UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CÂMPUS CIMBA ARAGUAÍNA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

Matheus Alves da Costa

Sistema Especialista Fuzzy para Avaliação de Desempenho em Matemática com Base em Critérios Subjetivos

Araguaína – TO
2025

MATHEUS ALVES DA COSTA

Sistema Especialista Fuzzy para Avaliação de Desempenho em Matemática com Base em Critérios Subjetivos

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Norte do Tocantins – UFNT, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador: Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo.

Araguaína – TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837s Costa, Matheus Alves.
Sistema Especialista Fuzzy para Avaliação de Desempenho em Matemática com Base em Critérios Subjetivos / Matheus Alves Costa. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.
78 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: Matheus Pereira Lobo .

1. Lógica Fuzzy. 2. Avaliação Educacional. 3. Linguagem C++.

CDD 510

Matheus Alves da Costa

Sistema Especialista Fuzzy para Avaliação de Desempenho em Matemática com Base em Critérios Subjetivos

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Norte do Tocantins – UFNT, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da aprovação: 01 /07/ 2025.

Banca examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
MATHEUS PEREIRA LOBO
Data: 04/07/2025 15:06:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo – Orientador (UFNT)

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 04/07/2025 17:21:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior – Membro interno (UFNT)

gov.br Documento assinado digitalmente
FERNANDO LESSA CARNEIRO
Data: 02/07/2025 20:48:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fernando Lessa Carneiro – Membro Externo (UFNT)

ARAGUAÍNA – TO
2025

Dedico este trabalho à minha esposa Renata que tem cultivado o amor e, consequentemente, o incentivo naquilo que estou engajado, aos meus cachorros Tobias e Gohan que estiveram comigo durante todo o processo de escrita e a todos que contribuíram para a realização dessa etapa em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder forças, saúde e sabedoria ao longo desta caminhada.

À minha esposa Renata, por todo amor, apoio e paciência durante essa jornada. Sua presença constante foi essencial nos momentos de desafio e conquista.

Ao meu orientador, Professor Matheus Pereira Lobo, pela orientação competente, pelos ensinamentos compartilhados e pela confiança no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu irmão Gabryel, que contribuiu de forma decisiva na etapa de programação em C++, sempre disposto a ajudar com dedicação e conhecimento.

Aos colegas do mestrado, especialmente ao Carlos, à Gabriela, Onofre e ao Daniel, pela parceria, troca de experiências e amizade construída ao longo do percurso.

Aos membros da banca examinadora, agradeço, desde já, pela disponibilidade em participar da avaliação deste trabalho. Reconheço a importância de suas experiências e saberes, e me sinto honrado em poder contar com suas contribuições, que certamente enriquecerão esta pesquisa.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio fundamental ao meu percurso acadêmico. O incentivo da CAPES, por meio da concessão de bolsa e do investimento contínuo na formação de mestres e doutores no Brasil, foi essencial para a realização desta pesquisa. Reconheço a importância desse suporte para o desenvolvimento da ciência, da educação e da valorização do conhecimento em nosso país.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação, deixo aqui minha sincera gratidão.

Enquanto a lógica clássica nos diz que algo é ou não é, a lógica fuzzy pergunta: em que grau?

Lotfi A. Zadeh

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um sistema especialista baseado em lógica fuzzy para auxiliar na avaliação da resolução de problemas matemáticos por estudantes, considerando-se os critérios subjetivos criatividade e organização. O sistema foi inicialmente modelado no software MATLAB e, em seguida, implementado em linguagem de programação C++. A metodologia incluiu a modelagem das variáveis de entrada através da lógica fuzzy e, também, a aplicação de dois métodos de defuzificação para aprimorar o mecanismo de inferências. Os resultados demonstraram que, apesar do sistema apresentar comportamento não-linear em determinados intervalos, ele obteve um coeficiente de correlação de 0,91 em relação à média estatística, indicando consistência com métodos tradicionais. Como produto educacional final, obteve-se um programa funcional capaz de apoiar professores no processo avaliativo, evidenciando a viabilidade do uso de sistemas fuzzy no contexto educacional.

Palavras-chave: Lógica fuzzy. Avaliação educacional. Linguagem C++.

ABSTRACT

This work presents the development of an expert system based on fuzzy logic to assist in the evaluation of students' problem-solving in mathematics, considering the subjective criteria of creativity and organization. The system was initially modeled using MATLAB software and subsequently implemented in the C++ programming language. The methodology included modeling the input variables through fuzzy logic and applying two defuzzification methods to enhance the inference mechanism. The results showed that, although the system exhibited non-linear behavior in certain intervals, it achieved a correlation coefficient of 0.91 in relation to the statistical average, indicating consistency with traditional methods. As a final educational product, a functional program was obtained, capable of supporting teachers in the evaluation process, highlighting the feasibility of using fuzzy systems in educational contexts.

Keywords: Fuzzy logic. Educational assessment. Language C++.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO

A modelagem com o uso da Lógica Fuzzy tem sido bastante utilizada em pesquisas nas áreas das Ciências Naturais e Matemática. E isso se justifica pela característica principal dessa teoria: tratamento das incertezas e subjetividades dos dados. Enquanto modelos matemáticos clássicos utilizam-se principalmente de equações diferenciais e métodos estatísticos, um modelo matemático fuzzy baseia-se na Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Desse modo,

> Foi a partir de desafios como esse, no qual a propriedade que define o conjunto é incerta, que surgiu a **Teoria dos Conjuntos Fuzzy**, que tem crescido consideravelmente em nossos dias, tanto do ponto de vista teórico como nas aplicações em diversas áreas de estudo, sobretudo em tecnologia (Barros; Bassanezi; 2006, p. 12).

Nessa perspectiva, essa teoria contribui para que se possa ter uma análise mais significativa a partir de variáveis que carregam subjetividades ou mesmo incertezas. Na pesquisa em educação matemática, essa abordagem ainda está tomando forma, pois as variáveis apresentadas possuem elevado grau de subjetividade. A avaliação conceitual em Matemática, por exemplo, é definida a partir de termos qualitativos que, por usa vez, podem conter imprecisões. Na pesquisa de Narcizo (2019), propõe-se a avaliação conceitual baseada na modelagem fuzzy, para isso considerou-se os critérios: interação pessoal, participação nas atividades e assiduidade. A partir disso, o sistema infere um valor numérico que pode, também, ser interpretado em termos conceituais como insuficiente, razoável, regular, bom ou excelente.

Barros (2024) abordou um modelo de diagnóstico escolar que faz uso da teoria fuzzy. Em sua pesquisa considerou-se os critérios: dedicação, apoio da família, ociosidade, má influência e ambiente apropriado. Assim, programou-se em linguagem de programação Python um sistema que infere um valor que representa a conceituação do aluno com base nessas variáveis. A construção da inferência nesse tipo de modelagem é feita através do conhecimento de especialistas da área em estudo.

Segundo Abrantes (1994), compara-se a resolução de um problema matemático à escrita de uma composição, destacando a centralidade da comunicação nesse processo. Nessa perspectiva, entende-se que para uma boa comunicação em matemática é fundamental que haja um certo nível de organização das ideias e de criatividade. Com base nisso, a presente pesquisa propõe-se ao desenvolvimento de um Sistema Especialista Fuzzy que modele a avaliação do desempenho na resolução de um problema matemático com base na criatividade e organização das ideias. Para isso, a linguagem de programação C++ será utilizada como ferramenta de implementação.

1.1 – Problema

Na resolução de problemas matemáticos, um dos aspectos fundamentais é a comunicação, pois essa transmite ao leitor as estratégias utilizadas. A avaliação desse critério é bastante subjetiva, pois utiliza-se de termos conceituais como excelente, razoável, ruim, entre outros. Além disso, o termo razoável pode ter diferentes interpretações a depender do contexto. Ao término do período avaliativo, surge a necessidade de converter isso para valores numéricos que melhor representem o nível de aprendizagem do estudante. Nessa perspectiva, constituímos a seguinte questão norteadora dessa pesquisa: "Como podemos utilizar a Lógica Fuzzy enquanto ferramenta auxiliar na quantificação dos critérios subjetivos criatividade e organização na avaliação matemática?"

1.2 – Objetivos

1.2.1 – Objetivo geral

Implementar, em linguagem de programação C++, um sistema especialista fuzzy que possa auxiliar professores de matemática na avaliação do desempenho na resolução de problemas, com base nos critérios subjetivos de criatividade e organização.

1.2.2 – Objetivos específicos

- Entender como os critérios subjetivos criatividade e organização influenciam na variável desempenho em uma avaliação.
- Explicitar o potencial da modelagem matemática com o uso da lógica fuzzy na pesquisa em Educação Matemática.
- Desenvolver funções em C++ que possam ser personalizadas para atender situações diferentes.

1.3 – Justificativa

A partir da minha prática docente no ensino de matemática, pude notar que o processo de aprendizagem é cheio de especificidades, pois cada estudante aprende num ritmo diferente e expressa esse aprendizado de muitos modos. Nesse sentido, a escolha de um método avaliativo que contemple essa pluralidade torna-se desafiador. De acordo com Almouloud (2007, p. 98), a avaliação do estudante deve considerar tanto os aspectos quantitativos quanto os qualitativos. Na avaliação qualitativa surge a dificuldade de ponderar os critérios, dada a natureza subjetiva dos termos utilizados como excelente, bom, regular, insuficiente. Nesse sentido, uma avaliação qualitativa em matemática que pondere a criatividade e organização das ideias, isto é, a comunicação, é essencial para compreendermos o processo de aprendizagem do estudante. Para isso, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy idealizada por Zadeh (1965) permite uma abordagem que modele as incertezas e subjetividades no uso de expressões qualitativas. Dessa forma, podemos atribuir um conceito que esteja mais próximo do desempenho do estudante.

2 – REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 – História da Lógica Fuzzy

A lógica clássica, também conhecida como lógica aristotélica, constitui um dos pilares fundamentais do pensamento racional ocidental. Desenvolvida por Aristóteles no século IV a.C., essa lógica se baseia em três princípios centrais: o princípio da identidade (algo é o que é), o princípio da não contradição (algo não pode ser e não ser ao mesmo tempo) e o princípio do terceiro excluído (uma proposição é verdadeira ou falsa, sem meio-termo). Essa concepção bivalente da verdade dominou a filosofia e a ciência durante muitos séculos.

No período moderno, a lógica clássica passou por uma importante reformulação, especialmente a partir do século XIX, com os trabalhos de George Boole. Em sua obra An Investigation of the Laws of Thought (1854), Boole propôs uma representação algébrica do raciocínio lógico, substituindo a linguagem natural por uma notação simbólica baseada em operações binárias. Nascia, assim, a álgebra booleana, que permitiu a formalização de proposições e argumentos sob a forma de equações matemáticas. Esse avanço abriu caminho para o desenvolvimento da lógica simbólica e da lógica matemática, permitindo tratar o raciocínio dedutivo com maior precisão e rigor. Pensadores como Frege, Peano e Russell deram continuidade a esse processo de formalização, estabelecendo os fundamentos da lógica proposicional e da lógica de predicados.

O vocabulário da lógica clássica é composto por elementos formais bem definidos, que permitem a construção e análise de argumentos de forma precisa. Entre os conceitos centrais estão as proposições, que são sentenças declarativas capazes de assumir um valor de verdade (verdadeiro ou falso), e os conectivos lógicos, que permitem combinar proposições para formar enunciados mais complexos. Os principais conectivos da lógica proposicional clássica são: negação ($\neg$), conjunção ($\land$), disjunção ($\lor$), condicional ($\rightarrow$) e bicondicional ($\leftrightarrow$). Além disso, a lógica de predicados, um desdobramento da lógica clássica, introduz os quantificadores: o universal ($\forall$) e o existencial ($\exists$), usados para expressar generalizações e existências. Também fazem parte do vocabulário lógico os termos individuais, funções e predicados, que permitem representar propriedades, relações e objetos do domínio em análise. A clareza e a estabilidade desse vocabulário tornaram a lógica clássica uma linguagem formal robusta para a dedução. Ao referir-se a conjuntos da lógica clássica em detrimento das demais lógicas, utiliza-se o termo conjunto $crisp$.

Em meados de 1920, o lógico polonês Jan Lukasiewicz desenvolveu um sistema lógico polivalente. Segundo Haack (2002, p.269), “As lógicas polivalentes são lógicas alternativas;

compartilhando o vocabulário da lógica clássica, elas via de regra deixam de ter certos teoremas desta, tais como a 'lei do terceiro excluído', $P \vee \sim P$".

O sistema lógico de Lukasiewicz é trivalente, isto é, apresenta um valor lógico adicional, indeterminado, que é representado pela letra 'i'. Este funciona como um termo intermediário entre o verdadeiro e o falso.

A adoção desse novo sistema surge ao comparar a natureza real e a forma como ela é idealizada. Para exemplificar esse raciocínio, suponhamos que uma pessoa de estatura baixa é caracterizada por possuir uma medida inferior a 155 cm. Desse modo, alguém cuja medida seja de 156 cm pode ser considerada uma pessoa baixa? A resposta "lógica" é não, apesar da diferença de 1cm ser insignificante, aceitamos que tal pessoa não é de estatura baixa devido à lógica clássica Aristotélica. Ao utilizarmos a lógica trivalente de Lukasiewicz, podemos afirmar que tal indivíduo pertence com um menor grau de pertencimento ao conjunto das pessoas de baixa estatura, que pode ser $\frac{1}{2}$.

A partir disso, pode-se generalizar a lógica de Lukasiewicz atribuindo os seguintes valores: verdade = 1, indeterminado = $\frac{1}{2}$ e falso = 0. Abaixo está representada a tabela verdade da conjunção das proposições P e Q de acordo com a lógica trivalente.

Tabela 1 - Conjunção das proposições P e Q.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{P \wedge Q}$
1	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1/2	1	1/2
1/2	0	0
1/2	1/2	1/2
0	1	0
0	0	0
0	1/2	0

Fonte: Haack (2002).

Percebe-se que na lógica de Lukasiewicz assumem-se valores verdade diferentes dos convencionais na conjunção (e nos demais operadores) devido ao fato das proposições possuírem três valores lógicos. Isso provoca resistência a sistemas desse tipo devido ao fato de estarmos culturalmente arraigados na lógica bivalente de Aristóteles.

Nessa mesma perspectiva, tem-se a lógica quântica em que as proposições podem assumir estados indeterminados, semelhante ao proposto por Lukasiewicz. Por ser uma lógica não clássica, ela apresenta peculiaridades, como a falha da distributividade da conjunção em relação à disjunção.

> A falha da distributividade está associada com a propriedade característica da disjunção em teoria quântica. Diferentemente da semântica clássica (bivalente) uma disjunção quântica $X \cup Y$ pode ser verdadeira mesmo que nenhum dos membros seja verdadeiro (Chiara; Giuntini, 2024, p.7, tradução nossa).

Para exemplificar, considere as seguintes proposições referentes ao conceito físico de spin de um elétron.

- $P : spin_x \, up.$
- $Q: spin_y \, up.$
- $R: spin_y \, down.$

Admite-se que P seja verdadeira. Note que as proposições Q e R, pelo princípio da incerteza, são indeterminadas, pois não se sabe qual das duas é verdadeira. No entanto, uma das duas será verdadeira caso seja feita uma medida, isto é, a disjunção $(Q \cup R)$ será verdadeira. Ainda segundo Chiara e Giuntini (2024, p.8, tradução nossa), "Em teoria quântica, frequentemente lidamos com alternativas que são semanticamente determinadas e verdadeiras, enquanto ambos os membros são, em princípio, fortemente indeterminados".

Tabela 2 - Exemplo do spin na lógica quântica.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{P \cap Q}$	$\boldsymbol{P \cap R}$	$\boldsymbol{Q \cup R}$	$\boldsymbol{P \cap (Q \cup R)}$	$\boldsymbol{(P \cap Q) \cup (P \cap R)}$
$\boldsymbol{v}$	i	i	i	i	v	v	i

Fonte: elaborado pelo autor.

Na tabela 2, os termos v e i significam verdadeiro e indeterminado, respectivamente. Note que como o $spin_x \, up$ é verdade, mas $spin_y \, up$ é indeterminado, segue que $P \cap Q$ é indeterminado devido essa incerteza. A equivalência das colunas 7 e 8 deveria valer, isto é, a distributividade. No entanto, embora $Q \cup R$ pareça ser verdadeiro (pois o spin-y deve ser ou up ou $down$), as expressões $P \cap Q$ e $P \cap R$ não fazem sentido físico, já que não se pode saber os spins em x e y ao mesmo tempo. Assim, $P \cap (Q \cup R)$ pode ser considerado verdadeiro, mas $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$ não tem valor definido, mostrando que a distributividade, nesse caso, falha na lógica quântica.

Após algumas décadas, o engenheiro e cientista de sistemas, Lotfi Asker Zadeh, revolucionou a teoria de Lukasiewicz. Aquele publicou, em 1965, na revista *Information and Control,* seu artigo pioneiro denominado *Fuzzy Sets*. É importante observar que inicialmente ele formulou uma extensão da teoria dos conjuntos clássicos que são os Conjuntos Fuzzy e apenas depois que surgiu a Lógica Fuzzy propriamente dita.

Zadeh propôs uma generalização da Lógica Trivalente de Lukasiewicz, isto é, estendeu-se indefinidamente tais valores, assumindo o intervalo $[0,1]$. Assim, surgiu a teoria dos conjuntos fuzzy e, consequentemente, uma lógica não clássica.

Nas primeiras décadas após a publicação do artigo *Fuzzy Sets,* vários avanços nesta área aconteceram, buscando criar linhas de pesquisa e implementar aplicações industriais. De acordo com Bando (2002), a pergunta que mais colaborou para o desenvolvimento da Teoria Fuzzy foi: como fazer uma máquina inteligente?

Essa pergunta motivou as pesquisas que se sucederam e uma das aplicações mais importante da teoria recém-descoberta foi realizada pelo professor E. Mamdani no Reino Unido que, após inúmeras tentativas sem sucesso de controlar uma máquina a vapor com controladores clássicos, resolveu utilizar a lógica fuzzy e conseguiu tal feito, surgindo o primeiro controlador fuzzy.

A lógica fuzzy passou a ser utilizada em outras áreas da matemática e na computação científica no desenvolvimento de sistemas especialistas através de técnicas de raciocínio aproximado. Segundo Ludemir (2020), os sistemas especialistas são do tipo Inteligência Artificial (IA) focada, que consiste em algoritmos especializados em resolver problemas em áreas específicas.

2.2 – Lógica Fuzzy

Na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, admite-se que os elementos tenham graus de pertinência, isto é, pertencimento parcial ao conjunto. Com base nisso, a lógica fuzzy pode ser interpretada como uma generalização da lógica clássica, onde as proposições admitem graus de verdade. Nesse aspecto,

> Na literatura, o termo “lógica fuzzy” é utilizado de duas formas: a primeira para representar e manipular informações inexatas com o propósito de tomar decisões, lançando mão da teoria dos conjuntos fuzzy, de suas funções de pertinência e suas álgebras em geral. A segunda refere-se à extensão da lógica clássica, [...] (Barros; Bassanezi; 2006, p.77).

Na lógica fuzzy, as operações de negação, disjunção e conjunção estão definidas a seguir, através de uma correspondência algébrica, isto é, associando lógica com a álgebra. Sejam $a, b \in [0,1]$, segue que:

i. Negação: $a' = 1 - a$;
ii. Conjunção: $a \wedge b = min(a, b)$;
iii. Disjunção: $a \vee b = max(a, b)$;
iv. Implicação: $a \rightarrow b = min(1,1 + b - a)$.

onde a', $a \wedge b$, $a \vee b$ e $a \rightarrow b$ são valores pertencentes ao intervalo $[0, 1]$ e indicam o grau de verdade correspondente às operações que representam.

Na lógica clássica, a Lei da Não Contradição é um dos princípios fundamentais segundo o qual uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente. Em termos da teoria de conjuntos, equivale a dizer que um elemento não pode pertencer a um conjunto e ao complementar desse, simultaneamente. Na notação proposicional: dado uma proposição P, segue que $P \wedge P' = 0$, isto é, a conjunção de uma proposição com seu complemento é nula.

Como um conjunto fuzzy admite o pertencimento parcial de seus elementos, decorre disso que o princípio da contradição não é de todo válido nesse contexto. De fato, seja a proposição P cujo valor lógico é $n \in [0,1]$ e considere o operador min para a disjunção, segue que:

$$P \wedge P' = min\,[n, n'] \Leftrightarrow P \wedge P' = min\,[n, 1 - n] \;\Leftrightarrow P \wedge P' = \begin{cases} n \;\; se\; 0 \leq n \leq 0{,}5 \\ 1 - n\; se\; 0{,}5 \leq n \leq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

Logo, tem-se que $0 \leq P \wedge P' \leq 0{,}5$. Outro princípio fundamental da lógica clássica é a Lei do Terceiro Excluído. De acordo com esse, uma proposição Q é verdadeira ou sua negação Q' é verdadeira, isto é, não há uma terceira possibilidade entre uma proposição ser verdadeira ou falsa. Na notação proposicional equivale a: dado uma proposição Q, tem-se $Q \vee Q' = 1$, ou seja, a disjunção de uma proposição com seu complemento é igual a 1.

Novamente, tal princípio não é válido na lógica fuzzy, pois essa admite graus de verdade no intervalo $[0,1]$. Com efeito, seja $m \in [0,1]$ o valor lógico da proposição Q, segue que:

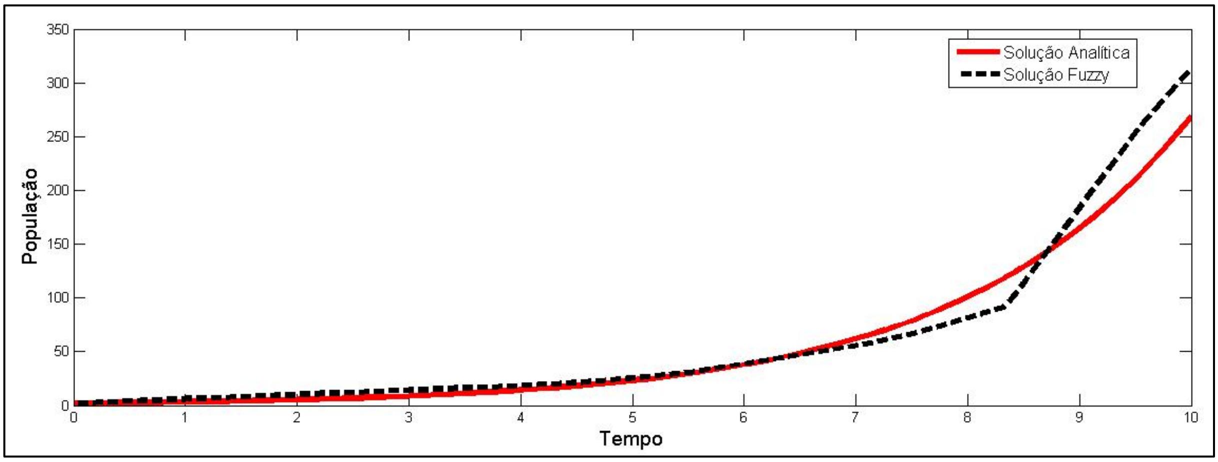
$$Q \vee Q' = max[m, m'] = max\,[m, 1 - m] = \begin{cases} m\; se\; 0{,}5 \leq m \leq 1 \\ 1 - m\; se\; 0 \leq m \leq 0{,}5 \end{cases} \qquad (2)$$

O caso $Q \vee Q' = 1$ ocorre somente se $m = 0\ ou\ m = 1$. Nos demais tem-se $Q \vee Q' < 1$ e, portanto, o Princípio do Terceiro Excluído não é válido como um todo.

2.3 – Sistema especialista fuzzy

Com o uso da lógica fuzzy é possível fazer com que o modelo matemático de um sistema especialista consiga lidar melhor com as incertezas presentes nos dados. Para exemplificar, considere o gráfico 1, onde está representada a solução analítica e a solução Fuzzy do modelo de crescimento populacional Malthusiano. Veja Maciel (2011) para mais detalhes sobre o Modelo Malthusiano e Lógica Fuzzy.

Gráfico 1 - Solução analítica e solução fuzzy do modelo populacional Malthusiano.



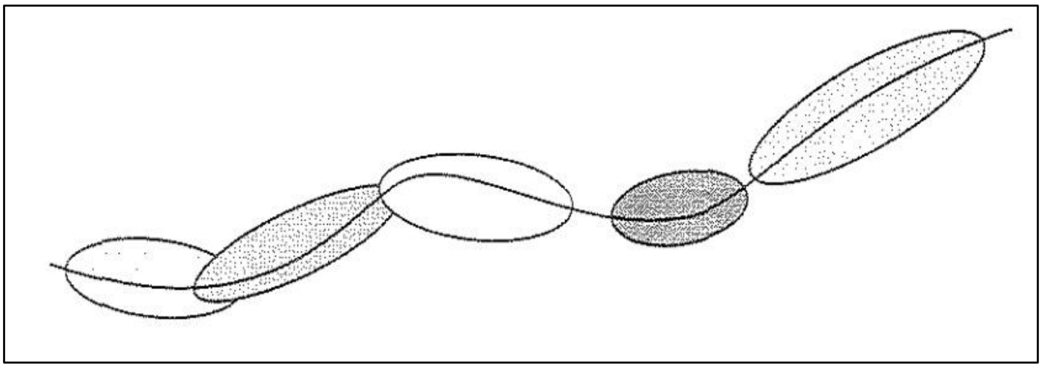
Fonte: Maciel (2011).

Para que a solução fuzzy seja significativa, é necessário que ela obtenha pontos cada vez mais próximos da solução analítica. Em Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF), isso ocorre por meio de grânulos em que:

> [...]. Cada pedaço do conhecimento humano, é uma regra da forma SE...ENTÃO, que define um "grânulo". Um sistema fuzzy é uma coleção de regras fuzzy SE...ENTÃO, ou seja, é um grupo de "grânulos". Todas as regras definem "grânulos" que tentam cobrir alguma curva que representa a informação correta, precisa. Os "grânulos" que cobrem melhor a curva, são as melhores regras do sistema. [...] (Bando, 2002, p. 31).

Na figura 1, tem-se a representação de grânulos cobrindo uma curva teórica. Ao se compor as regras de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy com conhecimentos de especialistas, consegue-se uma aproximação ainda melhor dos grânulos para a cobertura da curva teórica ideal. Segundo Lee (2002, p. 277, tradução nossa), "um sistema especialista é um programa que contém conhecimentos de especialistas humanos e dá respostas à consulta do usuário com um método de inferência". E esse conhecimento é muitas vezes armazenado na forma de uma base de regras, e a forma mais comum é a "se-então".

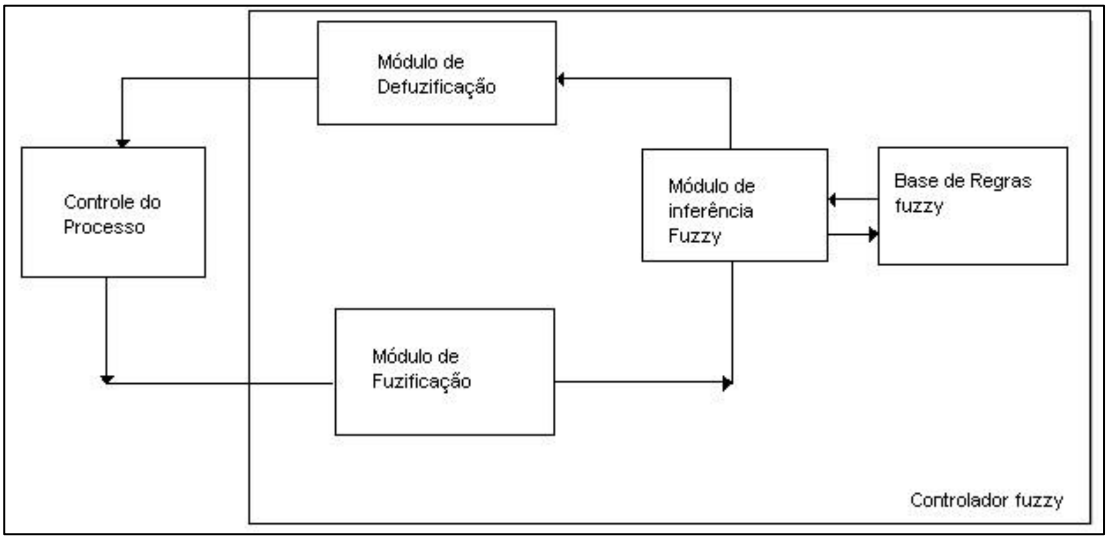
Figura 1 - Cobertura de uma função teórica com grânulos.



Fonte: Bando (2002).

Nessa perspectiva, um sistema especialista fuzzy é um sistema especialista que consegue lidar com a incerteza através da lógica fuzzy. O fluxograma da figura 2 apresenta a estrutura desse modelo.

Figura 2 - Arquitetura de um Sistema Especialista Fuzzy.



Fonte: Ribacionka (1999).

No módulo de fuzificação, os dados de entrada são processados e transformados em valores fuzzy, isto é, obtêm-se o grau de pertinência deles. Para que tal processo ocorra é necessário definir as variáveis linguísticas que representam os conceitos a serem modelados e as funções características de cada conjunto fuzzy. A base de regras é composta por regras da forma se-então que são construídas a partir do conhecimento especialista e são essenciais para que o módulo de inferência forneça as saídas adequadas.

O módulo de inferência, em conjunto com a base de regras, relacionará cada valor recebido com uma ou mais regras e, então, através de métodos de inferência e agregação fornecerá uma solução através de uma região fuzzy. No entanto, tal resultado ainda não fará sentido dado que tal região não possui um significado numérico. Nesse ponto utiliza-se o módulo de defuzificação que fará o papel contrário do módulo de fuzificação, ou seja, converterá uma região fuzzy para um valor numérico que melhor o represente. Tal operação denomina-se defuzificação.

2.4 – Linguagem de programação C++

Há várias linguagens de programação que podem ser utilizadas para a modelagem de sistemas de inferência fuzzy. Por exemplo, a linguagem Python, que é conhecida pela sintaxe de fácil aprendizado e que possui bibliotecas prontas para lidar com a lógica fuzzy. Nesse contexto, uma biblioteca consiste em um conjunto de funções, objetos e recursos prontos que foram escritos para facilitar o desenvolvimento de programas. As bibliotecas sckit-fuzzy e pyfuzzy são utilizadas no desenvolvimento de modelos fuzzy em Python.

No entanto, dada a complexidade de alguns sistemas fuzzy, essa linguagem de programação pode apresentar algumas desvantagens. Por ser uma linguagem interpretada (não compilada), torna-se mais lenta quando comparada com outras. Além disso, faz um uso excessivo de memória.

Outra linguagem de programação bem utilizada é a C++ que é uma extensão da linguagem C. Por ser de alto desempenho, ela permite a construção de programas rápidos, eficientes e que podem ser compilados em diferentes sistemas. Em aplicações relacionadas com sistemas fuzzy, ela conta com uma variedade de bibliotecas como: FuzzyLite, jFuzzylite e Fuzzy C++toolkit.

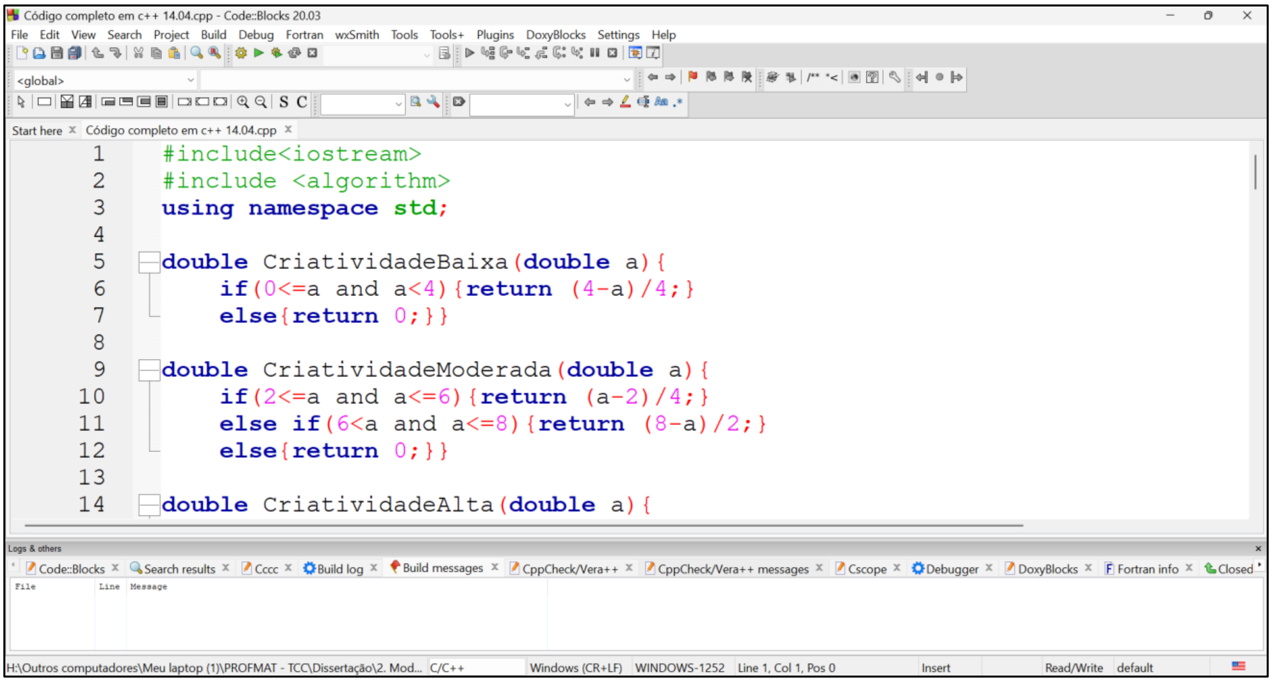
Apesar do uso das bibliotecas prontas facilitar a construção de programas, surge algumas desvantagens nisso. Primeiro, tem-se pouco controle do que ocorre no processo. Segundo, dificulta a depuração ou debug do sistema, isto é, o entendimento do porquê o sistema tomou determinada decisão. Por exemplo, a defuzificação de um conjunto fuzzy pelo método centróide pode apresentar um valor inesperado e o operador não conseguir intervir. Por fim, algumas bibliotecas são pagas, como é o caso da FuzzyLite.

Para contornar isso, pode-se optar pela construção de funções no código-fonte, isto é, no código principal. Essa metodologia permite a personalização das funções de pertinência, mecanismo de inferência e método de defuzzificação. Além disso, facilita o entendimento das decisões que o sistema toma.

A construção de um programa é realizada através de um Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) que é o software responsável por interpretar o código-fonte, facilitar a escrita e organização, mostrar erros e compilar o código. O processo de compilação, por sua vez, consiste em executar o código-fonte escrito em alguma linguagem (como em C++) para o código de máquina, que o computador consegue entender e executar, isto é, funciona como um tradutor. Na última etapa é gerado um arquivo executável.

Dentre as principais IDE destaca-se o Code::Blocks para aplicações envolvendo a linguagem C++, como a que será utilizada nessa pesquisa. Ele é gratuito e vem com um editor de código fonte, um compilador e ferramentas de depuração. Além disso, conta com interface leve e fácil de utilizar, sendo compatível com Windows, Linux e macOS, suportando compiladores como o GCC e MingGW.

Figura 3 – Interface da IDE Code::Blocks.



Fonte: elaborado pelo autor no software Code::Blocks.

É possível notar na interface do Code::Blocks o realce nos termos do código-fonte exemplificado, o que facilita a organização e entendimento. Além disso, a parte inferior da tela apresenta os Logs, isto é, as informações sobre o processo de compilação do sistema. Nas linhas 5, 6 e 7 do código-fonte tem-se uma função de pertinência triangular que retorna o grau de pertinência ao conjunto fuzzy Criatividade Baixa. Em uma única janela é possível escrever todo o código necessário de um sistema especialista fuzzy.

2.5 – Teoria clássica dos conjuntos e Teoria fuzzy dos conjuntos

A teoria clássica dos conjuntos atribui uma relação de pertinência entre elemento e conjunto que é expressa por meio de uma função característica. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ o conjunto das estaturas consideradas "baixas", definidas, por exemplo, como as menores ou iguais a 155 cm. A função característica (3) indica se a estatura x pertence ao conjunto A. Note que tal função modela o conceito de “pessoa de estatura baixa” que foi abordado na seção 2.1.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \leq x \leq 155 \\ 0 & se\ 5 \geq x > 155 \end{cases} \tag{3}$$

O conjunto imagem da função possui apenas os valores 1 e 0, que representam a pertinência e a não pertinência ao conjunto especificado, respectivamente. Isso ocorre porque a teoria clássica dos conjuntos é fundamentada na lógica binária, onde temos dois valores lógicos. Dessa forma, um indivíduo cuja altura é 156 cm não pertence ao conjunto A, considerando que o conjunto A é formado pelos números menores ou iguais à 155 e, assim, uma pessoa só pertence ao conjunto A se a sua altura for um número que está em A.

No entanto, é possível perceber que a relação de pertinência para o conjunto A não capta o conceito real de pessoa de estatura baixa devido as fronteiras dele serem bastante rígidas, pois, segundo Wierman (2010, p. 57, tradução nossa), “[...]. A matemática tradicional é composta de abstrações idealizadas, o que nos força a divisões que não são naturais e estas são contrárias à forma como os seres humanos representam e processam informações”.

No artigo *Fuzzy Sets*, publicado por Zadeh em 1965, definiu-se uma nova teoria dos conjuntos para lidar com incertezas desse tipo, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, segundo a qual:

> Um conjunto fuzzy (classe) A em X é caracterizado por uma função de pertinência (característica) $f_A(x)$ que associa com cada ponto em X um número real no intervalo $[0,1]$, com o valor de $f_A(x)$ em x representando o “grau de pertinência” de x em A. Assim, quanto mais próximo o valor de $f_A(x)$ estiver da unidade, maior o grau de pertinência de x em A (Zadeh, 1965, p.339, tradução nossa).

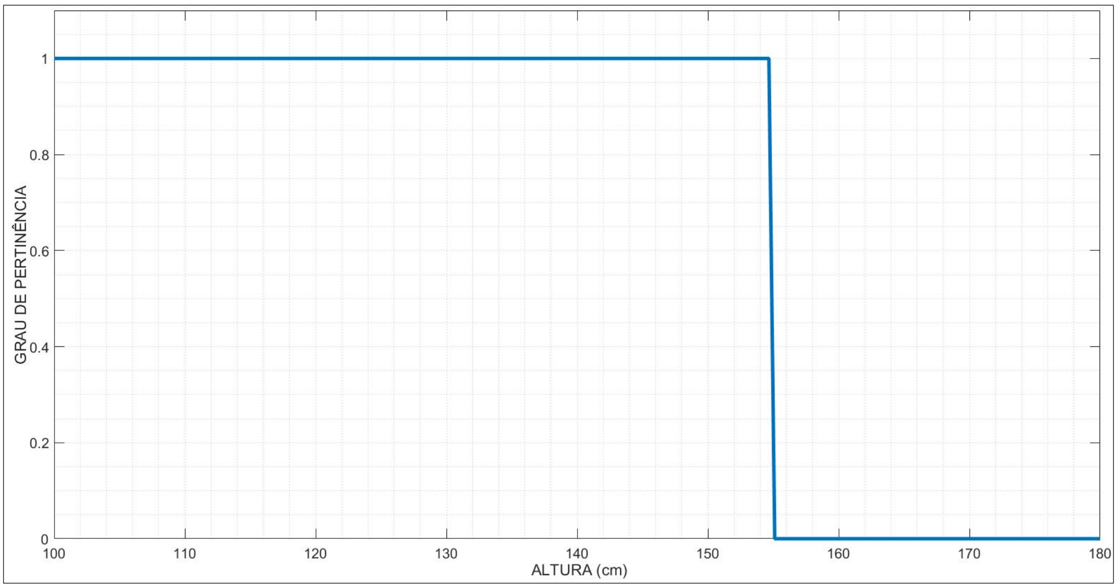
Note que o conjunto X definido por Zadeh pode representar elementos que não sejam necessariamente números. Por exemplo, pode ser um conjunto de pessoas (Ana, José, Maria) em que se determina o grau de pertencimento ao conjunto fuzzy “pessoa de estatura baixa”. Na Teoria dos Conjuntos Fuzzy, a imagem da função de pertinência é ampliada para o intervalo unitário $I = [0,1]$, o que permite representar infinitas possibilidades de graus de pertencimento. Isso torna possível que a função de pertinência modele com mais precisão um determinado conceito, levando em conta as incertezas associadas a ele. Com a generalização proposta por Zadeh, torna-se viável, por exemplo, definir um conjunto fuzzy como o das “pessoas de estatura baixa”, utilizando a função (4).

$$\varphi_{A'}(x) = \begin{cases} \dfrac{170 - x}{15} & se\ 155 \leq x \leq 170 \\ 1 & se\ x < 155 \end{cases} \tag{4}$$

A função característica do conjunto fuzzy das pessoas de estatura baixa é $\varphi_{A'}(x)$, com $A' \subseteq \mathbb{R}$. Um elemento x pertence a esse conjunto em graus de pertinência. Como já citado anteriormente, quanto mais próximo $\varphi_{A'}(x)$ estiver da unidade, maior será seu grau de pertencimento ao conjunto A e, consequentemente, quanto mais próximo $\varphi_{A'}(x)$ estiver de 0, menor será seu grau de pertinência. É importante destacar que os valores 1 e 0 pertencem ao intervalo, onde representam a pertinência total e a não pertinência, respectivamente. Além disso, há várias outras funções (afim, quadrática, gaussiana) que podem modelar o conceito abordado na equação (4), a depender do tipo de problema. Dessa forma, é possível perceber mais nitidamente a diferença entre as duas teorias com base nas representações gráficas.

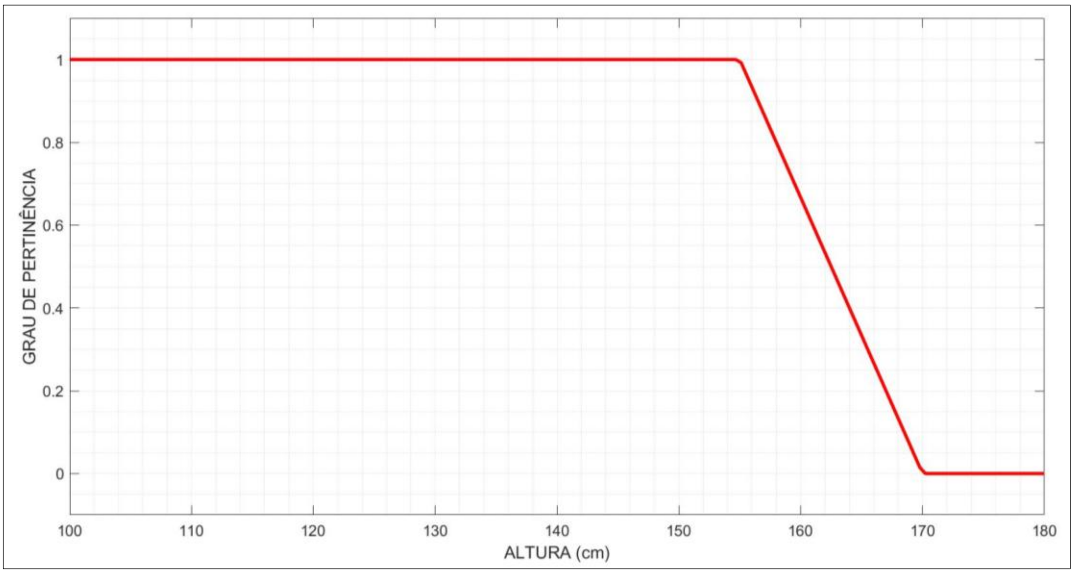
No gráfico 2, que representa a equação (3), fica claro a rigidez dos conjuntos clássicos onde a transição da pertinência é feita de forma abrupta. Assim, para suavizar a curva podemos utilizar o conjunto fuzzy definido pela equação (4) que está representado no gráfico 3.

Gráfico 2 - Conjunto clássico das “pessoas de estatura baixa”.



Fonte: elaborado pelo autor no software MatLab.

Gráfico 3 - Conjunto fuzzy das “pessoas de estatura baixa”.



Fonte: elaborado pelo autor no software MatLab.

A função característica clássica possui fronteiras rígidas, enquanto para o caso fuzzy a fronteira é definida considerando os valores vizinhos como pertencentes ao conjunto, mas com grau de pertinência menor. Além disso, o uso da Teoria Fuzzy possibilita expressar conceitos linguísticos considerando as incertezas no problema a ser modelado.

2.6 – α-cut de um conjunto fuzzy

Definição 2.6.1. Sejam A um conjunto fuzzy e φ a sua função de pertinência. O α-cut A^{α} é o conjunto $crisp$ tal que $A^{\alpha} = \{x \in A; \varphi(x) \geq \alpha\}$, com $\alpha \in [0, 1]$.

Dado o conjunto fuzzy A representado na tabela 3, para $\alpha = 0{,}4$ tem-se que o conjunto α-cut $A^{0,4} = \{a, c\}$, pois $\varphi(a) = 1{,}0 \geq 0{,}4$ e $\varphi(c) = 0{,}6 \geq 0{,}4$, mas $\varphi(b) = 0{,}2 < 0{,}4$.

Tabela 3 - Representação discreta de A

A	$\varphi(A)$
a	1,0
b	0,2
c	0,6

Fonte: dados elaborados pelo autor.

Definição 2.6.2. Sejam o conjunto fuzzy A e o real $\alpha \in [0,1]$, tem-se que o strong α-cut $A^{\alpha+}$ é dado por $A^{\alpha+} = \{x \in A; \varphi(x) > \alpha\}$.

Definição 2.6.3. O suporte $S(A)$ de um conjunto fuzzy A é o strong α-cut quando $\alpha = 0$, isto é, $S(A) = A^{0+} = \{x \in A; \varphi(x) > 0\}$.

Segue da definição que o suporte do conjunto fuzzy abrange todos os elementos que possuem uma relação de pertinência diferente de zero.

Definição 2.6.4. O *core* de um conjunto fuzzy A é o conjunto α-cut A^1, isto é, $C(A) = A^1 = \{x \in A; \varphi(x) = 1\}$.

O *core* do conjunto representado na tabela 3 é $\{a\}$, pois esse é o único elemento com grau de pertinência 1. Se houver mais de um elemento com grau máximo, estes devem ser listados ou especificados em um intervalo para os casos discretos e contínuos, respectivamente.

2.7 – Números fuzzy

Definição 2.7.1. Um número fuzzy é um conjunto fuzzy com domínio em $\mathbb{R}$ que é:

i. normal, ou seja, possui pelo menos um elemento com grau de pertinência 1;
ii. limitado, o suporte do conjunto é um intervalo limitado;
iii. convexo, essencialmente, todo α-cut é um intervalo fechado para o positivo α.

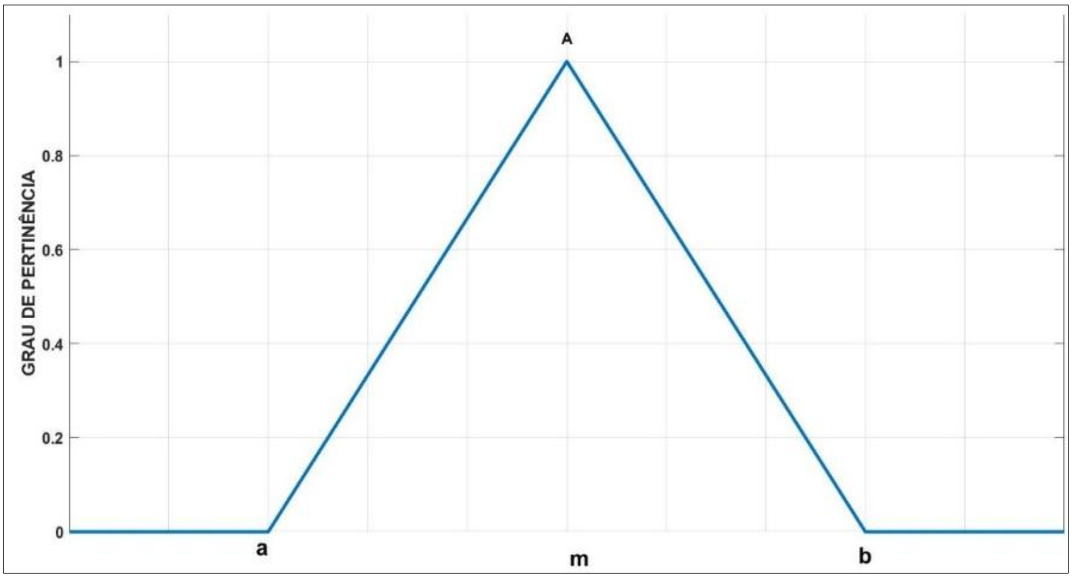
Definição 2.7.2. Um número fuzzy é dito triangular quando o gráfico de sua função de pertinência é representado por um triângulo.

Dados os números reais a, m, b, com $a < m < b$, segue que a função de pertinência de um número fuzzy triangular é dada pela equação (5).

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{m-a} & se\ a \leq x \leq m \\ \dfrac{x-b}{m-b} & se\ m < x \leq b \\ 0 & caso\ contrário \end{cases} \tag{5}$$

Na representação (gráfico 4) desse número fuzzy, note que o eixo das ordenadas é limitado ao intervalo $[0, 1]$, representando o grau de pertinência. No eixo das abscissas, o intervalo $[a, m]$ possui imagens crescentes enquanto em $]m, b]$ são decrescentes e m é o ponto em que a função tem grau máximo de pertinência ao conjunto, ou seja, $\varphi(m) = 1$.

Gráfico 4 - Número Fuzzy Triangular.



Fonte: Elaborado pelo autor no software MatLab.

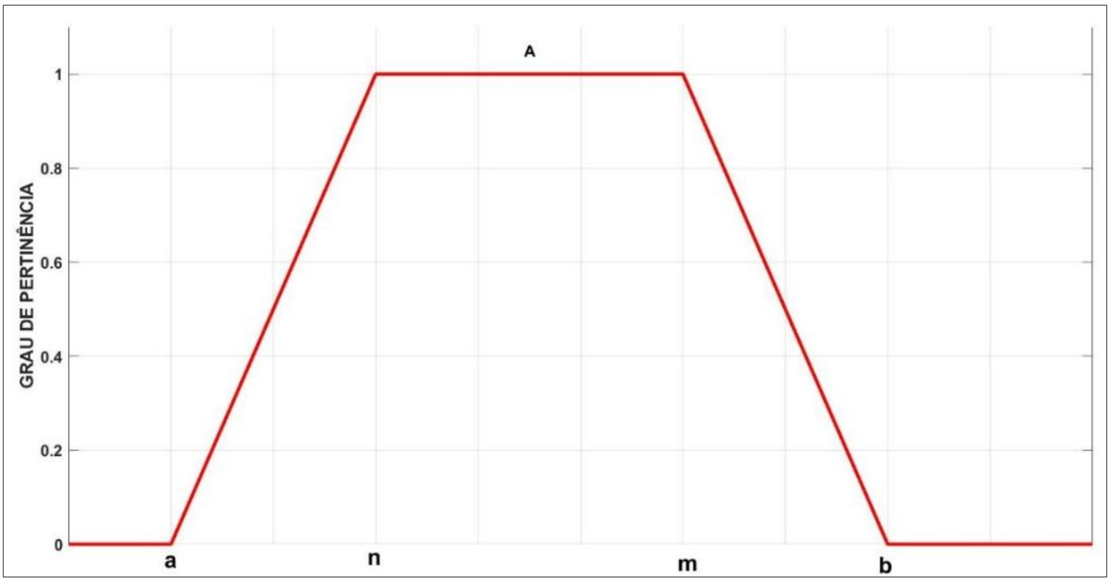
Definição 2.7.3. Um número fuzzy é dito trapezoidal quando o gráfico de sua função de pertinência é representado por um trapézio.

Sejam os números reais a, n, m, b, com $a < n < m < b$, a função de pertinência de um número fuzzy trapezoidal é dada por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{n-a} & se \;\; a \leq x \leq n \\ 1 & se \;\; n < x < m \\ \dfrac{x-b}{m-b} & se \; m \leq x \leq b \\ 0 \; caso \; contrário & \end{cases} \tag{6}$$

Esse tipo de número fuzzy, diferente do triangular, possui mais de um elemento com grau de pertinência máximo.

Gráfico 5 - Número Fuzzy Trapezoidal.



Fonte: Elaborado pelo autor no software MatLab.

2.8 – Relações fuzzy

As relações entre conjuntos *crisp*, conjuntos da lógica clássica binária, podem ser estendidas para relações fuzzy e podem ser expressas em termos de conjuntos fuzzy. Para isso, considere a definição abaixo.

Definição 2.8.1. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ e R uma propriedade específica entre elementos desses conjuntos. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, essa propriedade pode ser descrita usando o par ordenado (x, y). O conjunto dos pares (x, y) é chamado de uma relação binária R, em que $R = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$.

Se R representa uma relação $crisp$ de A para B, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, sua função de pertinência é dada pela equação (7).

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, se\ (x, y) \in R \\ 0, se\ (x, y) \notin R \end{cases} \tag{7}$$

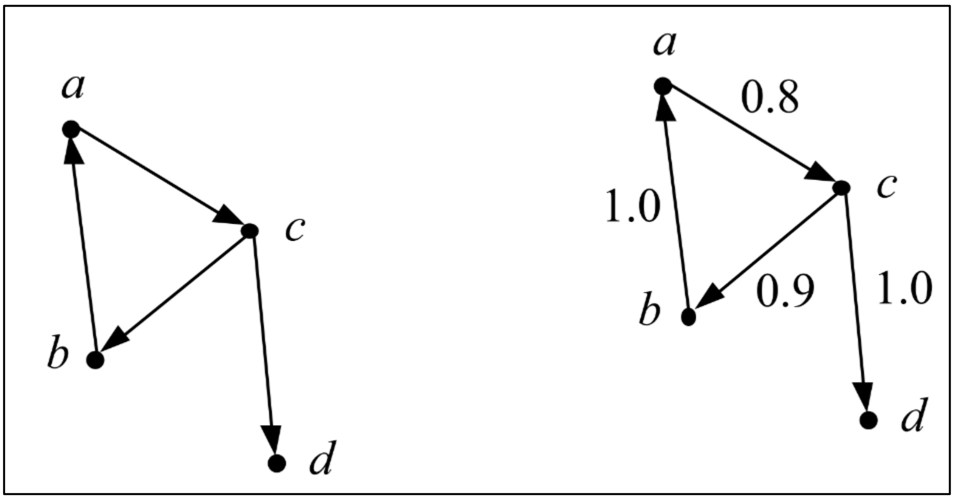
Com base na definição de conjunto fuzzy, pode-se estabelecer uma relação de pertinência entre os pares ordenados (x, y) na relação R, isto é, pode-se atribuir a dois elementos um grau da relação.

Definição 2.8.2. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ e a função de pertinência $\varphi': A \times B \to [0,1]$, uma relação fuzzy R' é dada por:

$$R' = \{((x, y), \varphi'(x, y));\ x \in A, y \in B\} \tag{8}$$

A função de pertinência pode ser interpretada como a força da relação entre x e y, isto é, quando $\varphi'(x, y) \geq \varphi'(x', y')$ segue que a relação (x, y) é mais forte que (x', y'), como pode ser observado na figura 4.

Figura 4 - Relação *crisp* à esquerda e relação fuzzy à direita.



Fonte: Lee (2005).

A relação à esquerda é crisp e $\varphi'(a, c) = \varphi'(c, b) = \varphi'(b, a) = \varphi'(c, d) = 1$. Observe que a relação fuzzy (à direita) apresenta os graus de pertencimento, isto é, (c, d) tem mais força na relação do que (c, b).

Segundo Lee (2005, p. 71, tradução nossa), "relações fuzzy são principalmente utilizadas quando expressamos conhecimentos. Geralmente, o conhecimento é composto de regras e fatos. A regra contém o conceito de possibilidade de um evento b após o evento a ter ocorrido". Desse modo, esse tipo de relação pode ser utilizado nos métodos de inferência.

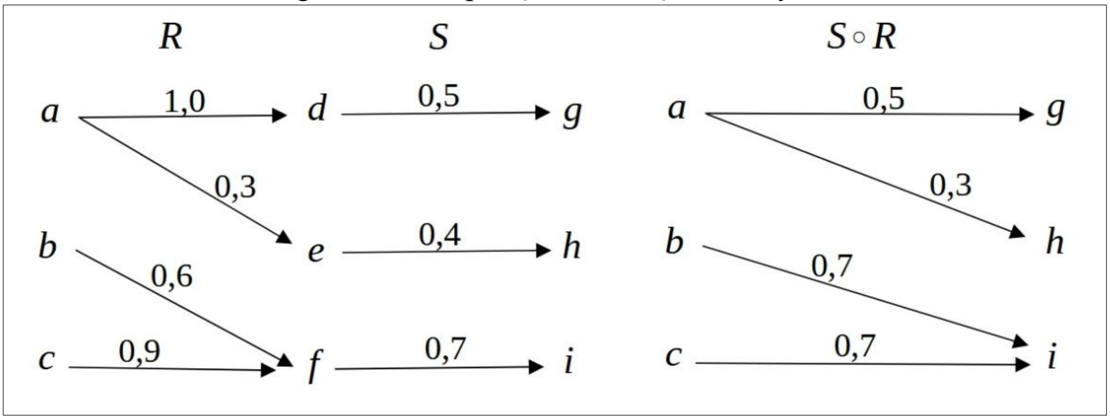
Definição 2.8.3. Sejam duas relações fuzzy R e S definidas nos conjuntos A, B e C, isto é, $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$. A composição $S \circ R = SR$ de duas relações R e S é expressa por uma relação de A para C representada na equação (9), com $(x, y) \in A \times B$ e $(y, z) \in B \times C$.

$$\varphi_{S \circ R}(x, z) = max[min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))], \tag{9}$$

onde $S \circ R$ um subconjunto de $A \times C$.

Presumindo que as relações R e S são as expressões de regras que guiam a ocorrência de eventos ou fatos, então a possibilidade de ocorrer o evento B quando o evento A ocorreu é dado pela regra R. E a regra S indica a possibilidade de C quando B existe. A possibilidade de C quando A ocorreu pode ser induzida pela regra de composição $S \circ R$. Esse raciocínio é chamado de inferência, que é um processo que produz uma nova informação. A figura abaixo apresenta o exemplo de composição de duas relações fuzzy R e S e sua respectiva composição SR.

Figura 5 - Composição de relações fuzzy.



Fonte: elaborado pelo autor.

2.9 – Incerteza e lógica fuzzy

Suponha que os estudantes João, Maria e Pedro prestem um exame para o vestibular da universidade A. A possibilidade de aprovação para essa universidade pode ser considerada um conjunto fuzzy. Dessa forma, os valores de pertinência são $\varphi_A(João) = 0{,}2$, $\varphi_A(Maria) = 0{,}5$, $\varphi_A(Pedro) = 1{,}0$.

A possibilidade de Pedro é concreta, isto é, há o mínimo de incerteza. João tem a possibilidade mínima de ocorrer a aprovação enquanto no caso de Maria a possibilidade é um valor intermediário em que a incerteza é bem elevada. Desse modo, conforme os valores igualam-se a 0 ou 1, a incerteza decresce.

Agora, suponha que os mesmos estudantes prestem vestibular para a universidade B, cuja possibilidade de aprovação é dada por $\varphi_b(João) = 0{,}5$, $\varphi_b(Maria) = 0{,}5$, $\varphi_b(Pedro) = 0{,}6$.

Comparando com o caso anterior, agora a possibilidade de serem aprovados na universidade B é mais incerta, pois os valores estão mais próximos de 0,5. Logo, tem-se que o conjunto fuzzy B apresenta um alto grau de Fuzziness (incerteza). A Fuzziness representa o grau de incerteza associado a um conjunto fuzzy e o valor numérico atribuído é denominado medida de fuzziness.

Definição 2.9.1. Seja a função f dada por $f: P(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $P(X)$ é o conjunto das partes de X, tal função é denominada medida de fuzziness se satisfaz as condições a seguir.

i. $f(A) = 0$ se e somente se A é um conjunto *crisp*.

ii. Quando a incerteza do conjunto fuzzy A é menor do que a do conjunto fuzzy B, o valor da medida $f(A)$ deve ser menor do que $f(B)$. Essa relação implica na propriedade de Monotonicidade.

iii. Se a fuzziness é máxima, então a medida $f(B)$ deve ter o valor máximo.

A primeira condição indica que em um conjunto crisp não se tem incerteza, haja vista que a pertinência de um elemento é rígida, não permitindo ambiguidades. A terceira condição ocorre quando todos os elementos de um conjunto fuzzy A têm grau de pertinência 0,5.

Na literatura há vários métodos para determinar a medida de incerteza de um conjunto fuzzy, dentre os quais tem-se a medida de fuzziness $f(A)$,

$$f(A) = -\sum \left[\varphi_A(x) log_2 \varphi_A(x) + \left(1 - \varphi_A(x)\right) log_2\left(1 - \varphi_A(x)\right)\right], \tag{10}$$

onde φ_A é a função de pertinência do conjunto fuzzy A. Para facilitar a interpretação do valor obtido pela equação (10), pode-se normalizar a função, isto é, ajustar seus valores para que fiquem dentro do intervalo $[0, 1]$. Sendo $|A|$ a cardinalidade do conjunto fuzzy A, segue que a normalização é dada por:

$$\hat{f}(A) = \frac{f(A)}{|A|} \tag{11}$$

Para exemplificar o cálculo de fuzziness considere o conjunto $X = \{a, b, c\}$, e os conjuntos fuzzy $A, A' \subseteq X$.

Exemplo 1: Considere o conjunto fuzzy $A = \{(a, 0.5), (b, 0.2), (c, 1)\}$, pela equação (10) a medida de fuzziness é determinada por:

$$\begin{aligned} f(A) &= -\left[(0{,}5 log_2 0{,}5 + 0{,}5 log_2 0{,}5 + 0{,}2 log_2 0{,}2 + 0{,}8 log_2 0{,}8 + 1 log_2 1 + 0)\right] \\ &= -\left[\left(\tfrac{1}{2}\right) log_2 \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right) log_2 \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5}\right) log_2 \left(\tfrac{1}{5}\right) + \left(\tfrac{4}{5}\right) log_2 \left(\tfrac{4}{5}\right)\right] \\ &= -\left[log_2 2^{-1} + \left(\tfrac{1}{5}\right) log_2 5^{-1} + \left(\tfrac{4}{5}\right) log_2 \left(\tfrac{5}{4}\right)\right] \\ &= \quad log_2 5 - 0{,}6 = 1{,}7. \end{aligned} \tag{12}$$

Na equação (12), foram suprimidas algumas manipulações algébricas elementares que envolvem propriedades dos logaritmos. Para fins de comparação, pode-se reescrever o valor encontrado para o intervalo $[0, 1]$ através do processo de normalização apresentado a seguir.

$$\hat{f}(A) = \frac{f(A)}{|X|} = \frac{1.7}{3} = 0.57 \tag{13}$$

Logo, o conjunto fuzzy A apresenta grau de incerteza 0,57, o que é considerado um valor intermediário.

Exemplo 2: Considere o conjunto fuzzy $A' = \{(a, 0{,}5), (b, 0{,}5), (c, 0{,}5)\}$. De modo análogo ao caso anterior, segue que:

$$\begin{aligned} f(A') &= -[2(0{,}5log_2 0{,}5) + 2(0{,}5log_2 0{,}5) + 2(0{,}5log_2 0{,}5)] \\ &= -\,3log_2 0{,}5 \\ &= -\,3log_2 2^{-1} \\ &= 3 \end{aligned} \tag{14}$$

Substituindo (14) em (11), normaliza-se o conjunto fuzzy A':

$$\hat{f}(A') = \frac{f(A')}{|X|} = \frac{3}{3} = 1 \tag{15}$$

Ao comparar-se os dois exemplos tem-se que o conjunto fuzzy A' apresenta maior grau de incerteza em relação ao conjunto fuzzy A. O mesmo raciocínio que foi abordado no início dessa seção, sobre a possibilidade de aprovação dos estudantes no vestibular, pode ser calculado utilizando a equação (10). Além disso, foi possível verificar através dos exemplos que essa equação satisfaz as condições da definição 2.9.1.

2.10 – Operadores fuzzy

As operações com conjuntos fuzzy são realizadas de modo análogo ao de conjuntos ordinários. Dentre os principais operadores tem-se o complemento, a união e a interseção de conjuntos e, para cada tipo desses, é possível associar funções que os modelam.

Definição 2.10.1. Dado o conjunto fuzzy A, seu operador de complemento C_A carrega o senso de negação e é definido pela função $C_A: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que satisfaz as seguintes condições:

i. Condição de contorno: $C_A(0) = 1$ e $C_A(1) = 0$.

ii. Monotonicidade não crescente: dados $a, b \epsilon [0,1]$, se $a < b$, então $C_A(a) > C_A(b)$.

A função complemento C_A mapeia os valores da função de pertinência do conjunto fuzzy A e o operador de complemento padrão é dado por $C_A(\varphi_A(x)) = 1 - \varphi_A(x)$. Note que ele atende as condições da definição 2.10.1. De fato,

i. Condição de contorno: $C_A(0) = 1 - 0 = 1$ e $C_A(1) = 1 - 1 = 0$ (16)

ii. Monotonicidade: se $a < b$ segue que

$$-a > -b \Leftrightarrow 1 - a > 1 - b \Leftrightarrow C_A(\varphi_A(a)\,) > C_A(\varphi_A(b))$$

Além do complemento padrão, há outros complementos que satisfazem as propriedades da definição 2.10.1 como, por exemplo, a classe de complementos fuzzy de Sugeno, representada na equação (17), onde $\lambda \in (-1, \infty)$ e $x \in [0,1]$.

$$C[\lambda](x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x} \tag{17}$$

Definição 2.10.2. A operação de união (U) de dois conjuntos fuzzy A e B é representada por uma função da forma $U: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, cuja função de pertinência é dada por $\varphi_{A \cup B}(x) = U[\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)]$ e satisfaz as seguintes condições:

i. Condição de contorno: $U(0,0) = 0$, $U(0,1) = 1$, $U(1,0) = 1$, $U(1,1) = 1$.

ii. Comutatividade: $U(a,b) = U(b,a)$.

iii. Monotonicidade: $a < a'$ e $b < b'$, segue que $U(a,b) \leq U(a',b')$.

iv. Associatividade: $U(U(a,b),c) = U(a, U(b,c))$.

O operador de união padrão é o max que consiste em tomar o maior entre os valores de pertinência apresentados.

$$U[\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)] = max[\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)] \tag{18}$$

Assim, como o complemento, a união também apresenta funções que modelam o comportamento do operador padrão max, dentre as quais destaca-se a operação denominada soma probabilística ($A \hat{+} B$). Desse modo, para todo x pertencente ao conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, a função de pertinência dessa operação é dada por:

$$\varphi_{A\hat{+}B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\,\varphi_B(x) \tag{19}$$

O operador de soma probabilística satisfaz as condições da definição 2.10.2. De fato, sejam $a, b \in [0,1]$, segue que:

$$\text{i. Condição de contorno:} \begin{cases} A\hat{+}B\ (0,0) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0 \\ A\hat{+}B\ (0,1) = A\hat{+}B\ (1,0) = A\hat{+}B\ (1,1) = 1 \end{cases} \tag{20}$$

ii. Comutatividade: $A\hat{+}B\ (a,b) = a + b - ab$

$$= b + a - ba$$

$$= A\hat{+}B\ (b,a)$$

iii. Monotonicidade: se $a < a'$ e $b < b'$ segue que:

$$a + b < a' + b' \Leftrightarrow a + b - ab < a' + b' - a'b' \Leftrightarrow A\hat{+}B(a,b) \leq A\hat{+}B(a',b')$$

iv. Associatividade: $\mathrm{A\hat{+}B}\left(\mathrm{a}, \mathrm{A\hat{+}B}\ (\mathrm{b},\mathrm{c})\right) = \mathrm{a} + [\mathrm{A\hat{+}B}(\mathrm{b},\mathrm{c})] - \mathrm{a} \cdot [\mathrm{A\hat{+}B}(\mathrm{b},\mathrm{c})]$

$$= \mathrm{a} + (\mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{bc}) - \mathrm{a} \cdot (\mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{bc})$$

$$= \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} - \mathrm{bc} - \mathrm{ab} - \mathrm{ac} + \mathrm{abc}$$

$$= \mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{ab} + \mathrm{c} - \mathrm{bc} - \mathrm{ac} + \mathrm{abc}$$

$$= (\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{ab}) + \mathrm{c} - \mathrm{c}(\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{ab})$$

$$= \mathrm{A\hat{+}B}(\mathrm{a},\mathrm{b}) + \mathrm{c} - \mathrm{c} \cdot \mathrm{A\hat{+}B}(\mathrm{a},\mathrm{b})$$

$$= \mathrm{A\hat{+}B}\ (\mathrm{A\hat{+}B}(\mathrm{a},\mathrm{b}), \mathrm{c})$$

Definição 2.10.3. A operação de interseção I de dois conjuntos fuzzy A e B é representada por uma função da forma $I: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, cuja função de pertinência é dada por $\varphi_{A\cap B}(x) = I[\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)]$ e satisfaz as seguintes condições:

i. Condição de contorno: $I(0,0) = 0, I(0,1) = 0,\ I(1,0) = 0, I(1,1) = 1.$

ii. Comutatividade: $I(a,b) = I(b,a)$.

iii. Monotonicidade: $a < a'$ e $b < b'$ segue que $I(a,b) \leq I(a',b')$.

iv. Associatividade: $I(I(a,b),c) = I\big(a, I(b,c)\big)$.

A operação de interseção I de conjuntos fuzzy é modelada pelo operador padrão min, cuja função de pertinência tem a forma:

$$\varphi_{A\cap B}(x) = I[\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)] = min[\varphi_A(x),\ \varphi_B(x)] \tag{21}$$

Em Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF), comumente é utilizado o operador de produto algébrico no processo de inferência em regras fuzzy. Dado $x \in X$, segue que a função que modela o produto algébrico é dada por:

$$\varphi_{A\cdot B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x) \tag{22}$$

De modo análogo à (20), é possível provar que esse operador satisfaz as condições enunciadas na definição 2.10.3.

2.11 – Variáveis linguísticas

Um conjunto clássico é caracterizado pela sua função de pertinência e, no contexto aplicado, pode receber uma designação, como foi o caso do conjunto das pessoas de baixa estatura, abordado na seção 2.1. Na teoria dos conjuntos fuzzy, pode-se atribuir termos linguísticos para expressar matematicamente os conceitos modelados em Sistemas Fuzzy. Para exemplificar, considere a variável linguística **estatura**. A partir dela é possível elaborar os termos linguísticos estatura muito baixa, estatura baixa, estatura média e estatura alta. Todos esses são representados por conjuntos fuzzy, sejam eles triangulares, trapezoidais, gaussianos etc.

Com o uso das variáveis linguísticas fuzzy é possível modelar termos que carregam imprecisões. Uma das aplicações desse conceito são os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) que aproximam o sistema da forma humana de operar, o que é denominado raciocínio aproximado. Para exemplificar, considere o conjunto fuzzy A, triangular, e que representa o conceito "próximo de 5" cuja função de pertinência φ_A é definida como:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} & se\ 3 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{7-x}{2} & se\ 5 < x \leq 7 \\ 0, & outros\ casos \end{cases} \tag{23}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $\varphi_A(x) \in [0,1]$. Quando x tende a 5 tanto pela direita quanto pela esquerda, o seu grau de pertinência ao conjunto A tende a 1, modelando o termo linguístico. Na variável "próximo de 5", pode-se implementar modificadores para torná-la mais adequada a determinados contextos como, por exemplo, o uso do advérbio *muito.* O novo termo linguístico representará um conjunto fuzzy, cuja forma triangular será mais estreita, modelando o conceito “muito próximo de 5”. É importante destacar que as variáveis linguísticas dependem do tipo de conjunto escolhido para representá-lo, que pode ser triangular, trapezoidal, gaussiano. Para mais informações sobre esses tipos de conjuntos fuzzy, veja Ross (2010).

2.12 – Método de inferência de Mamdani

O processo de inferência consiste em obter uma nova informação a partir de conhecimentos existentes. E para representar o conhecimento, comumente adota-se regras da forma se-então, que são interpretadas como implicações.

Na literatura da Lógica Fuzzy, vários métodos têm sido utilizados, como o de Tsukamoto, Larsen e Mamdani. Dentre esses, o mais frequente é o de Mamdani em que se faz uso do operador min para modelar a implicação fuzzy. Para exemplificar, considere os conjuntos fuzzy A_1, A_2, B_1, B_2, C_1e C_2 e as seguintes regras:

$$\begin{aligned} R_1&: Se\ x \in A_1\ e\ y \in B_1, então\ z \in C_1 \\ R_2&: Se\ x \in A_2\ e\ y \in B_2, então\ z \in C_2 \end{aligned} \tag{24}$$

O processo de inferência de (24) pelo método de Mamdani é dado por:

$$\mu_{C_1}(z) = min\left[\mu_{A_1}(u_0), \mu_{B_1}(v_0)\right] \tag{25}$$

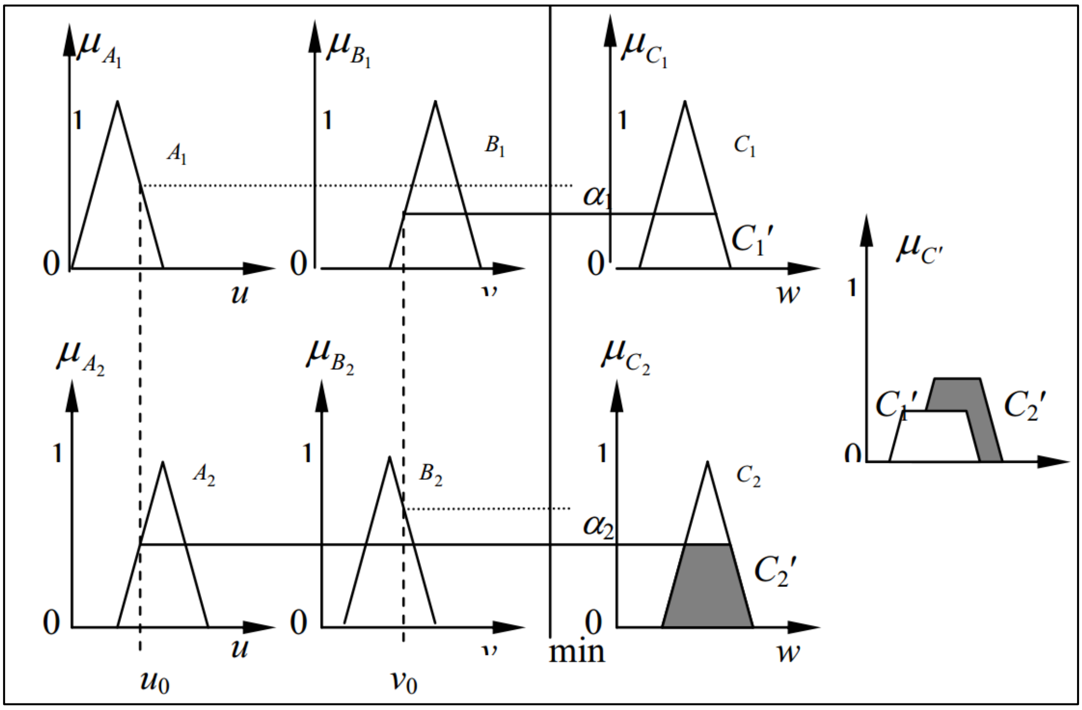
$$\mu_{C_2}(z) = min\left[\mu_{A_2}(u_0), \mu_{B_2}(v_0)\right] \tag{26}$$

onde $u_0 \in (A_1 \cup A_2)$ e $v_0 \in (B_1 \cup B_2)$. Os valores $\mu_{C_1}(z)$ e $\mu_{C_2}(z)$ representam o grau de ativação de cada regra, resultando em regiões fuzzy correspondente nos conjuntos C_1 e C_2, respectivamente. Caso se tenha mais de uma regra, a agregação dessas é dada pelo operador max.

$$\mu_C(z) = max\left[\mu_{C_1}(z), \mu_{C_2}(z)\right] \tag{27}$$

Na figura 6 está representada a esquematização desse método de inferência. Note que ao aplicar o operador min, obtêm-se os graus de ativação α_1 e α_2 que por sua vez geram as regiões fuzzy $C_1{}'$ e $C_2{}'$. Por fim, essas são agregadas gerando uma região fuzzy $C' = C_1{}' \cup C_2{}'$.

Figura 6 - Representação do método de inferência de Mamdani.



Fonte: Lee (2002, p. 238).

2.13 – Métodos de defuzificação

Após o processo de inferência fuzzy, obtém-se um conjunto fuzzy truncado, que é delimitado a partir do grau de ativação da(s) regra(s). No entanto, para obter-se um valor numérico (*crisp*), faz-se necessário métodos chamados de defuzificação de conjuntos fuzzy. Dentre os principais destacam-se o da Média dos Máximos (MOM) e o Centro de Gravidade (Centróide).

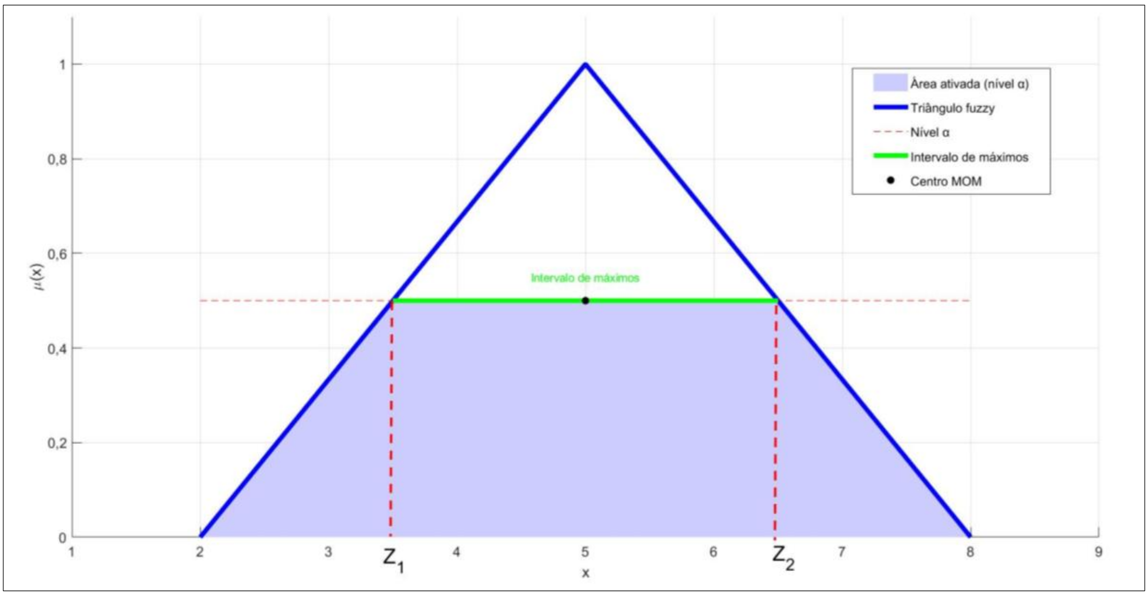
2.13.1- Média dos Máximos (MOM)

Esse método de defuzificação consiste em determinar o valor numérico M que representa a média aritmética entre os valores (z_i) que apresentam grau de pertinência máxima no conjunto fuzzy resultante.

$$M = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{k} \tag{28}$$

No gráfico 6 tem-se o conjunto fuzzy triangular $A(2, 5, 8)$, com os intervalos de máximos e cujo grau de ativação é $\alpha = 0{,}5$.

Gráfico 6 - Conjunto fuzzy A (2, 5, 8).



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Os valores, cuja pertinência ao conjunto A é máxima estão no intervalo $[3{,}5, 6{,}5]$. Pela equação (28), a Média dos Máximos desse conjunto para $\alpha = 0{,}5$ será dado por:

$$M = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{k} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} = \frac{3{,}5}{2} + \frac{6{,}5}{2} = 5 \quad (29)$$

Logo, após o processo de inferência, o resultado obtido pelo método de defuzzificação é o valor numérico 5 que possui significado para o Sistema Fuzzy implementado.

2.13.2- Centro de Gravidade (Centróide)

Esse método consiste em determinar a abscissa do centro de gravidade das regiões fuzzy agregadas pelo método de inferência e, pela equação (30), é possível obter esse valor numérico,

$$C_i = \frac{\int_a^b x \cdot \varphi(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)\, dx}, \quad (30)$$

onde $\varphi(x)$ é a função de pertinência da região fuzzy atingida e $[a, b]$ é o intervalo que corresponde à base do(s) conjunto(s) fuzzy ativado(s) pelo método de inferência.

2.14 – Avaliação matemática com critérios subjetivos e lógica fuzzy

A avaliação da resolução de problemas matemáticos não se restringe apenas à veracidade da resposta dada pelo aluno, mas também à escrita e organização das ideias. Desse modo,

> Os educadores e investigadores relacionados com a educação não precisam esperar por novos modelos de medida para começarem a investigar novas abordagens da avaliação de problemas. Uma das abordagens mais promissoras é tratar a resolução de um problema como uma tarefa de composição escrita (Abrantes, 1994, p. 47).

Ao dissertar sobre a resolução de um problema matemático, o aluno planeja a organização do argumento a ser utilizado, bem como expressa o encadeamento lógico das ideias, desenvolvendo a competência da comunicação. Nesse sentido, segundo Abrantes (1994, p.49), “A matemática está relacionada com a comunicação. O aluno que não consegue comunicar aquilo que fez com o problema não o resolveu verdadeiramente”.

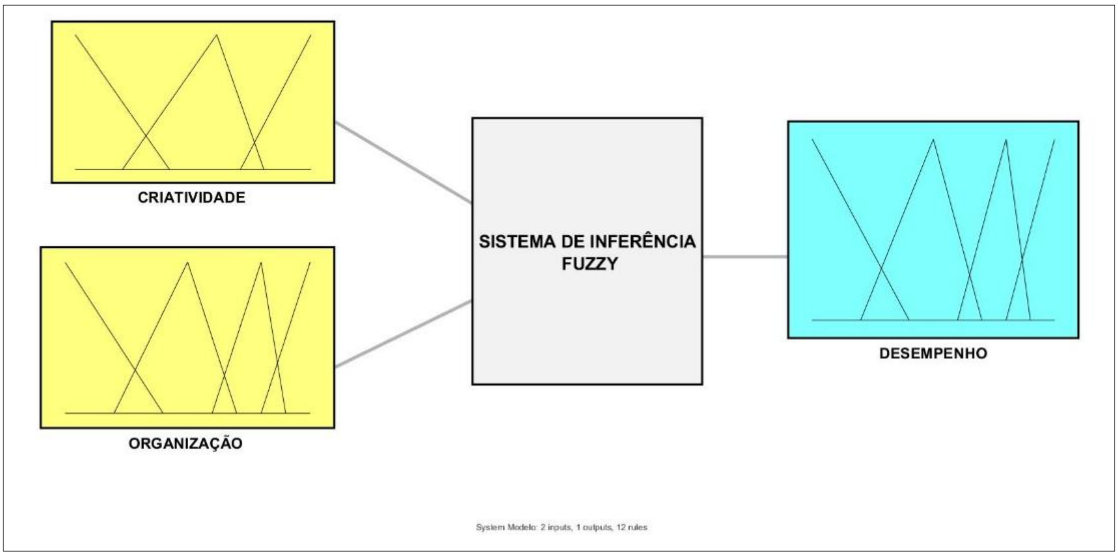
A comunicação depende de vários fatores como, por exemplo, a organização e a criatividade no processo de resolução. Os termos criatividade e organização tendem a carregar subjetividades e, assim, surge o principal desafio na abordagem de critérios subjetivos: a inconsistência presente nos julgamentos entre os avaliadores. Por exemplo, ao se avaliar a variável “organização razoável” do estudante tem-se que para cada avaliador pode haver ponderações muito distintas, pois tal termo apresenta uma noção vaga e cada pessoa constrói uma significação única. Nesse sentido, a Lógica Fuzzy surge com sua principal característica que é lidar com esse tipo de incerteza.

Na literatura que trata da aplicação dos modelos matemáticos baseados em lógica fuzzy, há inúmeros trabalhos que visam a construção de sistemas fuzzy, cujo objetivo é lidar com os conceitos vagos presentes na avaliação. Na pesquisa de Narcizo (2019) são abordados os critérios subjetivos interação pessoal, participação nas atividades e assiduidade do aluno. Através da construção de uma base de regras robusta, o autor modela o Sistema Baseado em Regras Fuzzy, inferindo uma nota que melhor represente a análise dos critérios citados. Isso ocorre devido a Teoria dos Conjuntos Fuzzy considerar graus de pertinência entre elemento e conjunto de modo que os critérios utilizados possam ser expressos como conjuntos fuzzy e, também, pelos métodos de inferência que foram apresentados nas seções anteriores. Barros (2024) propõe o diagnóstico escolar a partir dos critérios de dedicação, apoio da família, ociosidade, má influência e ambiente apropriado. Para isso, cada critério é definido a partir de conjuntos fuzzy como, por exemplo, *dedicação boa* é representada pelo conjunto fuzzy triangular (4 7 8). Assim, obtém-se um valor normalizado que representa o diagnóstico escolar do estudante.

3 – SISTEMA ESPECIALISTA FUZZY PARA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO EM MATEMÁTICA

Neste capítulo será abordada a construção metodológica para a implementação, através da linguagem de programação C++, de um sistema especialista fuzzy para a avaliação de desempenho em Matemática. Esse contará com as variáveis de entrada criatividade e organização. E, assim, a partir do mecanismo de inferência, atribuirá um valor numérico que represente o desempenho na avaliação. Na figura 7 há a representação da arquitetura desse modelo matemático.

Figura 7- Arquitetura do Sistema Especialista Fuzzy.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Para a modelagem do sistema em linguagem C++ será utilizado o software Code::Blocks por ser uma IDE que possui uma interface fácil de utilizar e que é bastante poderosa.

3.1 – Parametrização das variáveis linguísticas

Quando se utiliza termos como criatividade, organização e desempenho, há um certo nível de incerteza atrelado à interpretação, pois são palavras que representam conceitos vagos. Para contornar isso, pode-se fazer uso da Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Nesse contexto, define-se a variável fuzzy Criatividade com domínio no intervalo real $[0,10]$, cujos termos linguísticos são modelados pelos conjuntos fuzzy triangulares: baixa (0, 0, 4), moderada (2, 6, 8) e alta (7, 10, 10). As funções de pertinência são construídas com base na equação (5).

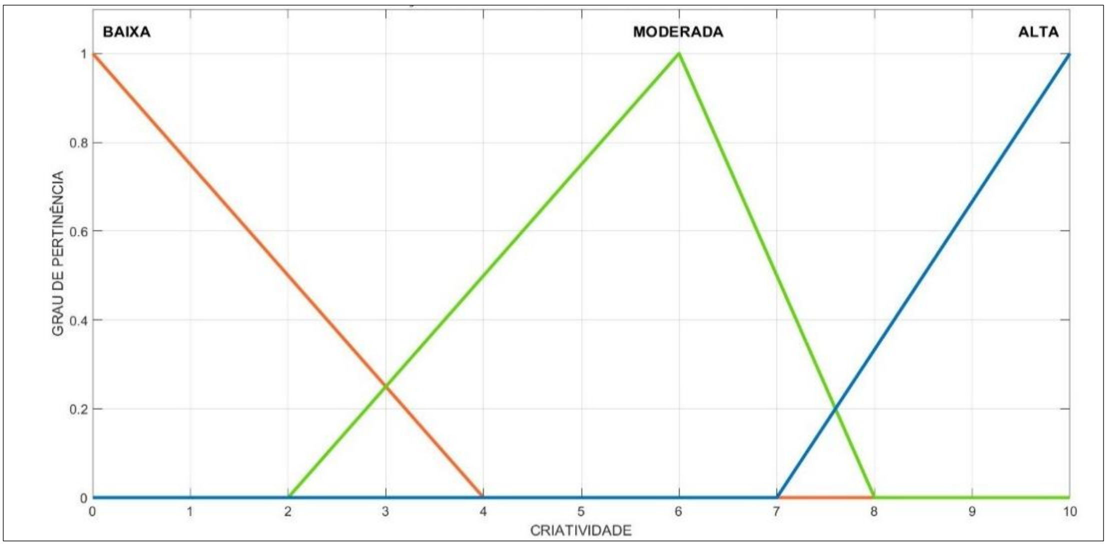
$$\text{Criatividade Baixa:} \quad \mu_{CB}(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{4} \; se\ x \in [0,4]; \\ 0 \;\; , outros\ casos. \end{cases} \tag{31}$$

$$\text{Criatividade Moderada:} \quad \mu_{CM}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4} \;\; se\ x \in [2,6]; \\ \frac{8-x}{2} \; se\ x \in \;]6,8]; \\ 0, outros\ casos. \end{cases} \tag{32}$$

$$\text{Criatividade Alta:} \quad \mu_{CA}(x) = \begin{cases} \frac{x-7}{3} \;\; se\ x \in [7,10]; \\ 0 \;\; , outros\ casos. \end{cases} \tag{33}$$

A escolha dos parâmetros foi realizada após simular o comportamento da superfície resultante do sistema fuzzy e verificar a presença de alterações bruscas no comportamento do gráfico. Desse modo, buscou-se tornar a superfície fuzzy a mais suave possível, alternando os parâmetros das funções de pertinência nas três variáveis linguísticas: criatividade, organização e desempenho.

Gráfico 7 - Representação dos termos linguísticos da variável Criatividade.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Para exemplificar o processo de fuzificação da variável Criatividade, considere o valor numérico $x = 3{,}5$. Pelo gráfico 7, é possível perceber que esse valor possui pertinência aos conjuntos fuzzy criatividade baixa e criatividade moderada. Logo, pelas equações (31) e (32) tem-se que $\mu_{CB}(3{,}5) = 0{,}125$ e $\mu_{CM}(3{,}5) = 0{,}375$, isto é, o valor numérico 3,5 de criatividade pertence ao conjunto de criatividade baixa com grau $0{,}125$ e ao conjunto de criatividade moderada com grau $0{,}375$. Aqui, destaca-se novamente essa característica da lógica fuzzy de lidar com dados que possam apresentar conceitos vagos e que possuem fronteiras flexíveis.

As funções de pertinência que definem os termos linguísticos são dadas por sentenças condicionais. Disso decorre que a implementação em linguagem C++ também deverá obedecer a estrutura condicional, que no caso da linguagem de programação é dado pelo if-else. Assim, a equação (31), que modela o termo linguístico criatividade baixa, pode ser escrita como:

```
//função de pertinência do termo linguístico Criatividade Baixa
   double CriatividadeBaixa(double a){
    if(0<=a and a<4){return (4-a)/4;}
    else{return 0;}}
```

Na primeira linha, as barras indicam um comentário acrescentado no código fonte que facilita a interpretação e que não é compilado. Na segunda linha, o double armazena dados para representar números reais com maior precisão. Em seguida, define-se a função CriatividadeBaixa que recebe um valor real a e executa o comando entre as chaves. Na estrutura condicional if, o código presente entre as chaves é executado caso seja satisfeita a condição dada entre os parênteses, isto é, se $a \in [0,4]$, a função retorna $\frac{4-a}{4}$, que é o grau de pertinência. Caso contrário, é executado o comando da estrutura condicional else que é retornar o valor 0. O código C++ dos demais termos linguísticos estão definidos no Apêndice A.

A variável linguística Organização possui quatro termos linguísticos fuzzy triangulares: ruim (0, 0, 4), regular (2, 5, 7), boa (6, 8, 9) e excelente (8, 10, 10), que são representados pelas funções μ_{OR}, $\mu_{OR'}$, μ_{OB} e μ_{OE}, respectivamente. Assim, dado $x \in \mathbb{R}$, tem-se as seguintes funções de pertinência:

$$\text{Organização Ruim: } \mu_{OR}(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{4} & se\ x \in [0,4], \\ 0 & , outros\ casos. \end{cases} \tag{34}$$

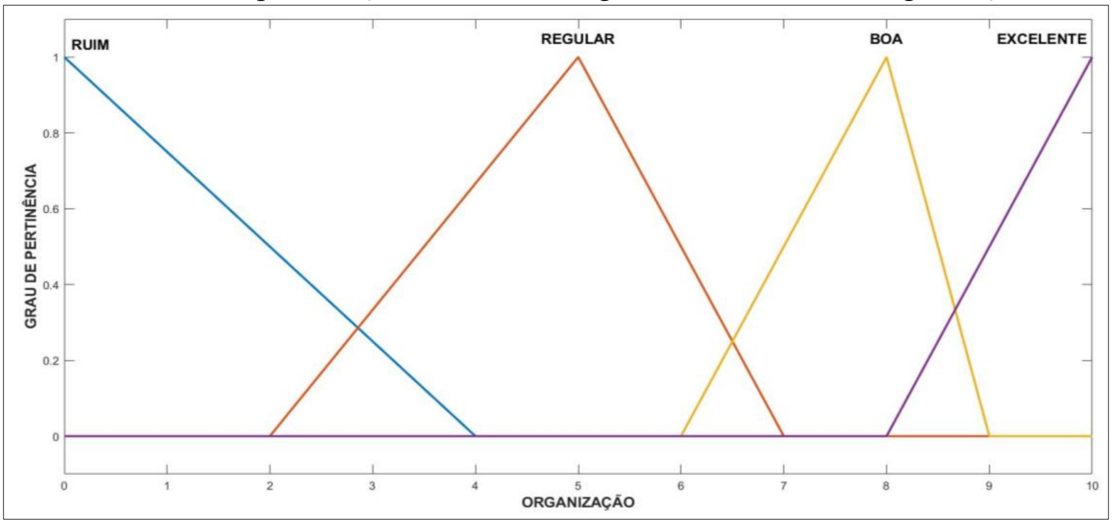
$$\text{Organização Regular: } \mu_{OR'}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & se\ x \in [2,5]; \\ \frac{7-x}{2} & se\ x \in\ ]5,7]; \\ 0, outros\ casos. \end{cases} \tag{35}$$

$$\text{Organização Boa: } \mu_{OB}(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2} & se\ x \in [6,8]; \\ 9-x\ se\ x \in\ ]8,9]; \\ 0, outros\ casos. \end{cases} \tag{36}$$

$$\text{Organização Excelente: } \mu_{OE}(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{2} & se\ x \in [8,10], \\ 0 & , outros\ casos. \end{cases} \tag{37}$$

O processo de fuzificação dessa variável é análogo ao da variável Criatividade. A seguir apresenta-se graficamente os termos linguísticos correspondentes.

Gráfico 8 - Representação dos termos linguísticos da variável Organização.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

A implementação em linguagem C++ dessa variável é análoga ao caso anterior. Desse modo, para exemplificar, considere o termo linguístico organização boa, representado pelo conjunto fuzzy triangular (6, 8, 9). Segue que:

```
//Função de pertinência do termo linguístico Organização Boa
double OrganizacaoBoa(double b){
 if(6<=b and b<=8){return (b-6)/2;}
 else if(8<b and b<=9){return (9-b);}
 else{return 0;}}
```

Como a função de pertinência é dada por sentenças, o código é estruturado através de condições. Caso não seja satisfeita a condição do if, o código verificará a condição do else if e se essa também não for satisfeita, será executado o else. Para exemplificar, se o valor b que a função OrganizaçãoBoa receber estiver entre 6 e 8, o código retorna $\frac{b-6}{2}$. Caso b esteja entre 8 e 9, tem-se $(9-b)$. Por fim, se nenhuma dessas condições forem satisfeitas, retorna-se o valor 0. O código C++ dos demais termos linguísticos estão definidos no Apêndice A.

A variável linguística de saída é o Desempenho cujo domínio é o intervalo real $[0,10]$ e o termos linguísticos são definidos pelos conjuntos fuzzy triangulares: insuficiente (0, 0, 4), regular (2, 5, 7), bom (6, 8, 9) e excelente (8, 10, 10). As funções de pertinência são, respectivamente, μ_{DI}, μ_{DR}, μ_{DB} e μ_{DE}.

$$\text{Desempenho Insuficiente: } \mu_{DI}(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{4} sex \in [0,4]; \\ 0 \ , outros\ casos. \end{cases} \tag{38}$$

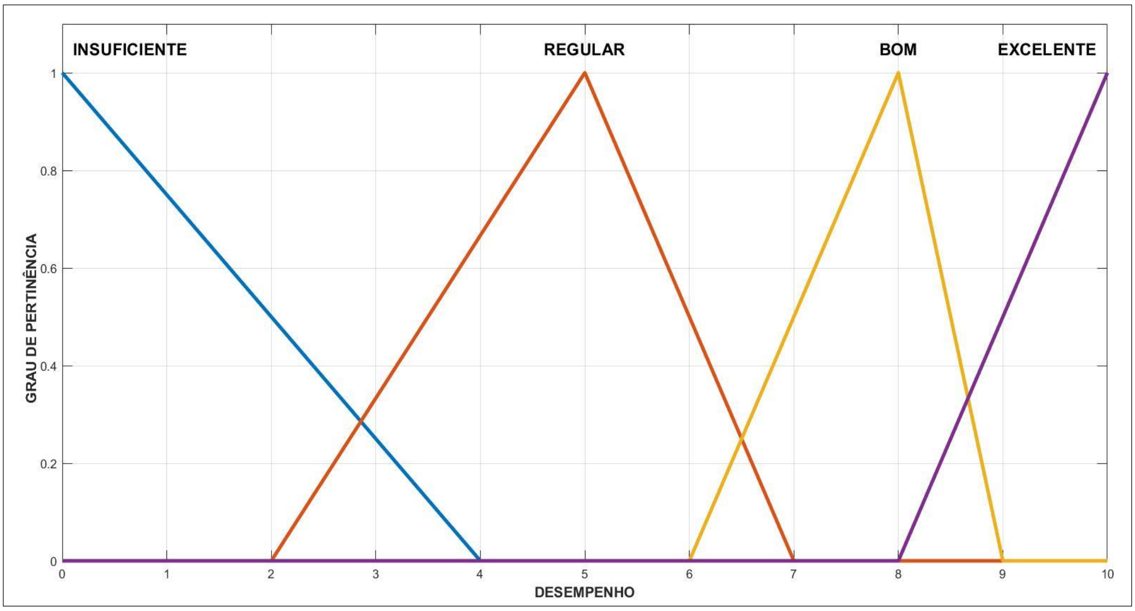
$$\text{Desempenho Regular: } \mu_{DR}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & se\ x \in [2,5]; \\ \frac{7-x}{2} & se\ x \in\ ]5,7]; \\ 0, outros\ casos. \end{cases} \tag{39}$$

$$\text{Desempenho Bom: } \mu_{DB}(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2} & se\ x \in [6,8]; \\ 9-x\ se\ x \in\ ]8,9]; \\ 0, outros\ casos. \end{cases} \tag{40}$$

$$\text{Desempenho Excelente: } \mu_{DE}(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{2} & se\ x \in [8,10]; \\ 0 & , outros\ casos. \end{cases} \tag{41}$$

No gráfico 9 tem-se a representação dessas funções de pertinência. Percebe-se que as fronteiras de cada conjunto modelado fazem intersecção com os conjuntos vizinhos. E é nesse aspecto que a teoria dos conjuntos fuzzy difere da teoria clássica, como foi explicado anteriormente.

Gráfico 9 - Representação dos termos linguísticos da variável Desempenho.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

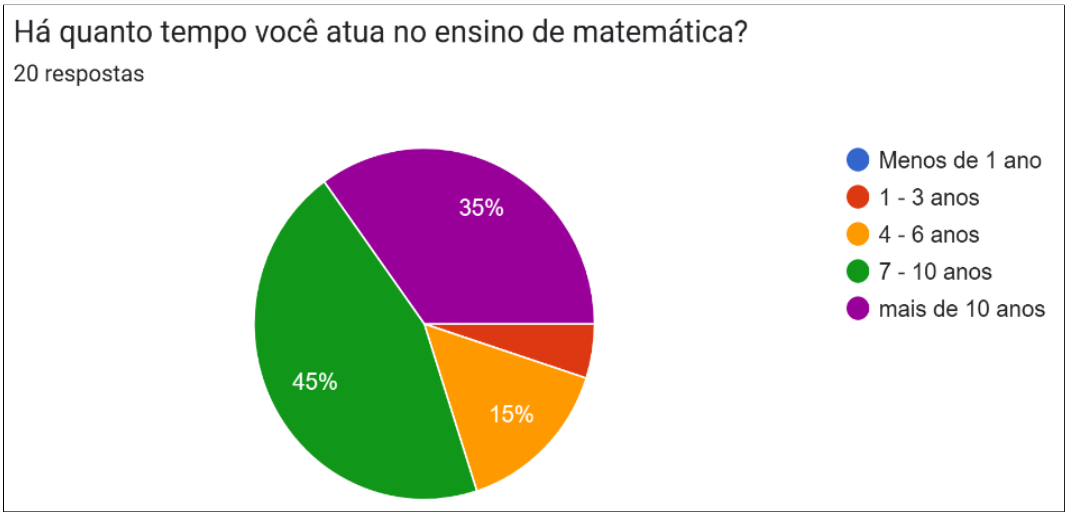
Quando se definem as funções de pertinência da variável de saída de um sistema fuzzy, objetiva-se a utilização da função inversa no mecanismo de defuzificação, que é apresentado na seção 3.4. Nesse caso, não foram implementadas as funções de pertinência em C++, pois elas serão modeladas no processo de construção do método de defuzificação.

3.2 – Configuração da base de regras

Em um Sistema Especialista Fuzzy, a base de regras é o componente chave para o funcionamento do módulo de inferência, pois estabelece a relação entre os termos linguísticos das variáveis de entrada com a variável de saída. As regras são da forma se-então apresentadas em (24).

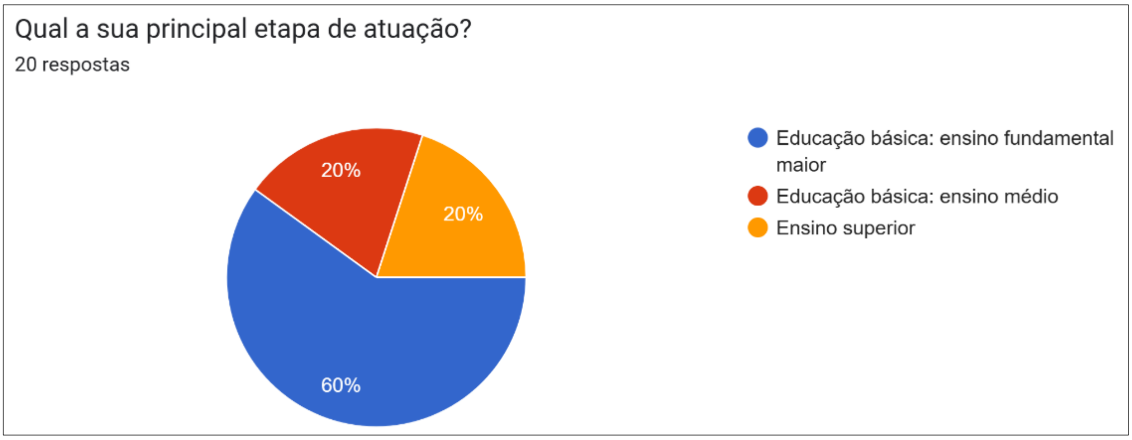
A determinação da quantidade de regras é dada pelo número de combinações possíveis dos termos linguísticos das variáveis de entrada. Desse modo, como a criatividade possui 3 termos e a organização 4, pelo Princípio Fundamental da Contagem, tem-se um total de 12 regras. As regras desse trabalho foram obtidas através de formulário (ver Apêndice B) destinado a professores de Matemática. A primeira pergunta do formulário é sobre o tempo de atuação no ensino de Matemática, onde foi possível constatar que a maioria possui mais de 10 anos.

Gráfico 10 - Tempo de atuação no ensino de Matemática.



Fonte: elaborado pelo autor no formulário do Google Forms.

Gráfico 11 - Principal etapa de atuação.



Fonte: elaborado pelo autor no formulário Google Forms.

A segunda pergunta refere-se à principal etapa de atuação no ensino. Nota-se que a maioria atua na educação básica que compreende o ensino fundamental e médio (gráfico 11).

Em seguida, foram sugeridas as combinações de modo a abordar cada uma das 12 regras do sistema, buscando-se a resposta que o professor julga correta de acordo com sua experiência. Vale ressaltar que em Sistemas Especialistas é possível obter resultados significativos com um número pequeno na amostragem.

No questionário, o professor avaliará a situação hipotética em que está diante de uma resolução matemática correta, feita por um aluno. Mas nesse caso, o foco é avaliar a criatividade e a organização dessa, que são essenciais para que haja a comunicação, como foi elencado por Abrantes (1994). Para exemplificar, tem-se a seguinte questão extraída do formulário:

Questão 4 - Se a criatividade for baixa e a organização for ruim, então qual seria o desempenho?

- Insuficiente
- Regular
- Bom
- Excelente

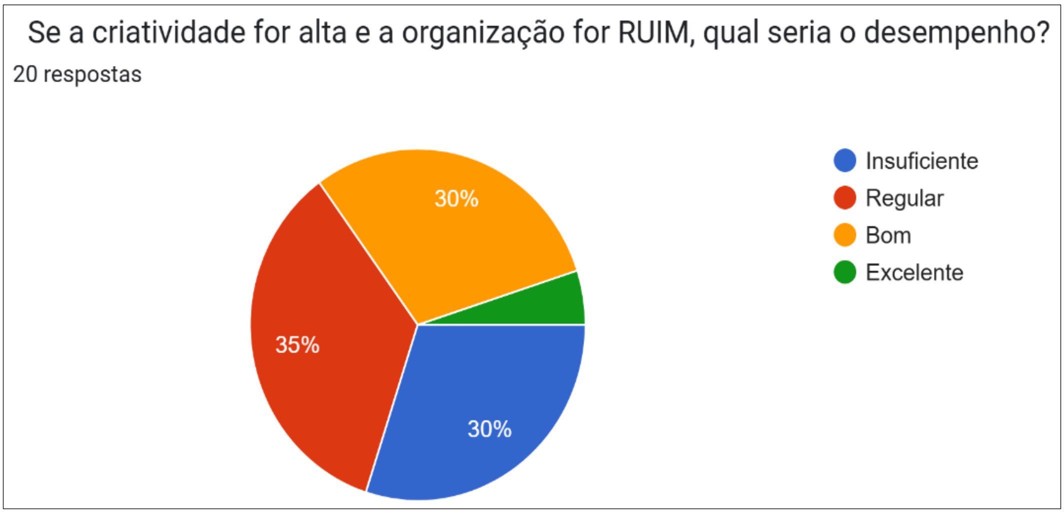
Considerando esses critérios, o professor assinalará, com base em sua experiência, se avaliará como desempenho insuficiente, regular, bom ou excelente. E, assim, elabora-se uma regra para o Sistema Especialista. As demais questões do formulário seguem essa estrutura, abordando todas as combinações possíveis dos termos linguísticos de entrada.

Notou-se que, para algumas combinações, as respostas foram bastante divergentes como, por exemplo, para a questão 12. Assim, ficou evidente que cada professor ponderará um critério em detrimento do outro em determinadas situações, como é possível perceber pelo gráfico 12. Para contornar, analisou-se as respostas de acordo com o tempo de atuação do professor, a fim de que a regra seja definida.

Questão 12 - Se a criatividade for alta e a organização for RUIM, qual seria o desempenho?

- Insuficiente
- Regular
- Bom
- Excelente

Gráfico 12 – Questão 12 do formulário.



Fonte: elaborado pelo autor no formulário Google Forms.

Tendo por base as respostas obtidas através do formulário aplicado, foi possível elaborar as seguintes regras:

1. Se a Criatividade é Baixa e a Organização é Ruim, então o Desempenho é Insuficiente.
2. Se a Criatividade é Baixa e a Organização é Regular, então o Desempenho é Regular.
3. Se a Criatividade é Baixa e a Organização é Boa, então o Desempenho é Regular.
4. Se a Criatividade é Baixa e a Organização é Excelente, então o Desempenho é Bom.
5. Se a Criatividade é Moderada e a Organização é Ruim, então o Desempenho é Insuficiente.
6. Se a Criatividade é Moderada e a Organização é Regular, então o Desempenho é Regular.
7. Se a Criatividade é Moderada e a Organização é Boa, então o Desempenho é Bom.
8. Se a Criatividade é Moderada e a Organização é Excelente, então o Desempenho é Excelente.
9. Se a Criatividade é Alta e a Organização é Ruim, então o Desempenho é Regular.
10. Se a Criatividade é Alta e a Organização é Regular, então o Desempenho é Bom.
11. Se a Criatividade é Alta e a Organização é Boa, então o Desempenho é Excelente.
12. Se a Criatividade é Alta e a Organização é Excelente, então o Desempenho é Excelente.

Na construção da base de regras em linguagem C++ é necessário definir inicialmente o método de intersecção dos termos linguísticos, optando-se pelo produto algébrico, pois em um Sistema Especialista Fuzzy cada regra é ativada com base nos valores de entrada das variáveis criatividade e organização.

Sejam x e y os valores referentes às variáveis Criatividade e Organização, respectivamente, o grau de ativação da regra é dado por:

```
double r1 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoRuim(y));
```

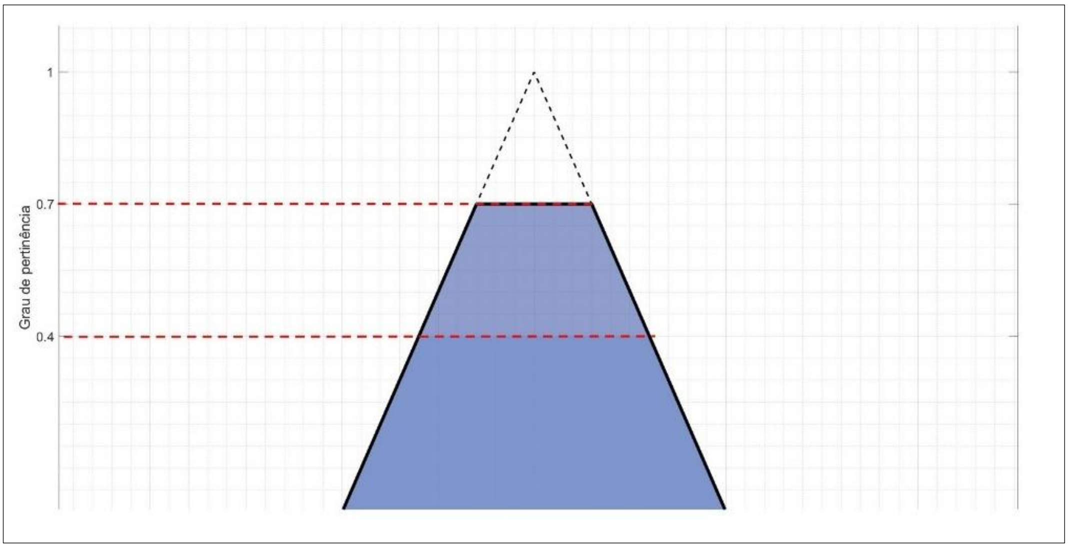
O parâmetro `r1` refere-se à regra 1 que é igual ao produto algébrico entre os valores de pertinência dos termos linguísticos criatividade baixa e organização ruim. Note que não é preciso reescrever a função de pertinência, pois já foi criada a função em C++ desse termo linguístico, bastando apenas invocá-la, fornecendo o valor de entrada. A seguir tem-se o código completo da base de regras do Sistema Especialista Fuzzy.

```
//Base de regras. O método and com o produto algébrico
double r1 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoRuim(y));
double r2 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoRegular(y));
double r3 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoBoa(y));
double r4 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoExcelente(y));
double r5 = (CriatividadeModerada(x) * OrganizacaoRuim(y));
double r6 = (CriatividadeModerada(x) * OrganizacaoRegular(y));
double r7 = (CriatividadeModerada(x) * OrganizacaoBoa(y));
double r8 = (CriatividadeModerada(x)* OrganizacaoExcelente(y));
double r9 = (CriatividadeAlta(x)* OrganizacaoRuim(y));
double r10 = (CriatividadeAlta(x) * OrganizacaoRegular(y));
double r11 = (CriatividadeAlta(x) * OrganizacaoBoa(y));
double r12 = (CriatividadeAlta(x) * OrganizacaoExcelente(y));
```

3.3 – Método de inferência

Na presente pesquisa o método de inferência utilizado é o de Mamdani que se caracteriza pelo uso do operador min no processo de inferência e do operador max na agregação das regras ativadas. Por exemplo, considere que as regras `r1` e `r5` foram ativadas com grau 0,4 e 0,7, respectivamente, com o conjunto fuzzy de saída desempenho insuficiente.

Gráfico 13 - Regiões fuzzy sobrepostas (`r1` e `r5`).



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Pelo operador de inferência min tem-se que as regiões fuzzy dos conjuntos de saída desempenho insuficiente serão trapézios sobrepostos, cujas alturas correspondem ao grau de ativação da regra, como ilustrado no gráfico 13. Em seguida, utiliza-se o método de agregação através do operador max, isto é, toma-se o maior valor entre as regras ativadas para esse conjunto de saída que, nesse caso, é 0,7. Logo, considera-se o trapézio de altura 0,7 como resultado do método de inferência de Mamdani.

Na linguagem C++, o operador min será utilizado na modelagem do método de defuzzificação abordado na seção 3.4. Para a agregação das regras, considera-se aquelas que tem por saída o mesmo termo linguístico, como ilustrado no código seguinte:

```
//agregação com o operador max:
double ativ_insuficiente = std::max(r1, r5);
double ativ_regular = std::max(std::max(r2, r3), std::max(r6,
r9));
double ativ_bom = std::max(std::max(r4 ,r7), r10 );
double ativ_excelente = std::max(std::max(r8, r11), r12);
```

A função ativ_insuficiente refere-se ao grau de ativação do conjunto fuzzy de desempenho insuficiente que é igual ao valor máximo entre as regras r1 e r5. Os demais casos são análogos. A função std::max( ) retorna o maior entre dois valores que estejam nos parênteses. Note que a utilização dessa função repetidamente na mesma linha ocorre devido a mesma não permitir tomar o máximo em mais de dois valores entre os parênteses. Dessa forma, é possível obter os valores dos graus de ativação para cada conjunto fuzzy de saída e, assim, executar a defuzzificação da região fuzzy correspondente.

3.4 – Ajuste do método de defuzificação

No gráfico 13 é possível perceber que a região fuzzy delimitada pelo trapézio não possui um significado numérico para o sistema modelado e, assim, para obter-se um valor representativo são utilizados métodos de defuzzificação. Nesta pesquisa, optou-se por utilizar dois métodos de defuzzificação: Centro de Gravidade (Centróide) e Média dos Máximos (MOM), cuja justificativa dessa escolha será apresentada na seção 4.

Ao implementar-se em C++ o método de defuzzificação Centróide, encontrou-se uma dificuldade, pois em programação o computador armazena os valores aproximados e, na medida em que são realizados os processos de fuzzificação, inferência e defuzzificação, o erro tende a tomar valores significativos. Desse modo, optou-se por definir as equações de defuzzificação para cada termo linguístico em função de uma única variável que é o grau de ativação obtido pelo método de inferência de Mamdani.

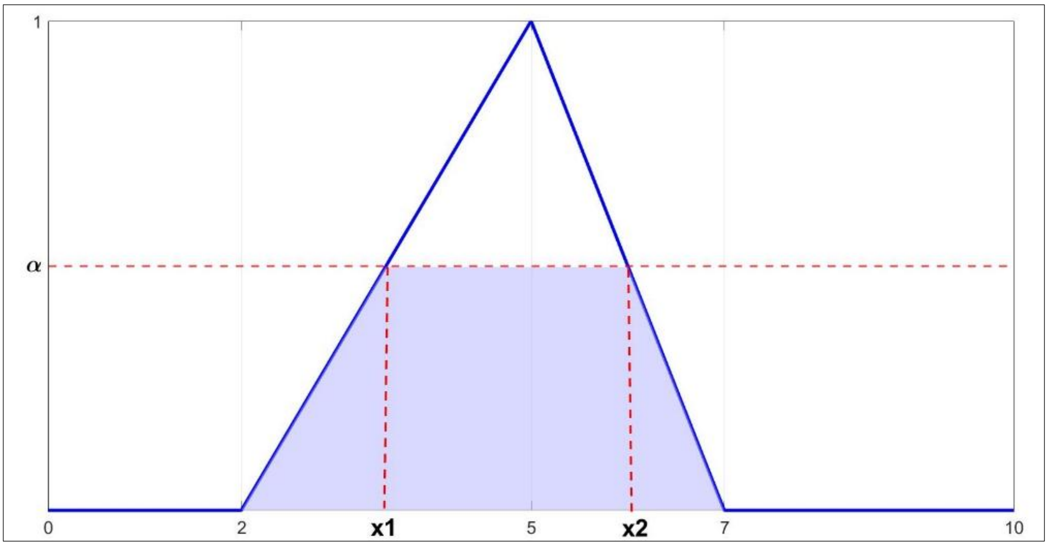
3.4.1 – Método de defuzificação Centróide

A defuzzificação pelo Centróide consiste em determinar a abscissa do centro de gravidade da região resultante do método de inferência fuzzy, cuja equação (30) foi abordada na seção 2.13.2.

Para exemplificar, será determinada a expressão do centróide da região delimitada pelo termo linguístico desempenho regular, representado pelo conjunto fuzzy triangular (2, 5, 7) cuja função de pertinência é dada por (39).

Supondo que essa região seja ativada pelo grau de pertinência α, segue que o conjunto fuzzy triangular é interceptado nos pontos de coordenada (x_1, α) e (x_2, α), formando uma região trapezoidal, como ilustrado pelo gráfico 14.

Gráfico 14 – Conjunto fuzzy triangular (2, 5, 7) ativado com grau α.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

A região trapezoidal forma um novo conjunto fuzzy cuja função de pertinência (42) pode ser obtida a partir de (39), adicionando-se uma sentença para o valor de saída α, quando $x \in]x_1, x_2]$.

$$\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} & se\ x \in [2, x_1]; \\ \alpha & se\ x \in]x_1, x_2[\\ \dfrac{7-x}{2} & se\ x \in \ [x_2, 7]; \\ 0 & outros\ casos. \end{cases} \tag{42}$$

A função de pertinência desse conjunto fuzzy é representada por sentenças, isto é, assume valores conforme as condições estabelecidas no domínio da variável. Disso decorre que para determinar o centróide pela equação (30) faz-se necessário calcular as integrais nos intervalos $[2, x_1], [x_1, x_2] e [x_2, 7]$. Assim, dividindo o processo em duas partes, isto é, determinando o numerador e em seguida o denominador da equação do centróide, tem-se para o numerador:

$$\int_2^7 x \cdot \mu(x)\, dx = \int_2^{x_1} x \cdot \mu(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \mu(x)\, dx + \int_{x_2}^{7} x \cdot \mu(x)\, dx \tag{43}$$

$$= \int_2^{x_1} x \cdot \frac{x-2}{3}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \alpha x\, dx + \int_{x_2}^{7} x \cdot \frac{7-x}{2}\, dx$$

$$= \frac{x_1^3 - 3x_1^2 + 4}{9} + \frac{\alpha(x_2^2 - x_1^2)}{2} + \frac{343 - 21x_2^2 + 2x_2^3}{12}$$

A partir da equação (42) pode-se escrever x_1 e x_2 em função de α:

$$\alpha = \mu_{DR}(x_1) = \frac{x_1 - 2}{3} \Leftrightarrow x_1 = 3\alpha + 2 \tag{44}$$

$$\alpha = \mu_{DR}(x_2) = \frac{7 - x_2}{2} \Leftrightarrow x_2 = 7 - 2\alpha \tag{45}$$

Substituindo (44) e (45) em (43), segue que o numerador do centróide em função do grau de ativação α é:

$$\int_2^7 x \cdot \mu(x)\, dx = \frac{45}{2}\alpha - 10\alpha^2 - \frac{5}{6}\alpha \tag{46}$$

Nos cálculos apresentados acima foram omitidas passagens algébricas por serem bastante extensas. De modo análogo determina-se o denominador do centróide em função de α:

$$\int_2^7 \mu(x)\, dx = 5\alpha - \frac{5}{2}\alpha^2 \tag{47}$$

De posse dos resultados obtidos em (46) e (47), segue que o centróide (C_R) do conjunto fuzzy desempenho regular será dada por:

$$C_R = \frac{\int_2^7 x \cdot \mu(x)\,dx}{\int_2^7 \mu(x)\,dx} = \frac{\frac{45}{2}\alpha - 10\alpha^2 - \frac{5}{6}\alpha^3}{5\alpha - \frac{5}{2}\alpha^2} = \frac{27\alpha - 12\alpha^2 - \alpha^3}{6\alpha - 3\alpha^2} \tag{48}$$

A equação (48) facilita a implementação da função centróide em código C++, como é apresentado a seguir.

```
//Centróide do conjunto fuzzy desempenho regular
double centroide_regular(double a){
     if(a==0){return 0;}
     else{double n;
          double d;
          double z;
          n = (27*a) - (12*(a*a)) - (a*a*a);
          d = (6*a) - (3*(a*a));
          z = n/d;
          return z;}}
```

Note que na estrutura condicional if estabeleceu-se que, caso o grau de ativação a seja nulo, a função retornará o valor 0. Isso ocorre devido algumas regras não serem ativadas, isto é, o mecanismo de inferência atribuir valor 0 ao grau de ativação. Na estrutura do else declarou-se as variáveis reais n, d e z que simbolizam o numerador, denominador e centróide, respectivamente.

O cálculo de defuzzificação pelo método centróide dos demais conjuntos fuzzy são análogos e estão representados abaixo:

i. Centróide (C_I) do conjunto desempenho insuficiente:

$$C_I = \frac{\int_0^4 x \cdot \mu(x)\,dx}{\int_0^4 \mu(x)\,dx} = \frac{\frac{8}{3}\alpha^3 - 8\alpha^2 + 8\alpha}{4\alpha - 2\alpha^2} = \frac{4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 12\alpha}{6\alpha - 3\alpha^2} \tag{49}$$

Código em linguagem C++ correspondente:

```
//Centróide do conjunto fuzzy desempenho insuficiente
     double centroide_insuficiente(double a){
          if(a==0){return 0;}
          else{
          double n, d, z;
          n = (4*(a*a*a)) - (12*(a*a)) + (12*a);
          d = (6*a) - (3*(a*a));
          z = n/d;
          return z;}}
```

ii. Centróide (C_B) do conjunto desempenho bom:

$$C_B = \frac{\int_6^9 x \cdot \mu(x)\,dx}{\int_6^9 \mu(x)\,dx} = \frac{\frac{45\alpha - 21\alpha^2 - \alpha^3}{2}}{3\alpha - \frac{3}{2}\alpha^2} = \frac{45\alpha - 21\alpha^2 - \alpha^3}{6\alpha - 3\alpha^2} \tag{50}$$

Código em linguagem C++ correspondente:

```
//Centróide do conjunto fuzzy desempenho bom
     double centroide_bom(double a){
          if(a==0){return 0;}
          else{
          double n, d, z;
          n = ((45*a) - (21*a*a) - (a*a*a));
          d = ((6*a) - (3*a*a));
          z = n/d;
          return z;}}
```

iii. Centróide (C_E) do conjunto desempenho excelente:

$$C_E = \frac{\int_8^{10} x \cdot \mu(x)\,dx}{\int_8^{10} \mu(x)\,dx} = \frac{18\alpha - 8\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha^3}{2\alpha - \alpha^2} = \frac{54\alpha - 24\alpha^2 - 2\alpha^3}{6\alpha - 3\alpha^2} \tag{51}$$

Código C++ correspondente:

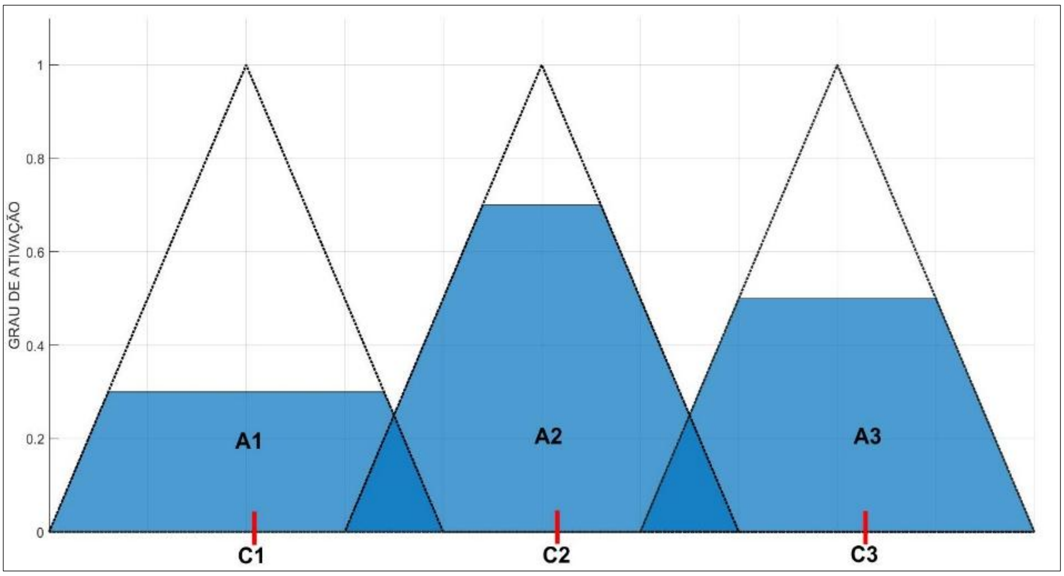
```
//Centróide do conjunto fuzzy desempenho excelente
     double centroide_excelente(double a){
          if(a==0){return 0;}
          else{
          double n, d, z;
          n = ((18*a)-(8*a*a)-((0.666666)*a*a*a));
          d = ((2*a) - (a*a));
          z = n/d;
          return z;}}
```

Em um Sistema Fuzzy pode ocorrer a ativação de várias regras simultaneamente, resultando em um conjunto de regiões para serem defuzzificadas, como mostrado no gráfico 15. Nessa pesquisa optou-se, por motivos de implementação em C++, no uso da média ponderada como forma de inferir o centróide resultante.

Para isso, determina-se o centróide de cada uma das regiões ativadas e as suas respectivas áreas. Sejam A_I, A_R, A_B e A_E as áreas das regiões fuzzy ativadas dos conjuntos de desempenho insuficiente, regular, bom e excelente, respectivamente. E C_I, C_R, C_B e C_E os centróides de cada uma das áreas citadas anteriormente, segue que o centróide resultante é dado pela equação (52).

$$C = \frac{C_I A_I + \ C_R A_R + C_B A_B + C_E A_E}{A_I + A_R + A_B + A_E} \tag{52}$$

Gráfico 15 - Centróides dos conjuntos C_1, C_2 e C_3.



Fonte: Elaborado pelo autor no software Matlab

Na implementação em C++ o código correspondente fica definido em uma nova função chamada de defuz_c. Esta recebe quatro valores de entrada referentes aos possíveis graus de ativação dos conjuntos fuzzy e, a partir disso, retorna o valor do centróide resultante.

```
//Cálculo do centróide resultante
     double defuz_c(double a, double b, double c, double d){
     double  n=((centroide_insuficiente(a)  *  area_insuficiente(a))
     +(centroide_regular(b) * area_regular(b)) + (centroide_bom(c) *
     area_bom(c)) + (centroide_excelente(d) * area_excelente(d)));
     double k = area_insuficiente(a) + area_regular(b) + area_bom(c)
     + area_excelente(d);
          if(k==0){return 0;}
          else{double p = n/k;
          return p;}}
```

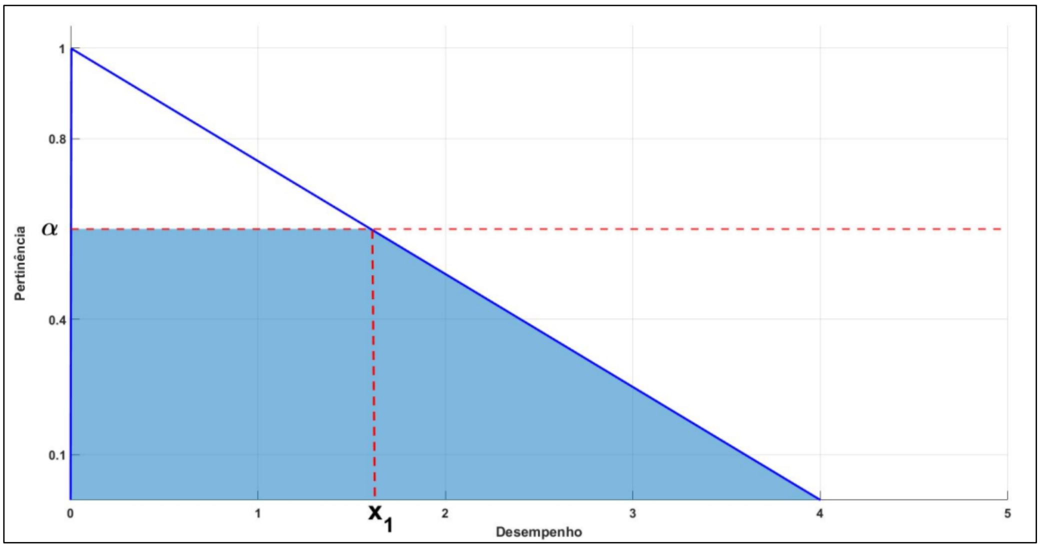
Note que, para garantir que a função retorne algum valor numérico, atribui-se a condição de que se o valor de k (soma das áreas) for nulo, então nenhuma regra foi atingida e, assim, não há como determinar o centróide.

3.4.2 – Método de defuzificação Média dos Máximos (MOM)

Na seção 2.13.1 foi apresentado esse método de defuzzificação, bem como a sua função. Nesta pesquisa ele será utilizado para valores de Criatividade e Organização que estejam contidos no conjunto $A = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 2 \; ou \; 9 \leq x, y \leq 10\}$, cuja justificativa será dada na seção 4.

Como os valores de A atingem apenas as regras em que os conjuntos de saída são desempenho insuficiente e desempenho excelente, segue que é possível proceder de modo análogo ao caso do centróide, isto é, determinar a defuzzificação em função do grau de ativação desses conjuntos. Com efeito, considere o conjunto fuzzy desempenho insuficiente (0, 0, 4) ativado com grau α.

Gráfico 16 - Conjunto fuzzy desempenho insuficiente ativado com grau α.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Note que os valores máximos de pertinência estão compreendidos no intervalo $[0, x_1]$. Desse modo, determinando-se a média dos máximos através dos pontos $(0, \alpha)$ e (x_1, α) é possível obter o resultado defuzzificado. Assim, segue da equação (38) que a abscissa x_1 pode ser escrita em função do grau de ativação:

$$\alpha = \mu_{DI}(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x}{4} & se \; x \in [0, 4] \\ 0 & , outros \; casos \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{4 - x_1}{4} \Leftrightarrow x_1 = 4 - 4\alpha. \tag{53}$$

Pela equação (28), a Média dos Máximos M_I para o conjunto fuzzy desempenho insuficiente será dada por:

$$M_I = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{k} = \frac{0}{2} + \frac{x_1}{2} = 2 - 2\alpha. \quad (54)$$

O código em linguagem C++ correspondente é:

```
//Média dos Máximo - conjunto fuzzy desempenho insuficiente
     double defuz_mom_insuficiente(double a){
     if(a == 0){return 0;}
   else{return (2 - (2*a));}}
```

Analogamente, é possível determinar a função de defuzzificação M_E para o conjunto fuzzy de desempenho excelente em função do grau de ativação.

$$M_E = \alpha + 9 \quad (55)$$

O código em C++ é:

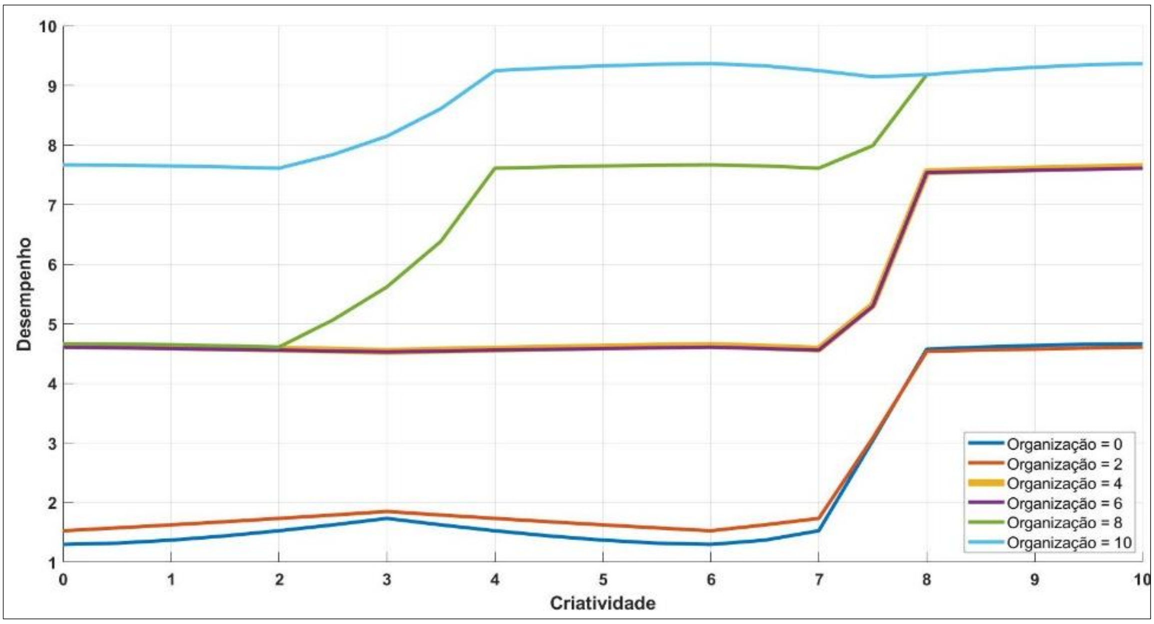
```
//Média dos Máximo - conjunto fuzzy desempenho excelente
     double defuz_mom_excelente(double a){
      if(a == 0){return 0;}
      else{return (a+9);}}
```

4 – RESULTADO E DISCUSSÃO

Através do software Matlab foram realizadas as simulações do Sistema Especialista Fuzzy, evidenciando o comportamento da variável de saída desempenho em função das variáveis de entrada criatividade e organização.

No gráfico 17 tem-se a simulação da variável desempenho em função da criatividade, mantendo-se a variável organização fixa e utilizando-se do método de defuzzificação centróide para todos os valores de entrada.

Gráfico 17 - Desempenho em função da criatividade – centróide.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

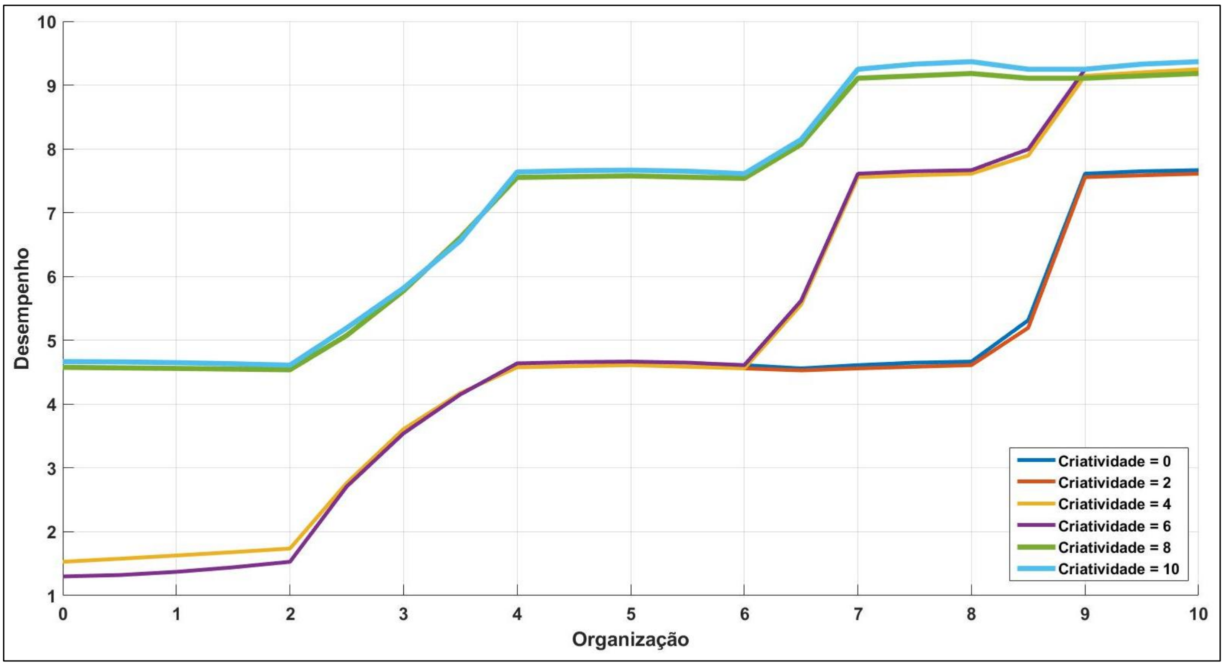
O intervalo de criatividade $[3, 7]$ para valores de organização pertencente a $[0, 2]$ apresenta desempenho decrescente. Isso se justifica devido a haver regras que geram a mesma saída:

Se a criatividade é baixa e a organização é ruim, então o desempenho é insuficiente

Se a criatividade é moderada e a organização é ruim, então o desempenho é insuficiente.

Desse modo, o sistema mantém o desempenho baixo nesse intervalo, mesmo com o aumento da criatividade. Optou-se por não alterar as regras, já que foram obtidas a partir do conhecimento de especialistas. Além disso, quando os valores de entrada são ambos nulos, tem-se que o desempenho é igual a 1,3, o que causa incoerência. E quando se tem entradas com valores máximos, segue que o desempenho alcança o valor máximo 9,33. O mesmo comportamento é observado ao manter a variável criatividade fixa e verificar o desempenho em função da organização.

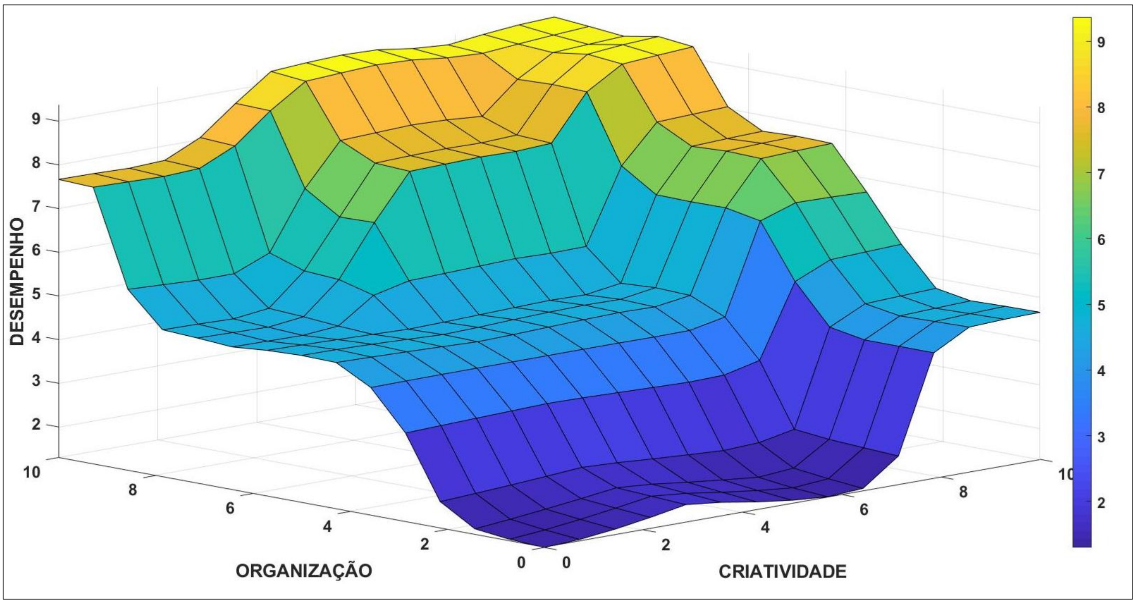
Gráfico 18 - Desempenho em função da organização – Centróide.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Note que para determinados valores de criatividades, os gráficos tendem ao mesmo desempenho em função da organização, isto é, as linhas se sobrepõem. O comportamento resultante do Sistema Especialista Fuzzy é dado pelo gráfico 19.

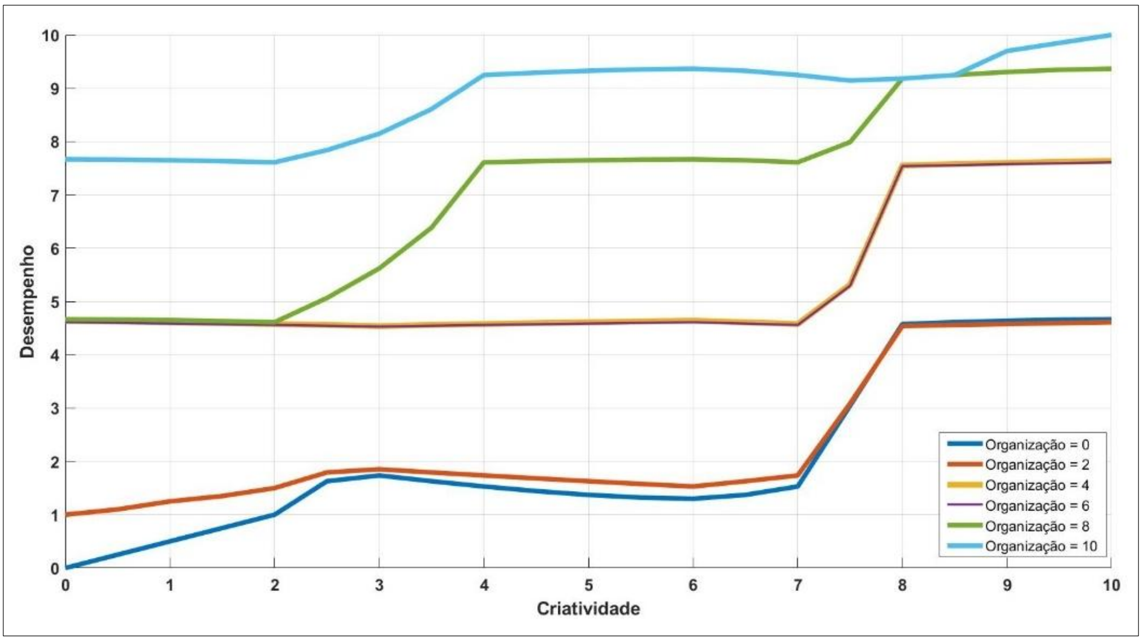
Gráfico 19 - Superfície criatividade × organização – Centróide.



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

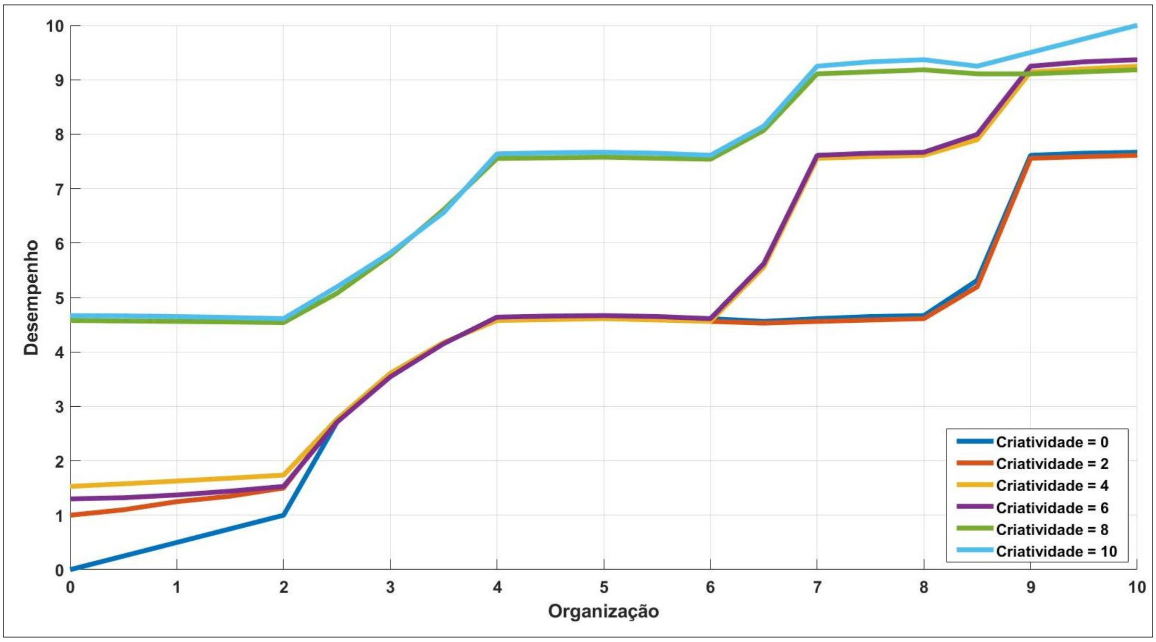
Para contornar as incoerências citadas anteriormente, optou-se por utilizar o método de defuzzificação Média dos Máximos (MOM) para valores de entrada pertencentes ao conjunto $A = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 2e9 \leq x, y \leq 10\}$ e, nos demais casos, o Método Centro de Gravidade (Centróide). Assim, nos gráficos seguintes é possível perceber as alterações.

Gráfico 20 - Desempenho em função da criatividade (Método Centróide + MOM).



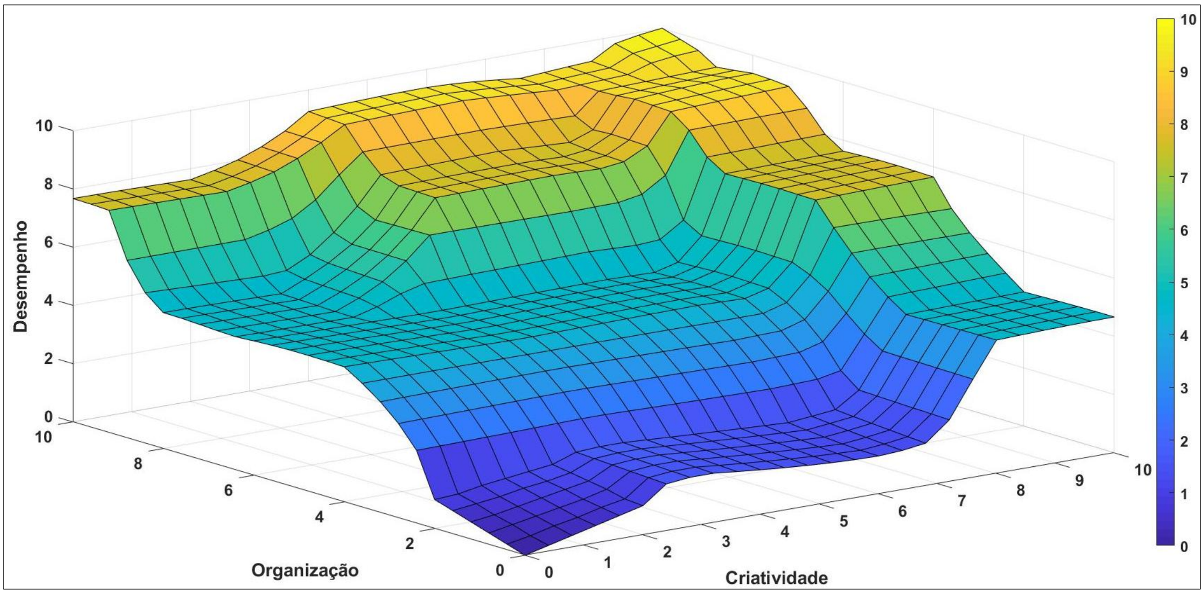
Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

Gráfico 21 - Desempenho em função da organização (Método Centróide + MOM).



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

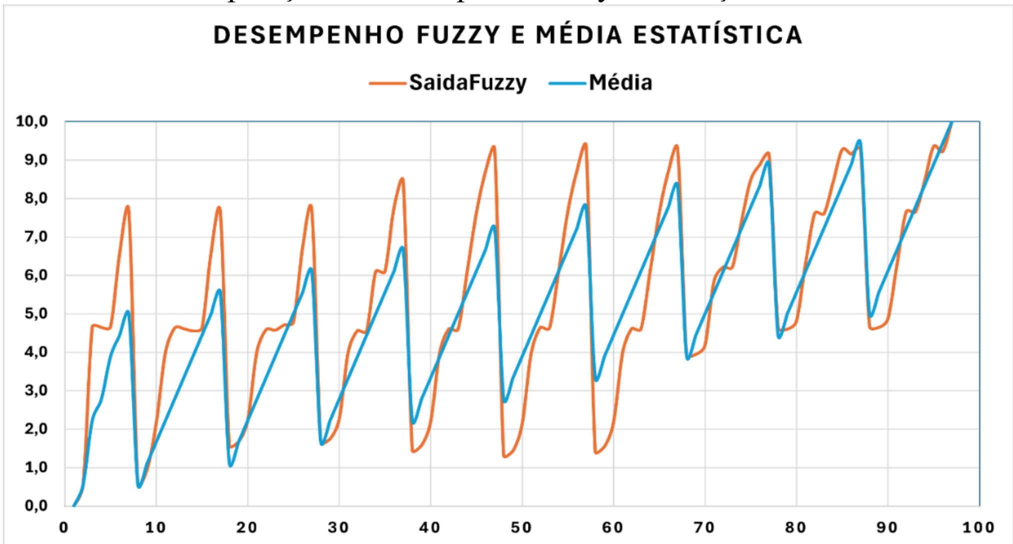
Gráfico 22 - Superfície criatividade × organização (Centróide + MOM).



Fonte: elaborado pelo autor no software Matlab.

A média aritmética é uma ferramenta estatística bastante utilizada no cotidiano escolar por ser uma medida de tendência central, facilitando a atribuição de notas. Na pesquisa de Silva, Yahya e Alao (2019), foram comparados os métodos de inferência de Mamdani, Larsen e Tsukamoto em relação à média aritmética. Através do teste de correlação de Person, foi possível concluir, para o estudo em questão, que o método de Mamdani possui correlação mais forte que os demais com a média. Com base nesse estudo, buscando-se obter uma comparação, para verificar se o Sistema Especialista Fuzzy apresenta comportamento linear, foram simulados valores de entrada em pares. Ao se comparar os resultados de desempenho do Sistema Fuzzy e da Média Aritmética foi possível obter o gráfico 23.

Gráfico 23 - Comparação do desempenho fuzzy em relação à média estatística.

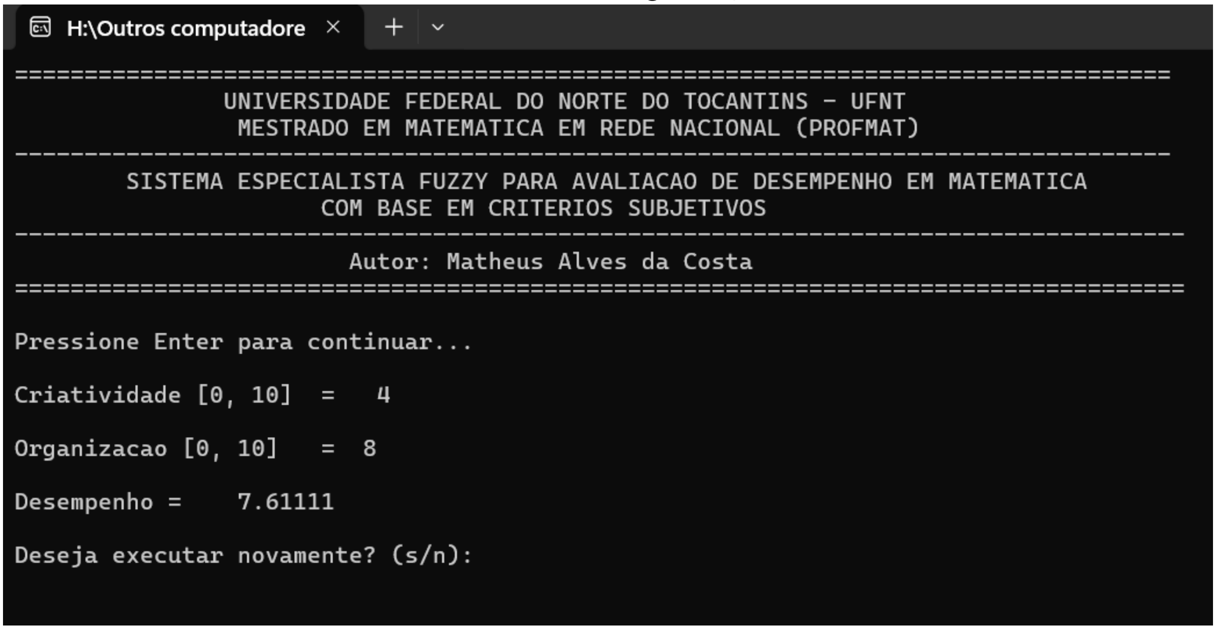


Fonte: elaborado pelo autor no software Excel.

Com o uso do software Excel, foi possível a elaboração do gráfico 23 e do valor de correlação entre a saída fuzzy e a média aritmética. A correlação obtida foi de 0,91 que é considerada forte, indicando um possível comportamento linear. No entanto, a média não considera o peso das regras do sistema, muito menos as incertezas que o sistema fuzzy captura. Desse modo, ao modelar relações não-lineares, o sistema fuzzy destaca-se por dar informações mais significativas. No Apêndice C tem-se a tabela com o conjunto de dados da simulação.

Através da IDE Code::Blocks, foi possível compilar o código fonte do Sistema Especialista Fuzzy programado em C++. Após esse processo, os arquivos necessários para a execução da interface ficam disponíveis na mesma pasta do código fonte. Assim, a pasta contendo o programa Produto Educacional – Sistema Especialista Fuzzy está disponível em: https://github.com/Matheus-Costa1996/sistema-fuzzy-avalia-o-educacional. A interface do programa é executada através do prompt de comando do sistema operacional Windows e está ilustrada na figura 8.

Figura 8 - Execução do sistema no terminal mostrando a inferência fuzzy para os valores de criatividade = 7 e organização = 4.



Fonte: obtido pelo autor através da execução do Sistema Fuzzy no prompt de comando do Windows.

5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo implementar, em linguagem de programação C++, um sistema especialista fuzzy capaz de auxiliar professores de Matemática na avaliação do desempenho na resolução de problemas, tendo por base os critérios subjetivos criatividade e organização. Para alcançar esse objetivo, buscou-se compreender como esses critérios influenciam a variável desempenho, observando-se que a subjetividade presente motivou a escolha da lógica fuzzy como base metodológica do sistema.

No decorrer da pesquisa foram abordados os principais conceitos relativos à Lógica Fuzzy, enfatizando-se o potencial dessa ferramenta no contexto da modelagem matemática. A construção da base de regras através do conhecimento especialista foi fundamental para compreender a variabilidade do julgamento humano. Nesse aspecto, a correlação $0{,}91$ apresentada entre o desempenho através da média aritmética e do Sistema Fuzzy justificou isso, mostrando o comportamento não-linear dos resultados.

A utilização do método de defuzzificação Centro de Massa (centróide) fez com que a variável desempenho apresentasse comportamento incoerente quando tomados valores nos extremos do domínio das variáveis de entrada. Desse modo, ao mesclar com o método de defuzzificação Média dos Máximos (MOM) para os intervalos $[0{,}2]$ e $[9{,}10]$, foi possível corrigir isso. A escolha de se escrever todo o mecanismo de defuzzificação em função do grau de ativação da região fuzzy tornou a implementação em C++ mais simples.

Ao escrever o código fonte com a linguagem de programação C++, foi possível realizar a personalização dos módulos de fuzzificação, módulo de defuzzificação e mecanismo de inferência. E a determinação de funções em detrimento de bibliotecas prontas facilitou o ajuste do modelo, tornando simples a identificação de problemas. O arquivo executável (.exe) gerado através da IDE Code::Blocks foi testado e apresentou resultados coerentes, podendo servir de ferramenta auxiliar na avaliação de desempenho de uma resolução matemática, quando se tem os critérios criatividade e organização.

Para trabalhos futuros, sugere-se o refino da base de regras para evitar as incoerências apresentadas, como é o caso do desempenho decrescente, mesmo quando a variável criatividade apresenta comportamento crescente. Além disso, a adoção de mais variáveis e a validação do modelo através de dados reais de entrada pode tornar o modelo mais significativo. A construção de uma interface gráfica com mais recursos para o arquivo executável também pode colaborar para a implementação do sistema em larga escala.

Portanto, a implementação do Sistema Especialista Fuzzy com linguagem de programação C++ pode contribuir como ferramenta auxiliar no processo avaliativo em Matemática, quando busca-se ponderar a capacidade de comunicação, em uma resolução de problemas, através da criatividade e organização.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, Paulo. **Avaliação e Educação Matemática**. São Paulo: Papirus, 1994.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 1. ed. Curitiba: UFPR, 2007.

BANDO, Fernando M. **Sistemas fuzzy e aproximação universal**. 2002. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, São Paulo, 2002. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/228437. Acesso em 12 jan. 2025.

BARROS, Antônio Delon Carvalho. **A lógica Fuzzy à luz da linguagem Python como contributo para auxiliar no diagnóstico escolar**. 2024. 89 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina, 2024. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7602&id2=171057968. Acesso em: 20 out. 2024.

BASSANEZI, Rodney; BARROS, Laécio. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.** Campinas, São Paulo: UNICAMP/IMECC, 2006.

CHIARA, Maria Luisa; GIUNTINI, Roberto. **Quantum Logic**. arXiv, v. 2, 6 jan. 2001. Disponível em: arXiv:quant-ph/0101028v2. Acesso em: 24 jun. 2025.

HAACK, Susan. **Filosofia das Lógicas**. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

LEE, Kwang Hyung. **First Course on Fuzzy Theory and Applications**. 1. ed. Berlin; New York: Springer-Verlag, 2005. ISBN 978-3-540-22988-9.

LUDERMIR, Teresa Bernarda. Inteligência Artificial e Aprendizado de Máquina: estado atual e tendências. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 35, n. 101, p. 85–94, jan./abr. 2021. DOI: 10.1590/S0103-4014.2021.35101.007. Acesso em 20 jan. 2025.

MACIEL, Lucas S. **Simulação p-fuzzy do modelo Malthusiano**. 17 fls. Artigo (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2011.

NARCIZO, Vinícius Folle. **Um sistema baseado em regras fuzzy para uma avaliação conceitual**. 2019. 46p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Orientadora: Prof.ª Dra. Maristela Missio. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5140&id2=170340044. Acesso em 14 mar. 2025.

RIBACIONKA, Francisco. **Sistemas Computacionais baseados em Lógica Fuzzy**. 1999. 115f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica- Área de Concentração: Engenharia da Computação) – Universidade Mackenzie, São Paulo, 1999. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~tonelli/verao-fuzzy/laecio/logica_fuzzy.pdf. Acesso em: 20 mar. 2025.

ROSS, Timothy J. **Fuzzy Logic with Engineering Applications**. 3. ed. Chichester, West Sussex, Inglaterra: John Wiley & Sons Ltd., 2010.

SILVA, D. R.; YAHYA, A.; ALAO, O. O. Comparative analysis of Mamdani, Larsen and Tsukamoto methods of fuzzy inference system for students' academic performance evaluation. **International Journal of Scientific & Engineering Research**, v. 10, n. 6, p. 1093–1097, 2019.

WIERMAN, Mark. **An Introduction to the Mathematics of Uncertainty**. Omaha, Nebraska: Creighton University, 2010.

ZADEH, Lotfi A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965.

APÊNDICE A – CÓDIGO-FONTE DO SISTEMA ESPECIALISTA EM C++

```
#include<iostream>
#include <algorithm>
#include <chrono>
#include <thread>  // Para usar sleep
using namespace std;

//função de pertinência do termo linguístico Criatividade Baixa
double CriatividadeBaixa(double a){
    if(0<=a and a<4){return (4-a)/4;}
    else{return 0;}}

//função de pertinência do termo linguístico Criatividade Moderada
double CriatividadeModerada(double a){
    if(2<=a and a<=6){return (a-2)/4;}
    else if(6<a and a<=8){return (8-a)/2;}
    else{return 0;}}

//função de pertinência do termo linguístico Criatividade Alta
double CriatividadeAlta(double a){
    if(7<=a and a<=10){return (a-7)/3;}
    else{return 0;}}

//função de pertinência do termo linguístico Organização Ruim
double OrganizacaoRuim(double b){
    if(0<=b and b<4){return (4-b)/4;}
    else{return 0;}}

//função de pertinência do termo linguístico Organização Regular
double OrganizacaoRegular(double b){
    if(2<=b and b<=5){return (b-2)/3;}
    else if(5<b and b<=7){return (7-b)/2;}
    else{return 0;}}

//Função de pertinência do termo linguístico Organização Boa
double OrganizacaoBoa(double b){
    if(6<=b and b<=8){return (b-6)/2;}
    else if(8<b and b<=9){return (9-b);}
    else{return 0;}}

//função de pertinência do termo linguístico Organização Excelente
double OrganizacaoExcelente(double b){
    if(8<=b and b<=10){return (b-8)/2;}
    else{return 0;}}

//Centróide do conjunto fuzzy desempenho insuficiente
double centroide_insuficiente(double a){
if(a==0){return 0;}
else{
double n, d, z;
n = (4*(a*a*a)) - (12*(a*a)) + (12*a);
d = (6*a) - (3*(a*a));
z = n/d;
return z;}}

//Centróide do conjunto fuzzy desempenho regular
double centroide_regular(double a){
if(a==0){return 0;}
else{double n;
```

```
double d;
double z;
n = (27*a) - (12*(a*a)) - (a*a*a);
d = (6*a) - (3*(a*a));
z = n/d;
return z;}
}

//Centróide do conjunto fuzzy desempenho bom
double centroide_bom(double a){
if(a==0){return 0;}
else{
double n, d, z;
n = ((45*a) - (21*a*a) - (a*a*a));
d = ((6*a) - (3*a*a));
z = n/d;
return z;}}

//Centróide do conjunto fuzzy desempenho excelente
double centroide_excelente(double a){
if(a==0){return 0;}
else{
double n, d, z;
n = ((18*a)-(8*a*a)-((0.666666)*a*a*a));
d = ((2*a) - (a*a));
z = n/d;
return z;}}

//Área da região fuzzy ativada para o conjunto fuzzy Desempenho Insuficiente
double area_insuficiente(double b){
return ((4*b) - (2*b*b));}

//Área da região fuzzy ativada para o conjunto fuzzy Desempenho Regular
double area_regular(double a){
return (5*a) - (2.5 * a * a);}

//Área da região fuzzy ativada para o conjunto fuzzy Desempenho Bom
double area_bom(double a){
return ((6*a) - (3*a*a))/2;}

//Área da região fuzzy ativada para o conjunto fuzzy Desempenho Excelente
double area_excelente(double a){
return ((2*a) - (a*a));}

//Cálculo do centróide resultante
double defuz_c(double a, double b, double c, double d){
double n = ((centroide_insuficiente(a) * area_insuficiente(a)) +
(centroide_regular(b) * area_regular(b)) + (centroide_bom(c) * area_bom(c))
+ (centroide_excelente(d) * area_excelente(d)));
double k = area_insuficiente(a) + area_regular(b) + area_bom(c) +
area_excelente(d);
    if(k ==0){return 0;}
    else{double p = n/k;
    return p;}}

//Média dos Máximos - conjunto fuzzy Desempenho Insuficiente
double defuz_mom_insuficiente(double a){
 if(a == 0){return 0;}
 else{return (2 - (2*a));}}

//Média dos Máximos - conjunto fuzzy desempenho Excelente
```

```
double defuz_mom_excelente(double a){
 if(a == 0){return 0;}
 else{return (a+9);}}

// Função para criar um pequeno delay (em milissegundos)
void delay(int ms) {
    this_thread::sleep_for(chrono::milliseconds(ms));
}

// Função para criar a apresentação
void mostrarApresentacao() {
    system("cls"); // Limpa a tela (Windows).

    cout <<
"============================================================================
=========\n";
    delay(500);
    cout << "                 UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS -
UFNT\n";
    delay(600);
    cout << "                     MESTRADO EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)\n";
    delay(600);
    cout << "-------------------------------------------------------------------
---------------------\n";
    delay(600);
    cout << "        SISTEMA ESPECIALISTA FUZZY PARA AVALIACAO DE DESEMPENHO
EM MATEMATICA\n";
    delay(600);
    cout << "                      COM BASE EM CRITERIOS SUBJETIVOS\n";
    delay(600);
    cout << "-------------------------------------------------------------------
----------------------\n";
    delay(600);
    cout << "                        Autor: Matheus Alves da Costa\n";
    cout                                                                    <<
"============================================================================
==========\n\n";
    delay(600);
    cout << "Pressione Enter para continuar...";
    cin.ignore(); // Espera Enter
    cin.get();
}


//Função principal
int main(){

mostrarApresentacao(); // Exibe a apresentação

char opcao;
    do {
    double x; // alocar uma posição de memória para o valor de x que é a nota
da criatividade
    cout<<"Criatividade [0, 10]  =   ";
    cin>>x;
    cout<<endl;
    double y;// alocar uma posição de memória para o valor de y que é a nota
da organização
    cout<<"Organizacao [0, 10]   =  ";
    cin>>y;
```

```
    cout<<endl;

    if(0<=x && x<=10 && 0<=y && y<=10){

//Base de regras. O método and com o produto algébrico

double r1 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoRuim(y));

double r2 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoRegular(y));

double r3 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoBoa(y));

double r4 = (CriatividadeBaixa(x) * OrganizacaoExcelente(y));

double r5 = (CriatividadeModerada(x) * OrganizacaoRuim(y));

double r6 = (CriatividadeModerada(x) * OrganizacaoRegular(y));

double r7 = (CriatividadeModerada(x) * OrganizacaoBoa(y));

double r8 = (CriatividadeModerada(x)* OrganizacaoExcelente(y));

double r9 = (CriatividadeAlta(x)* OrganizacaoRuim(y));

double r10 = (CriatividadeAlta(x) * OrganizacaoRegular(y));

double r11 = (CriatividadeAlta(x) * OrganizacaoBoa(y));

double r12 = (CriatividadeAlta(x) * OrganizacaoExcelente(y));

//agregação com o operador max:

double ativ_insuficiente = std::max(r1, r5);

double ativ_regular = std::max(std::max(r2, r3), std::max(r6, r9));

double ativ_bom = std::max(std::max(r4 ,r7), r10 );

double ativ_excelente = std::max(std::max(r8, r11), r12);

        if(0<=x && x<=2 && 0<=y && y<=2){
        cout<<"Desempenho =    "<< defuz_mom_insuficiente(ativ_insuficiente)
<<endl;}

        else if(9<=x && x<=10 && 9<=y && y<=10){
        cout<<"Desempenho        =                              "<<
defuz_mom_excelente(ativ_excelente)<<endl;}

        else{cout<<"Desempenho   =             "<<defuz_c(ativ_insuficiente,
ativ_regular, ativ_bom, ativ_excelente)<<endl;}
                                        }

    else{cout<<"Digite valores entre 0 e 10" <<endl;}

cout<<endl;
// Pergunta se o usuário quer repetir o código:
cout << "Deseja executar novamente? (s/n): "<<endl;
cin >> opcao;

} while (opcao == 's' || opcao == 'S');
```

```
    cout << "\nPrograma encerrado. Obrigado por utilizar!" << endl;

    return 0;
}
```

APÊNDICE B – FORMULÁRIO DE PESQUISA PARA A BASE DE REGRAS – GOOGLE FORMS

CRITÉRIOS SUBJETIVOS NA AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO EM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM BASEADA EM LÓGICA FUZZY

Este questionário faz parte da pesquisa da dissertação intitulada "Critérios subjetivos na avaliação de desempenho em matemática: uma abordagem baseada em lógica fuzzy". Seu objetivo é entender como os professores de matemática ponderam os critérios subjetivos de **criatividade** e **organização** nas avaliações. Informações de identificação são solicitadas apenas para controle do pesquisador, garantindo o anonimato dos participantes.

1- E-mail.
____

2- Há quanto tempo você atua no ensino de matemática?
   - Menos de 1 ano
   - 1-3 anos
   - 4-6 anos
   - 7-10 anos
   - Mais de 10 anos

3- Qual a sua principal etapa de atuação?
   - Educação básica: ensino fundamental maior
   - Educação básica: ensino médio
   - Ensino superior

Instrução: o objetivo das próximas perguntas é entender como a combinação de dois fatores, criatividade e organização, pode afetar o desempenho em uma avaliação de matemática. A criatividade se refere à capacidade de pensar de forma original e inovadora ao resolver problemas, enquanto a organização está relacionada à clareza e estrutura na apresentação das soluções.

Em cada pergunta, você verá uma combinação de diferentes níveis de criatividade e organização. Sua função é indicar qual seria o desempenho esperado (insuficiente, regular, bom ou excelente) para essa combinação, de acordo com sua experiência. Considere que as respostas das avaliações estão todas corretas. As perguntas estão divididas em três seções, começando com combinações em que a criatividade é baixa e avançando até as combinações em que a criatividade é alta.

Seção 1: quando a Criatividade é Baixa

Nesta seção, vamos explorar cenários em que a criatividade é baixa. Como você imagina que o desempenho varia de acordo com os diferentes níveis de organização?

4- Se a criatividade for baixa e a organização for RUIM, qual seria o desempenho?
   - Insuficiente
   - Regular
   - Bom
   - Excelente

5- Se a criatividade for baixa e a organização for REGULAR, qual seria o desempenho?
   - Insuficiente
   - Regular
   - Bom
   - Excelente

6- Se a criatividade for baixa e a organização for BOA, qual seria o desempenho?
   - Insuficiente
   - Regular
   - Bom
   - Excelente

7- Se a criatividade for baixa e a organização for EXCELENTE, qual seria o desempenho?
   - Insuficiente
   - Regular
   - Bom
   - Excelente

Seção 2: quando a Criatividade é Moderada

Agora, vamos analisar cenários em que a criatividade é moderada. Quais são os impactos dessa combinação com diferentes níveis de organização?

8- Se a criatividade for moderada e a organização for RUIM, qual seria o desempenho?
    - Insuficiente
    - Regular
    - Bom
    - Excelente
9- Se a criatividade for moderada e a organização for REGULAR qual seria o desempenho?
    - Insuficiente
    - Regular
    - Bom
    - Excelente
10- Se a criatividade for moderada e a organização for BOA, qual seria o desempenho?
    - Insuficiente
    - Regular
    - Bom
    - Excelente
11- Se a criatividade for moderada e a organização for EXCELENTE, qual seria o desempenho?
    - Insuficiente
    - Regular
    - Bom
    - Excelente

Seção 3: quando a Criatividade é Alta

Finalmente, vamos analisar cenários em que a criatividade é alta. Como você acredita que o desempenho é impactado pela organização nessas situações?

12- Se a criatividade for alta e a organização for RUIM, qual seria o desempenho?
    - Insuficiente
    - Regular
    - Bom
    - Excelente

13- Se a criatividade for alta e a organização for REGULAR, qual seria o desempenho?

- Insuficiente
- Regular
- Bom
- Excelente

14- Se a criatividade for alta e a organização for BOA, qual seria o desempenho?

- Insuficiente
- Regular
- Bom
- Excelente

15- Se a criatividade for alta e a organização for EXCELENTE, qual seria o desempenho?

- Insuficiente
- Regular
- Bom
- Excelente

APÊNDICE C – DADOS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO DO DESEMPENHO FUZZY EM RELAÇÃO À MÉDIA ESTATÍSTICA

Criatividade	Organização	Fuzzy	Média	Criatividade	Organização	Fuzzy	Média	Criatividade	Organização	Fuzzy	Média
0,0	0,0	0,0	0,0	3,3	10,0	8,4	6,7	7,8	6,7	7,4	7,2
0,0	1,1	0,6	0,6	4,4	0,0	1,5	2,2	7,8	7,8	8,5	7,8
0,0	4,4	4,7	2,2	4,4	1,1	1,6	2,8	7,8	8,9	8,9	8,3
0,0	5,6	4,6	2,8	4,4	2,2	2,2	3,3	7,8	10,0	9,1	8,9
0,0	7,8	4,7	3,9	4,4	3,3	4,0	3,9	8,9	0,0	4,6	4,4
0,0	8,9	6,6	4,4	4,4	4,4	4,6	4,4	8,9	1,1	4,6	5,0
0,0	10,0	7,7	5,0	4,4	5,6	4,6	5,0	8,9	2,2	4,8	5,6
1,1	0,0	0,6	0,6	4,4	6,7	6,1	5,6	8,9	3,3	6,3	6,1
1,1	1,1	1,0	1,1	4,4	7,8	7,6	6,1	8,9	4,4	7,6	6,7
1,1	2,2	2,2	1,7	4,4	8,9	8,7	6,7	8,9	5,6	7,6	7,2
1,1	3,3	4,0	2,2	4,4	10,0	9,3	7,2	8,9	6,7	8,4	7,8
1,1	4,4	4,6	2,8	5,6	0,0	1,3	2,8	8,9	7,8	9,3	8,3
1,1	5,6	4,6	3,3	5,6	1,1	1,4	3,3	8,9	8,9	9,2	8,9
1,1	6,7	4,6	3,9	5,6	2,2	2,1	3,9	8,9	10,0	9,3	9,4
1,1	7,8	4,6	4,4	5,6	3,3	4,0	4,4	10,0	0,0	4,7	5,0
1,1	8,9	6,6	5,0	5,6	4,4	4,6	5,0	10,0	1,1	4,6	5,6
1,1	10,0	7,6	5,6	5,6	5,6	4,6	5,6	10,0	2,2	4,9	6,1
2,2	0,0	1,6	1,1	5,6	6,7	6,1	6,1	10,0	3,3	6,3	6,7
2,2	1,1	1,7	1,7	5,6	7,8	7,7	6,7	10,0	4,4	7,7	7,2
2,2	2,2	2,2	2,2	5,6	8,9	8,7	7,2	10,0	5,6	7,6	7,8
2,2	3,3	4,0	2,8	5,6	10,0	9,4	7,8	10,0	6,7	8,4	8,3
2,2	4,4	4,6	3,3	6,7	0,0	1,4	3,3	10,0	7,8	9,4	8,9
2,2	5,6	4,6	3,9	6,7	1,1	1,5	3,9	10,0	8,9	9,2	9,4
2,2	6,7	4,7	4,4	6,7	2,2	2,2	4,4	10,0	10,0	10,0	10,0
2,2	7,8	4,8	5,0	6,7	3,3	4,0	5,0				
2,2	8,9	6,7	5,6	6,7	4,4	4,6	5,6				
2,2	10,0	7,7	6,1	6,7	5,6	4,6	6,1				
3,3	0,0	1,7	1,7	6,7	6,7	6,1	6,7				
3,3	1,1	1,7	2,2	6,7	7,8	7,6	7,2				
3,3	2,2	2,3	2,8	6,7	8,9	8,7	7,8				
3,3	3,3	4,0	3,3	6,7	10,0	9,3	8,3				
3,3	4,4	4,6	3,9	7,8	0,0	3,9	3,9				
3,3	5,6	4,6	4,4	7,8	1,1	3,9	4,4				
3,3	6,7	6,1	5,0	7,8	2,2	4,2	5,0				
3,3	7,8	6,1	5,6	7,8	3,3	5,9	5,6				
3,3	8,9	7,8	6,1	7,8	4,4	6,2	6,1				