ser utilizadas ou adaptadas em cursos superiores que envolvem o estudo de Probabilidade, em razão de seu caráter investigativo e de seu potencial para promover discussões sobre conceitos probabilísticos.

Quadro 4.9. Relação entre série/ano, habilidades da BNCC e foco conceitual das atividades

Atividade	Etapa	Habilidades	Foco conceitual
1	6°	EF06MA30	Cálculo da probabilidade na forma fracionária, decimal e percentual a partir da contagem de casos.
	8°	EF08MA22	Definição formal do espaço amostral e contagem de elementos para o cálculo.
	EM	EM13MAT312	Interpretação de probabilidades em contextos de experimentos sucessivos (análise de características resultantes da sequência de jogos do campeonato).
2	9°	EF09MA20	Reconhecimento de eventos dependentes e cálculo de suas probabilidades, incluindo a probabilidade condicional.
	EM	EM13MAT311	Construção de espaços amostrais e contagem de possibilidades para resolver problemas de probabilidade em contextos reais.
3	9°	EF09MA20	Aplicação do teste de independência entre eventos usando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .
	EM	EM13MAT311	Cálculo de probabilidades simples a partir da identificação e descrição do espaço amostral em contextos reais.
4	EM	EM13MAT511	Exploração de diferentes partições do espaço amostral para aplicação do Teorema de Bayes.
5	7°	EF07MA34	Planejamento e realização de um experimento probabilístico, estimando probabilidades a partir das frequências observadas.
	9°	EF09MA20	Verificação de independência entre eventos.
6	EM	EM13MAT312	Interpretação de probabilidades em experimentos sucessivos (rodadas como mandante/visitante).
	EM	EM13MAT106	Uso de análise probabilística para tomada de decisões estratégicas com base em riscos e retornos.

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, procurou-se compreender, de maneira prática e reflexiva, como o futebol pode se tornar um aliado no ensino da probabilidade. A ideia não era apenas aproximar o conteúdo matemático de algo que faz parte do cotidiano dos alunos, mas mostrar que a Matemática pode dialogar com o que eles veem, comentam e vivenciam fora da sala de aula. Nesse movimento, o futebol se mostrou um espaço inovador para despertar o interesse, provocar a análise e dar sentido a conceitos que, muitas vezes, são ensinados de forma abstrata.

A revisão teórica e o desenvolvimento das atividades mostraram que é possível, sim, tratar a probabilidade de maneira contextualizada, sem abrir mão do rigor matemático. As atividades propostas, com base em dados do Campeonato Brasileiro de 2024, tanto masculino quanto feminino, permitiram relacionar cálculos, interpretações e discussões sobre resultados de forma dinâmica e significativa. Acredita-se que, quando o aluno reconhece a presença da Matemática em algo que lhe é familiar, o aprendizado deixa de ser uma obrigação e se torna uma descoberta.

Além disso, as diretrizes da BNCC e do DCT reforçam essa perspectiva, ao defenderem um ensino conectado com a vida real e com a construção de competências que ultrapassam o domínio de fórmulas. O documento estadual, inclusive, sugere explicitamente o uso do futebol como abordagem didática no ensino de Matemática. Nesse sentido, o futebol se destacou como um recurso didático capaz de integrar o conhecimento técnico e o envolvimento emocional, com potencial de promover um aprendizado efetivo.

A sequência didática proposta buscou traduzir essa visão, mostrando que o pensamento probabilístico não se limita a cálculos, mas envolve reflexão, tomada de decisão e interpretação crítica. Ainda que as atividades não tenham sido desenvolvidas em sala de aula, a estrutura construída pode oferecer caminhos possíveis para futuras experiências, tanto neste tema quanto em outros contextos culturais. Nesse sentido, abre-se espaço para que trabalhos posteriores se dediquem à aplicação e avaliação dessa sequência didática, investigando seus efeitos na aprendizagem e explorando possibilidades de adaptação.

Dessa forma, é possível responder à pergunta que orientou esta pesquisa: o futebol pode motivar o aprendizado de conceitos probabilísticos ao oferecer um contexto significativo e rico em situações reais que favorecem a análise, a interpretação e a compreensão dos eventos aleatórios. Em síntese, este estudo reforça a relevância de um ensino de Matemática que dialogue com a realidade dos estudantes. Ao relacionar o futebol à probabilidade, abre-se espaço para uma aprendizagem mais humana, em que o erro, o acaso e a estratégia, elementos fundamentais do raciocínio probabilístico, também se tornam parte do processo de aprender.

## REFERÊNCIAS

- AGÊNCIA BRASIL. **Audiência do Brasileirão Feminino tem alta de 41% na TV Brasil e RNCP**. Disponível em: <<https://agenciabrasil.ebc.com.br/esportes/noticia/2025-10/audiencia-do-brasileirao-feminino-tem-alta-de-41-na-tv-brasil-e-rncp>>. Acesso em: 12 nov. 2025.
- ALMEIDA, Lourdes Werle de. **Modelagem matemática na Educação Básica**/ Lourdes Werle de Almeida, Karina Pessôa da Silva, Rodolfo Eduardo Vertuan. – São Paulo: Contexto, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
- CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE FUTEBOL. **Tabela - Campeonato Brasileiro Série A 2024**. Disponível em: <<https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/tabelas/campeonato-brasileiro/serie-a/2024>>. Acesso em: 17 jun. 2025.
- COSTA, Dalison Evangelista. **O processo de construção de sequência didática como (pro)motor da educação matemática na formação de professores**. 2013. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) — Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2013.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- DAMATTA, Roberto. **Universo do Futebol: Esporte e Sociedade Brasileira**. Rio de Janeiro, Pinakothek, 1982.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações : ensino médio**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- DESIDÉRIO, Andreia Filipa Santos. **A Aprendizagem da Noção de Probabilidade Condiçãoada: Um estudo com alunos do 2º ano do Ensino Profissional**. Relatório da Prática de Ensino Supervisionada (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2017.
- DEVORE, Jay L. **Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- FONSECA, João José Saraiva. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- GUTSTEIN, Eric. Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, latino school. **Journal for Research in Mathematics Education**, 2003. p. 37–73.
- LOPES, Celi Espasandin. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Cadernos Cedes, SciELO Brasil**, v. 28, n. 74, p. 57–73, 2008.

LÜDKE, Menga.; ANDRÉ, Marli. Eliza. Dalmazo. Afonso. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MORAIS, Luciana Gregorio de; COSTA, Christine Sertã. Teorema de Bayes: uma visão interdisciplinar na escola básica. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 24, nº 46, 17 de dezembro de 2024. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/24/46/teorema-de-bayes-uma-visao-interdisciplinar-na-escola-basica>. Acesso em: 12 nov. 2025.

NASCIMENTO, Júlio Cesar Pires do. **Um estudo sobre a valorização e as dificuldades do ensino de probabilidade na educação básica**. 2017. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

NEXUS; CBF. **Futebol Brasileiro**. Relatório de pesquisa. Setembro 2025.

OLIVEIRA, Mariana Gomes de; MALDONADO, Daniel Teixeira. Análise midiática sobre o futebol feminino no Brasil: elementos didáticos para a Educação Física no ensino médio. **Motrivivência**, Florianópolis, v. 32, n. 63, p. 1–21, 2020. DOI: 10.5007/2175-8042.2020e73498. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/motrivivencia/article/view/73498>. Acesso em: 1 nov. 2025.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. [tradução Heitor Lisboa de Araújo]. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática**. Maringá: EDUEM, 2018.

RIBOLLI, Marcos. **Torcida do Corinthians na final do Brasileirão Feminino 2024, na Neo Química Arena**. São Paulo: [ge.globo.com](https://ge.globo.com), 22 set. 2024. Disponível em: <https://ge.globo.com/sp/campinas-e-regiao/futebol/futebol-feminino/brasileiro-feminino/noticia/2024/09/22/corinthians-renova-recorde-de-publico-no-futebol-feminino-com-44-mil-na-final-do-brasileirao.ghtml>. Acesso em: 12 nov. 2025.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, nº 1, p. 299-311, 2012.

SANTANA, Giordane Lima. **O Rstudio como suporte no ensino de probabilidade sob a abordagem frequentista**. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.

SANTOS, Indaclécio Paulo dos; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. Uma revisão Sistemática sobre o ensino de Probabilidade na educação Básica. **Revista Educação Matemática em Foco**, 2018.

SERASA EXPERIAN. **Gastos com o futebol afeta o bolso de 61% dos brasileiros, revela Serasa**. São Paulo, 2025. Disponível em: <https://www.serasa.com.br/imprensa/gastos-com-o-futebol-afeta-o-bolso-dos-brasileiros-revela-serasa/>. Acesso em: 12 nov. 2025.

SOUZA, Gilvan de. **Torcida do Flamengo tem a melhor média de público do Brasileiro 2025, com mais de 51 mil torcedores.** Rio de Janeiro: Confederação Brasileira de Futebol, 11 jul. 2025. Disponível em: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/noticias/copa-do-brasil/masculino/com-3-melhor-media-de-publico-da-historia-brasileirao-retorna-neste-fim-de-semana> . Acesso em: 12 nov. 2025.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática crítica: a questão da democracia.** Campinas, SP: Papirus, 2001.

SUZUKI, Adriano Kamimura.; TAVARES, Leandro. Modelagem Estatística para previsão esportiva: uma aplicação no futebol. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco** – Vol 3 – Número 1 – maio de 2015.

TOCANTINS. **Documento Curricular do Território do Tocantins** – Educação Infantil e Ensino Fundamental. Palmas: Secretaria de Estado da Educação, Juventude e Esportes do Estado do Tocantins (Seduc), 2019.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. **Modelagem Matemática e a Educação Básica: Um Passeio Pelas Diferentes Séries.** VI CNMEM. 2009.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar** (recurso eletrônico). Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Revisão técnica: Nalú Farenzena. Porto Alegre: Penso, 2014.