UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS EDUARDO OLIVEIRA SILVA SANTOS

Teoria dos Jogos e Educação Matemática: Um Estudo com Estratégia Minimax e Modelo de Duopólio de Cournot

ARAGUAÍNA-TO
2025

CARLOS EDUARDO OLIVEIRA SILVA SANTOS

Teoria dos Jogos e Educação Matemática: Um Estudo com Estratégia Minimax e Modelo de Duopólio de Cournot

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Norte do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

ARAGUAÍNA-TO
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237t SANTOS, CARLOS.

Teoria dos Jogos e Educação Matemática: Um Estudo com Estratégia Minimax e Modelo de Duopólio de Cournot / CARLOS SANTOS. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.

75 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: Alvaro Julio Yucra Hancco.

1. Teoria dos Jogos. 2. Ensino de Matemática. 3. Modelo de Cournot.

CDD 510

Carlos Eduardo Oliveira Silva Santos

Teoria dos Jogos e Educação Matemática: Um Estudo com Estratégia Minimax e Modelo de Duopólio de Cournot

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Norte do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em: 21/08/2025

BANCA EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
ALVARO JULIO YUCRA HANCCO
Data: 01/09/2025 15:32:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco (UFNT)
Orientador

Documento assinado digitalmente
CALEB DA SILVA ARAUJO CAMPELO
Data: 01/09/2025 15:17:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Caleb da Silva Araujo Campelo (UEMASUL)
Examinador externo

Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 01/09/2025 12:02:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (UFNT)
Examinador interno

ARAGUAÍNA-TO
2025

Dedico este trabalho à minha mãe, que sempre foi tudo em minha vida. Pelo amor incondicional, pelo exemplo de força, pela presença constante, e por cada gesto de cuidado e incentivo. Tudo o que conquistei até aqui carrega sua marca e é, antes de tudo, uma forma de retribuir tudo o que você sempre fez por mim. Essa vitória também é sua.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha mãe, que sempre foi meu maior suporte e inspiração. Sua força, dedicação e amor incondicional foram e continuam sendo o alicerce da minha vida. Cada passo dado nesta trajetória foi sustentado pelo seu exemplo e coragem, e cada conquista minha carrega, inevitavelmente, a marca do seu amor.

Ao meu orientador, Professor Doutor Alvaro Julio Yucra Hancco, registro minha mais sincera gratidão pela orientação firme e generosa, pelo conhecimento compartilhado com paciência e profundidade, e por acreditar no potencial deste trabalho mesmo nos momentos em que a insegurança me visitava. Sua condução criteriosa e sua postura ética foram fundamentais para a construção deste estudo e para minha formação acadêmica.

Aos meus amigos, que estiveram presentes mesmo nos momentos mais desafiadores, oferecendo palavras de incentivo, escuta atenta e alegria genuína, meu reconhecimento. A presença de vocês foi essencial para que eu nunca perdesse a motivação e o equilíbrio ao longo dessa jornada.

Aos colegas do mestrado, minha sincera gratidão pela convivência enriquecedora, pelas trocas de ideias e pelo companheirismo em todas as etapas deste percurso. Aprendi muito com cada um de vocês, e levo comigo não apenas o aprendizado, mas também as amizades que construí.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado.

Se enxerguei mais longe, foi por estar apoiado sobre ombros de gigantes.

Isaac Newton

Resumo

Esta dissertação propõe uma abordagem didática para o ensino de Matemática no Ensino Médio a partir da Teoria dos Jogos, com foco no modelo de duopólio de Cournot e na estratégia Minimax. A motivação do trabalho surgiu da necessidade de tornar o ensino matemático mais contextualizado, significativo e conectado às situações reais de tomada de decisão. O objetivo principal é integrar conteúdos como funções quadráticas, sistemas lineares, tabelas e gráficos à modelagem de cenários econômicos simulados, sem o uso de derivadas, tornando a proposta acessível ao público escolar.

A metodologia adotada envolve o estudo teórico dos modelos matemáticos, o desenvolvimento de exemplos numéricos resolvidos por meio de ferramentas algébricas, e a elaboração de uma sequência didática alinhada às competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A proposta foi estruturada em etapas que incluem a exploração de gráficos de lucro, construção de curvas de reação, análise de pontos de equilíbrio e aplicação da estratégia minimax em ambientes competitivos.

Como resultado, apresenta-se uma proposta de ensino que articula teoria e prática, favorecendo o raciocínio lógico, a argumentação e o pensamento estratégico. Conclui-se que a Teoria dos Jogos, quando adaptada ao nível de abstração dos estudantes e explorada com recursos acessíveis, pode se tornar uma poderosa ferramenta pedagógica para o ensino da Matemática, promovendo interdisciplinaridade, protagonismo estudantil e competências para a vida.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Ensino de Matemática. Modelo de Cournot. Estratégia Minimax. BNCC.

Abstract

This dissertation proposes a didactic approach to teaching Mathematics in high school based on Game Theory, focusing on the Cournot duopoly model and the Minimax strategy. The motivation for this work arose from the need to make mathematical education more contextualized, meaningful, and connected to real decision-making situations. The main objective is to integrate content such as quadratic functions, linear systems, tables, and graphs into the modeling of simulated economic scenarios without the use of derivatives, making the proposal accessible to the school audience.

The adopted methodology involves the theoretical study of mathematical models, the development of numerical examples solved through algebraic tools, and the elaboration of a teaching sequence aligned with the competencies of the National Common Curricular Base (BNCC). The proposal is structured in stages that include exploring profit graphs, constructing reaction curves, analyzing equilibrium points, and applying the minimax strategy in competitive environments.

As a result, a teaching proposal that articulates theory and practice is presented, favoring logical reasoning, argumentation, and strategic thinking. It is concluded that Game Theory, when adapted to the abstraction level of students and explored with accessible resources, can become a powerful pedagogical tool for teaching Mathematics, promoting interdisciplinarity, student protagonism, and life skills.

Keywords: Game Theory. Mathematics Education. Cournot Model. Minimax Strategy. BNCC.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A Matemática, enquanto linguagem formal e instrumento de modelagem da realidade, possui papel fundamental na formação do pensamento crítico e na capacidade de tomada de decisão dos estudantes. No entanto, muitas vezes, o ensino da matemática se resume à repetição mecânica de procedimentos, desconectado de contextos reais e pouco estimulante para os alunos. Diante disso, esta dissertação propõe uma abordagem alternativa que integra conceitos da Teoria dos Jogos ao ensino de Matemática no Ensino Médio, com o objetivo de tornar a aprendizagem mais significativa, contextualizada e alinhada às competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

A Teoria dos Jogos é um ramo da Matemática Aplicada que estuda situações de decisão estratégica envolvendo múltiplos agentes. Inicialmente desenvolvida por John von Neumann e Oskar Morgenstern, e posteriormente ampliada por John Nash, a teoria tem sido amplamente utilizada em áreas como Economia, Ciências Sociais, Biologia e Computação. Sua aplicação no contexto educacional, no entanto, ainda é incipiente, apesar do seu potencial didático para desenvolver competências como raciocínio lógico, argumentação, resolução de problemas e análise crítica de cenários.

Neste trabalho, propõe-se a utilização do modelo de duopólio de Cournot, um dos clássicos da Teoria dos Jogos, como recurso didático para abordar conteúdos matemáticos presentes na BNCC (Brasil, 2018), como funções do segundo grau, sistemas lineares, interpretação de gráficos e tabelas. Adicionalmente, será explorada a estratégia Minimax, associada à ideia de segurança racional em ambientes competitivos. A originalidade da proposta reside na possibilidade de apresentar tais modelos sem recorrer ao uso de derivadas, por meio da análise de vértices de funções quadráticas e da construção de simulações numéricas acessíveis ao público do Ensino Médio.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

No **Capítulo 2** – *Introdução à Teoria dos Jogos*, apresenta-se uma contextualização teórica da área, abordando seus fundamentos históricos, principais tipos de jogos, elementos centrais como jogadores, estratégias, pagamentos e informação disponível, além de exemplos introdutórios com jogos simples.

O **Capítulo 3** – *Estratégia Minimax: Fundamentos Matemáticos e Aplicações*, introduz a estratégia minimax (também referida como maximin, no ponto de vista do jogador mais conservador), destacando seu fundamento lógico-matemático, aplicações em jogos clássicos de soma zero e a análise de decisões em ambientes adversos.

O **Capítulo 4** – *O Modelo de Duopólio de Cournot*, apresenta os conceitos econômicos e matemáticos relacionados à concorrência entre duas empresas. São discutidas a função de demanda inversa, as curvas de reação das firmas, e a obtenção do ponto de equilíbrio de Nash a partir de funções quadráticas.

No **Capítulo 5** – *Integração entre a Estratégia Maximin e o Modelo de Duopólio de Cournot*, é proposta uma simulação integrada entre os modelos apresentados, com exemplos numéricos que exploram decisões estratégicas sob diferentes pressupostos: racionalidade mútua (Cournot) e postura defensiva (Maximin).

O **Capítulo 6** – *Aplicação Didática: Sequência de Ensino e Análise de Recurso*, apresenta a proposta pedagógica construída com base nos modelos matemáticos estudados, incluindo a estruturação de aulas, recursos utilizados, alinhamento com a BNCC e sugestões de aplicação no Ensino Médio.

Por fim, o **Capítulo 7** – *Resultados e Discussões*, analisa os dados obtidos a partir da aplicação da proposta, com destaque para os resultados matemáticos e estratégicos da simulação, as aprendizagens observadas no contexto escolar e uma discussão crítica sobre as potencialidades e limitações do recurso didático desenvolvido.

Ao propor a integração entre modelagem matemática, decisões estratégicas e contexto econômico, esta dissertação visa contribuir para um ensino de Matemática mais conectado com a realidade dos estudantes, promovendo o protagonismo discente, a interdisciplinaridade e o desenvolvimento de competências para o século XXI.

1.1 Motivação

O ensino de Matemática no Ensino Médio, muitas vezes, enfrenta o desafio de ser percebido pelos estudantes como abstrato, fora do cotidiano e distante da realidade que os alunos pode apresentar. Apesar de seu papel essencial no desenvolvimento do raciocínio lógico e na formação cidadã, é comum observar uma abordagem tradicional, centrada na resolução mecânica de exercícios, sem que o aluno compreenda a utilidade prática dos conceitos estudados.

Essa constatação motivou a busca por propostas didáticas que aproximem a Matemática do cotidiano e das situações reais de tomada de decisão. A Teoria dos Jogos, por sua natureza estratégica e interdisciplinar, oferece um campo fértil para essa aproximação. No entanto, sua aplicação no contexto escolar ainda é incipiente, muitas vezes limitada a conteúdos do ensino superior ou dependente de ferramentas do cálculo diferencial.

A proposta desta dissertação surgiu do desejo de tornar acessíveis aos estudantes do Ensino Médio conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos, em especial o modelo de Cournot e a estratégia Minimax, por meio de uma abordagem algébrica, sem o uso de derivadas. Ao explorar funções quadráticas, sistemas de equações e simulações numéricas, pretendese oferecer uma alternativa viável, criativa e desafiadora que estimule o pensamento estratégico, a argumentação matemática e a modelagem de situações reais, alinhando-se aos princípios da BNCC.

Além disso, a motivação parte do interesse em investigar como a Matemática pode ser ensinada não apenas como um conjunto de técnicas, mas como uma ferramenta para compreender e agir estrategicamente no mundo. Ao transformar o estudante em protagonista de decisões econômicas simuladas, amplia-se a percepção do papel social e prático da Matemática, fortalecendo sua relevância no processo educativo.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Investigar e propor uma abordagem didática que integre a Teoria dos Jogos ao ensino de Matemática no Ensino Médio, por meio da utilização do modelo de duopólio de Cournot e da estratégia Minimax, explorando conteúdos como funções quadráticas e sistemas lineares, com foco no desenvolvimento do pensamento estratégico e na contextualização da aprendizagem conforme as diretrizes da BNCC.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar os fundamentos teóricos da Teoria dos Jogos, com ênfase no modelo de Cournot e na estratégia Minimax.
- Desenvolver exemplos numéricos e simulações de decisões estratégicas entre empresas, utilizando apenas ferramentas algébricas acessíveis ao Ensino Médio.
- Integrar os conceitos de funções do segundo grau, sistemas lineares, tabelas e gráficos à modelagem matemática de situações econômicas.
- Elaborar uma sequência didática fundamentada na BNCC que utilize situações de competição entre empresas como recurso pedagógico.
- Avaliar as potencialidades e limitações da proposta no desenvolvimento de competências matemáticas e argumentativas dos estudantes.

2 Introdução à Teoria dos Jogos

A Teoria dos Jogos faz parte dos estudos da Matemática Aplicada, analisando situações de decisão estratégica em que os resultados dependem das escolhas de dois ou mais agentes racionais. A apresentação dos estudos teve início no século XX, sendo firmemente apresentada com a publicação da obra *Theory of Games and Economic Behavior*, de John von Neumann e Oskar Morgenstern, em 1944. De acordo com os autores, a proposta do livro foi apresentar "uma teoria geral das decisões econômicas que fosse rigorosamente matemática" (Neumann; Morgenstern, 1944, p.5).

Nos anos seguintes, a teoria foi ampliada com as contribuições de diversos estudiosos, sendo John Nash um dos mais notáveis. Em sua dissertação de 1950, Nash (1951, p. 289) afirma: "A parte principal a ser estudada é o conceito de equilíbrio. Um conjunto de estratégias é um equilíbrio se nenhum jogador pode melhorar seu resultado de modo unilateral". Essa formulação tornou-se a base da análise de jogos não cooperativos, sendo conhecida como Equilíbrio de Nash. Desde então, a Teoria dos Jogos tem sido aplicada em diversas áreas além da economia, biologia evolutiva, ciência política, psicologia, computação e, mais recentemente, na educação.

Desde então, a Teoria dos Jogos tem sido aplicada em diversas áreas além da economia, como biologia evolutiva, ciência política, psicologia, computação e, mais recentemente, na educação. (Binmore, 2007, p.2) destaca que "a teoria dos jogos nos fornece uma maneira sistemática de pensar sobre como os indivíduos interagem estrategicamente".

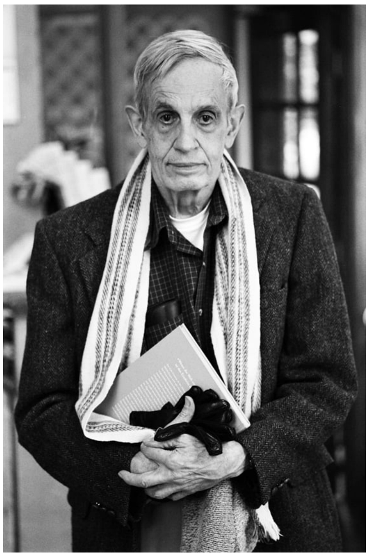
2.1 John von Neumann e Oskar Morgenstern

O matemático húngaro John von Neumann e o economista austríaco Oskar Morgenstern uniram seus conhecimentos para estabelecer as bases matemáticas e econômicas da Teoria dos Jogos.

Em 1944, ambos apresentaram, em uma conferência, a obra *Theory of Games and Economic Behavior*, na qual formularam uma estrutura matemática detalhada para investigar jogos estratégicos e suas consequências no campo econômico. Esse trabalho pioneiro foi fundamental para o desenvolvimento de uma abordagem matemática das interações estratégicas, introduzindo noções essenciais como matriz de recompensas (*payoffs*), estratégias puras e mistas, além do conceito de equilíbrio de Von Neumann.

A palavra payoff, frequentemente utilizada na obra, significa literalmente "pagamento" ou "recompensa", e corresponde a um valor que expressa o quanto um determinado resultado é desejável para um jogador. Esse valor representa suas preferências ou o nível

Figura 1 – John Nash.



Fonte: https://www.suno.com.br/tudo-sobre/john-nash/

de utilidade associado ao desfecho obtido.

Figura 2 – Oskar Morgenstern.

Fonte: https://geschichte.univie.ac.at/en/persons/oskar-morgenstern

A publicação de Von Neumann e Morgenstern não só revolucionou a economia, mas também propôs uma linguagem padronizada para analisar e descrever diversas situações envolvendo escolhas estratégicas. O trabalho consolidou a Teoria dos Jogos como uma área de estudo rigorosa, com aplicações que ultrapassam os limites da economia.

2.2 O Dilema do Prisioneiro

Um dos jogos mais conhecidos e frequentemente utilizado para introduzir os conceitos da Teoria dos Jogos é o **Dilema do Prisioneiro**, formulado inicialmente por Merrill Flood e Melvin Dresher em 1950 e posteriormente difundido por r (Tucker, 1950).

O dilema consiste na seguinte situação: dois suspeitos são presos sob acusação de um crime e interrogados separadamente. Cada prisioneiro tem duas opções, confessar (trair o parceiro) ou permanecer em silêncio (cooperar com o parceiro). As consequências são:

- Se ambos permanecerem em silêncio, recebem uma pena reduzida, por falta de provas.
- Se um confessa e o outro permanece em silêncio, o que confessa é libertado e o outro recebe a pena máxima.
- Se ambos confessam, ambos recebem uma pena intermediária.

A estrutura de recompensas pode ser organizada em uma matriz de *payoff*:

Tabela 1 – Dilema do Prisioneiro.

	Prisioneiro B Silêncio	**Prisioneiro B Confessa**
Prisioneiro A Silêncio	(-2, -2)	(-10, 0)
Prisioneiro A Confessa	(0, -10)	(-5, -5)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Este jogo mostra que, embora a cooperação mútua leve ao melhor resultado conjunto (pena reduzida para ambos), o Equilíbrio de Nash ocorre quando ambos confessam, pois cada jogador, ao pensar individualmente em sua melhor resposta, opta por trair o outro.

O dilema revela uma tensão fundamental entre o interesse individual e o coletivo, sendo amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento, desde a Economia até a Educação, para mostrar como decisões estratégicas podem levar a resultados não ótimos do ponto de vista social.

2.3 Conceitos Centrais da Teoria dos Jogos

A estrutura fundamental de um jogo, no contexto da Teoria dos Jogos, é composta por quatro elementos essenciais: **jogadores**, **estratégias**, **pagamentos (ou utilidades)** e **informação disponível**. Esses componentes formam a base para a análise das interações estratégicas entre agentes racionais, sendo amplamente explorados em contextos econômicos, políticos, sociais e, mais recentemente, educacionais.

2.3.1 Jogadores

Os *jogadores* representam os agentes envolvidos no jogo, ou seja, aqueles que tomam decisões estratégicas. Em um jogo econômico, por exemplo, os jogadores podem ser empresas concorrentes; em um jogo político, partidos ou candidatos; e, em um ambiente educacional, podem ser os próprios alunos simulando situações decisórias. Cada jogador tem seus próprios objetivos e age de forma racional, buscando maximizar sua utilidade ou *payoff*.

2.3.2 Estratégias

As *estratégias* correspondem ao conjunto de ações possíveis que cada jogador pode adotar durante o jogo. Em um jogo simples, como o dilema dos prisioneiros, os jogadores têm duas estratégias: cooperar ou trair. Em jogos mais complexos, as estratégias podem envolver decisões contínuas, como escolher a quantidade de produção em um duopólio (como no modelo de Cournot), ou mesmo ações condicionadas ao comportamento dos demais jogadores.

Cada estratégia escolhida afeta diretamente o desfecho do jogo, não apenas para o jogador que a escolheu, mas também para os demais. Por isso, a Teoria dos Jogos é essencialmente interativa: a melhor escolha para um jogador depende das escolhas dos outros.

2.3.3 Pagamentos (ou Utilidades)

Os *pagamentos*, também chamados de *utilidades*, representam os ganhos (ou perdas) que os jogadores obtêm em função das estratégias adotadas. Em jogos econômicos, esses pagamentos geralmente são representados por lucros, receitas ou custos. Em contextos mais abstratos, podem representar níveis de satisfação, pontos em um jogo, ou quaisquer medidas de sucesso para o agente envolvido.

Matematicamente, os pagamentos são definidos por funções de utilidade, que associam a cada perfil de estratégias (ou combinação de ações dos jogadores) um valor numérico para cada jogador. Esse valor expressa o grau de preferência do jogador por aquele desfecho específico.

2.3.4 Informação Disponível

A *informação disponível* refere-se ao que cada jogador sabe sobre o jogo no momento em que toma suas decisões. Essa informação pode incluir:

- As regras do jogo;
- As estratégias disponíveis para todos os jogadores;
- Os pagamentos resultantes de cada combinação de estratégias;
- As ações já tomadas por outros jogadores (em jogos sequenciais ou com informação perfeita).

A natureza da informação define diferentes tipos de jogos:

- **Jogos de informação perfeita**: todos os jogadores conhecem todas as ações anteriores (ex: xadrez);
- **Jogos de informação imperfeita**: há incerteza sobre decisões passadas ou características dos oponentes (ex: pôquer).

A forma como a informação é distribuída entre os jogadores tem implicações cruciais sobre as estratégias racionais e os equilíbrios possíveis.

2.3.5 Equilíbrio de Nash

Um dos conceitos centrais da Teoria dos Jogos é o *Equilíbrio de Nash*, introduzido por John Nash em 1951. Um perfil de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando nenhum jogador pode melhorar sua utilidade ao mudar unilateralmente sua estratégia, assumindo que os demais jogadores mantenham suas escolhas inalteradas.

Esse conceito formaliza a ideia de *estabilidade estratégica*: se todos estiverem jogando estratégias de equilíbrio, nenhum jogador tem incentivo para se desviar. Nash demonstrou que **todo jogo finito com um número finito de estratégias possui pelo menos um equilíbrio**, seja ele em estratégias puras ou mistas. Esse resultado foi um marco na teoria e garantiu sua aplicabilidade a uma ampla variedade de situações práticas.

2.4 Tipos de Jogos

A classificação dos jogos em diferentes categorias permite compreender as formas de interação entre os participantes e suas implicações no comportamento estratégico. Essa distinção é particularmente relevante em contextos educacionais, onde os jogos podem ser utilizados como instrumentos didáticos para desenvolver competências cognitivas e sociais. (Pereira, 2014, p.20), em sua dissertação de mestrado sobre a aplicação da Teoria dos Jogos no Ensino Médio, propõe uma abordagem didática que destaca dois tipos principais de jogos: cooperativos e não cooperativos.

2.4.1 Jogos Cooperativos

Nos jogos cooperativos, os participantes podem formar alianças e atuar conjuntamente, buscando alcançar um objetivo comum. O foco está na colaboração, na comunicação e no compartilhamento dos resultados obtidos coletivamente. Esse tipo de atividade favorece o desenvolvimento de habilidades interpessoais, como empatia, escuta ativa e coordenação de grupo.

- **Nó Humano**: os participantes se dão as mãos aleatoriamente, formando um nó, e devem trabalhar juntos para desfazê-lo sem soltá-las.
- **Passando o Bambolê**: os jogadores formam uma roda e, sem soltar as mãos, devem passar um bambolê de pessoa para pessoa até completar o círculo.
- **Circuito Esportivo Cooperativo**: uma série de desafios físicos é proposta, e os participantes precisam colaborar para superar os obstáculos.

2.4.2 Jogos Não Cooperativos

Em contraste, os jogos não cooperativos envolvem competição entre os participantes. Cada jogador age de forma autônoma, buscando atingir seus próprios objetivos, frequentemente em oposição aos interesses dos demais. Esse tipo de jogo é útil para explorar situações de conflito de interesses, tomada de decisões estratégicas e análise de resultados individuais.

- **Xadrez**: dois jogadores competem estrategicamente para capturar o rei adversário.
- **Damas**: cada jogador tenta capturar todas as peças do oponente por meio de movimentos diagonais.
- **Monopólio**: os participantes competem por propriedades e recursos, buscando levar os demais à falência.
- **Jogo da Velha**: os jogadores alternam jogadas para formar uma linha com três símbolos iguais (X ou O), ao mesmo tempo bloqueando o adversário.

A distinção entre jogos cooperativos e não cooperativos é essencial para refletir sobre diferentes formas de interação social e aprendizagem. A utilização pedagógica desses jogos, conforme discutido por(Pereira, 2014, p.54), oferece ao estudante a oportunidade de experimentar contextos diversos de resolução de problemas e construção de estratégias.

2.5 Jogos de Soma Zero e Jogos de Soma Diferente de Zero

Entre as diversas abordagens apresentadas por (Pereira, 2014, p.15) na introdução à Teoria dos Jogos, destaca-se a importância de compreender a classificação dos jogos com base na relação entre os ganhos e perdas dos jogadores. Essa distinção, que separa os jogos em soma zero e soma diferente de zero, oferece fundamentos essenciais para a análise estratégica das interações, influenciando diretamente as possíveis decisões e comportamentos adotados pelos participantes.

2.5.1 Jogos de soma zero

Os jogos de soma zero são aqueles em que o ganho de um jogador representa exatamente a perda do outro. Em termos formais, a soma dos resultados (ou *payoffs*) dos jogadores ao final do jogo é sempre igual a zero. Nesse tipo de jogo, os interesses dos jogadores são totalmente opostos, e não há possibilidade de cooperação. Estratégias como o princípio do minimax costumam ser aplicadas nesses contextos, onde vencer implica, necessariamente, fazer o outro perder.

Exemplos típicos incluem:

- **Xadrez**: ao vencer, um jogador automaticamente causa a derrota do outro, e não há resultado que beneficie ambos.
- **Damas**: segue a mesma lógica do xadrez, com um vencedor e um perdedor definidos a partir da eliminação das peças do adversário.
- **Jogo da Velha (clássico)**: embora possa terminar em empate, quando há vitória, ela ocorre sempre às custas da derrota do outro.
- **Pedra, Papel e Tesoura**: jogo simultâneo em que um ganha e o outro perde, sem ganhos ou perdas mútuas.

2.5.2 Jogos de soma diferente de zero

Em contrapartida, os jogos de soma diferente de zero (também chamados de jogos não soma zero) permitem que os ganhos e perdas dos jogadores não sejam estritamente opostos. Isso significa que é possível que todos ganhem ou todos percam, dependendo das escolhas realizadas. Em muitos desses jogos, a cooperação pode ser uma estratégia vantajosa, permitindo modelar cenários de negociação, aliança, justiça distributiva e soluções de benefício coletivo.

Exemplos notáveis incluem:

- **Monopólio**: embora seja competitivo, há momentos de troca e negociação que podem beneficiar ambos os jogadores (como trocas de propriedades estratégicas).
- **Jogos cooperativos como o Nó Humano ou Passando o Bambolê**: todos os jogadores ganham ao atingir o objetivo comum, caracterizando uma situação de soma positiva.
- **Dilema dos Prisioneiros (modelo teórico)**: dependendo das escolhas (cooperar ou trair), os resultados variam. Se ambos cooperam, obtêm um ganho conjunto superior ao cenário em que ambos traem, evidenciando um jogo de soma não zero.

A distinção entre jogos de soma zero e não soma zero é central na Teoria dos Jogos, pois estabelece diferentes lógicas estratégicas. Enquanto os jogos de soma zero reforçam o conflito direto e a competição, os de soma diferente de zero abrem espaço para colaboração, negociação e construção de soluções vantajosas para todas as partes envolvidas.

2.6 Motivação para uso no contexto escolar

A aplicação da **Teoria dos Jogos** no ensino da Matemática desempenha um papel fundamental no desenvolvimento tanto das competências matemáticas quanto das habilidades socioemocionais dos estudantes. Ao se depararem com situações que envolvem escolhas estratégicas, os alunos são estimulados a refletir, prever resultados e argumentar utilizando raciocínios matemáticos, ampliando seu pensamento crítico e lógico. O uso dos jogos como ferramentas pedagógicas contribui significativamente para aumentar o engajamento dos estudantes do ensino médio, promovendo uma aprendizagem ativa e significativa. Essa metodologia incentiva a resolução de problemas em contextos reais que demandam não apenas cálculos mecânicos, mas também a formulação de estratégias e decisões conscientes. Ao trabalhar as habilidades cognitivas por meio de jogos ou recursos multimídia, é possível criar uma interação social rica, na qual o aluno é desafiado a explorar novas capacidades e experiências (Vygotsky, 2003). Embora originalmente formuladas para a infância, as ideias de Vygotsky sobre aprendizagem por interação e desenvolvimento cognitivo por meio de jogos são igualmente relevantes para estudantes do ensino médio, pois enfatizam engajamento, construção de estratégias e pensamento crítico. Segundo Vygotsky (2003), o brincar e o uso de jogos permitem a criação de impressões que formam novas realidades cognitivas, promovendo o desenvolvimento de processos de aprendizagem mais profundos e significativos.

Além disso, o emprego da Teoria dos Jogos no ensino aproxima A a Matemática de outras áreas do conhecimento, como a Economia, a Ética e a Sociologia, tornando o aprendizado mais interdisciplinar e dinâmico. Ao explorar jogos matemáticos fundamentados nessa abordagem, os estudantes desenvolvem habilidades argumentativas e críticas que fortalecem sua capacidade analítica e interpretativa. O caráter colaborativo e estratégico dessa metodologia contribui para a formação integral dos alunos, estimulando competências essenciais para a vida em sociedade, como o pensamento estratégico, a colaboração e o controle emocional.

A Teoria dos Jogos, quando aplicada de forma contextualizada em sala de aula, também pode favorecer a construção de um ambiente mais participativo, onde o erro é compreendido como parte do processo de aprendizagem. Os jogos propostos possibilitam múltiplas soluções e trajetórias, promovendo a autonomia dos estudantes na tomada de decisões e valorizando a diversidade de raciocínios. Desse modo, a aprendizagem se torna mais relevante e contextualizada, pois está ancorada em experiências concretas e interativas que motivam a descoberta, a experimentação e o diálogo coletivo. Assim, a teoria deixa de ser apenas um conteúdo abstrato e passa a ser uma ferramenta viva de mediação pedagógica.

3 Estratégia Minimax: Fundamentos Matemáticos e Aplicações

A estratégia *minimax* é um conceito fundamental na Teoria dos Jogos, introduzido por John von Neumann em 1928 e consolidado posteriormente na obra clássica *Theory of Games and Economic Behavior*, escrita em coautoria com Oskar Morgenstern em 1944. Essa estratégia é especialmente relevante em contextos de tomada de decisão nos quais há conflito direto entre dois agentes, como nos jogos de soma zero (Neumann; Morgenstern, 1944).

O princípio do *minimax* consiste em minimizar a perda máxima possível que um jogador pode sofrer em um jogo. Em outras palavras, o jogador adota uma postura cautelosa, assumindo que o adversário buscará infligir o maior prejuízo possível, e, por isso, escolhe a estratégia que lhe assegura o melhor dos piores cenários (Osborne; Rubinstein, 1994).

Para compreender esse princípio, é essencial distinguir dois conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos: **estratégia pura** e **estratégia mista**.

3.1 A estratégia Minimax e as Estratégias Puras e Mistas

Estratégia pura

Uma *estratégia pura* corresponde à escolha direta de uma única ação, entre as disponíveis para o jogador. Trata-se de uma decisão determinística: o jogador escolhe exatamente uma opção entre as possíveis, sem qualquer aleatoriedade.

Por exemplo, se um jogador possui três estratégias possíveis (digamos, ações A, B e C), escolher a ação B de forma direta é adotar uma estratégia pura. Matematicamente, isso equivale a um vetor unitário e_i com valor 1 na posição correspondente à ação escolhida e 0 nas demais.

Estratégia mista

Uma estratégia mista, por outro lado, consiste em atribuir probabilidades às estratégias puras, formando uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto de ações disponíveis. Isso significa que, em vez de escolher uma única ação com certeza, o jogador seleciona aleatoriamente uma ação conforme uma distribuição previamente definida.

Por exemplo, um jogador com três ações pode adotar a seguinte estratégia mista: escolher a ação A com probabilidade 0,5, a ação B com 0,3 e a ação C com 0,2. Essa abordagem torna o comportamento do jogador menos previsível e, frequentemente, mais eficaz.

Formalmente, a estratégia mista do jogador P_1 é representada por um vetor $x \in \mathbb{R}^m$, onde cada componente x_i representa a probabilidade de adotar a estratégia pura i, satisfazendo as condições:

$$x_i \geq 0 \quad \text{para todo } i, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

O conjunto de todas as estratégias mistas do jogador P_1 é:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

Analogamente, o conjunto de estratégias mistas do jogador P_2, que possui n estratégias puras, é:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

3.1.1 Valor esperado do jogo e teorema minimax

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de pagamentos, em que $A(i, j)$ representa o valor pago por P_2 a P_1 quando P_1 adota a estratégia pura i e P_2 adota a estratégia pura j.

Quando ambos os jogadores utilizam estratégias mistas $x \in X$ e $y \in Y$, o valor esperado do jogo para o jogador P_1 é dado por

$$V_1(x, y) = x^\top A y.$$

Essa equação corresponde a uma forma bilinear, na qual o vetor linha $x^\top$ multiplica a matriz A, resultando em um vetor linha intermediário que, por sua vez, é multiplicado à direita pelo vetor coluna y. O resultado é um número real que representa o valor esperado do pagamento para P_1, considerando as distribuições de probabilidade adotadas por ambos os jogadores.

No caso de jogos de soma zero, o valor esperado do jogo para o jogador P_2 é o oposto do valor esperado de P_1, ou seja,

$$V_2(x, y) = -V_1(x, y) = -x^\top A y.$$

Essa relação decorre do fato de que a matriz A representa os pagamentos de P_1. Assim, qualquer ganho obtido por P_1 corresponde a uma perda equivalente para P_2.

Em jogos que não são de soma zero, o cálculo de V_2 pode ser feito a partir de sua própria matriz de pagamento B, sendo expresso por

$$V_2(x, y) = x^\top By.$$

O jogador P_1, ao adotar a estratégia minimax, procura maximizar o menor valor possível desse pagamento, levando em conta que P_2 buscará minimizar o ganho de P_1:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^\top Ay.$$

De forma análoga, para o jogador P_2, cujo pagamento é o oposto do ganho de P_1 em um jogo de soma zero, o objetivo é minimizar o valor esperado que deve pagar a P_1. Considerando que P_1 buscará maximizar esse valor, a formulação do problema para P_2 é dada por:

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^\top Ay.$$

Essa expressão representa o ponto de vista dual do problema: enquanto P_1 busca garantir o maior ganho possível mesmo no pior cenário, P_2 procura assegurar o menor prejuízo possível considerando a melhor resposta de P_1. Quando essas duas condições se encontram, tem-se o valor do jogo, que corresponde ao equilíbrio entre as estratégias otimizadas de ambos os jogadores.

Na presente dissertação, será utilizada uma forma específica do Teorema Minimax, válida para jogos de soma zero com dois jogadores e conjunto finito de estratégias puras. Considerando o uso de estratégias mistas, o valor do jogo pode ser determinado pelo teorema Minimax de Von Neumann.

Teorema 3.1 (Minimax de Von Neumann) *Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representado pela matriz de payoffs A do jogador linha, sempre existe um par de estratégias mistas $(x^*, y^*) \in X \times Y$ satisfazendo*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^\top Ay = x^{*\top} Ay^* = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^\top Ay.$$

Em particular, (x^*, y^*) é um equilíbrio de Nash do jogo.

No qual A representa a matriz de pagamentos do jogo, e x e y são vetores de estratégias mistas dos jogadores. Essa formulação garante que existe um valor do jogo no qual ambos os jogadores possuem estratégias ótimas mistas, como demonstrado originalmente por (Neumann, 1928) e discutido em (Osborne; Rubinstein, 1999). Como alternativa, a demonstração desse resultado pode ser conferida em (Sartini et al., 2004), que apresenta uma abordagem introdutória detalhada e acessível sobre os fundamentos matemáticos da teoria dos jogos.

3.1.2 Exemplo Numérico

O cálculo do valor esperado de um jogo de soma zero com estratégias mistas pode ser feito por meio do produto $x^\top Ay$, como exemplificado em (Osborne; Rubinstein, 1999), onde x e y representam as estratégias mistas dos jogadores e A a matriz de pagamentos do jogo. Considere a seguinte matriz de pagamentos para um jogo de soma zero entre dois jogadores:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

O jogador P_1 possui duas estratégias puras (linhas da matriz), e o jogador P_2 também possui duas estratégias puras (colunas da matriz). Suponha que:

- O jogador P_1 adota a estratégia mista $x = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$,
- O jogador P_2 adota a estratégia mista $y = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$.

Vamos calcular o valor esperado do jogo:

$$x^\top Ay = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Primeiro, multiplicamos $x^\top$ por A:

$$\begin{aligned} x^\top A &= \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} (0{,}4 \cdot 2) + (0{,}6 \cdot -3) & (0{,}4 \cdot -1) + (0{,}6 \cdot 4) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}8 - 1{,}8 & -0{,}4 + 2{,}4 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} -1{,}0 & 2{,}0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, multiplicamos esse vetor linha pelo vetor coluna y:

$$(-1{,}0 \cdot 0{,}5) + (2{,}0 \cdot 0{,}5) = -0{,}5 + 1{,}0 = 0{,}5.$$

Portanto, o valor esperado do jogo é $V_1(x, y) = 0{,}5$. Isso significa que, dadas as estratégias mistas escolhidas, o jogador P_1 tem expectativa de ganho de 0,5 unidades, enquanto P_2 espera perder esse valor.

3.2 Exemplo de Aplicação Matemática da Estratégia Minimax

A matriz utilizada neste exemplo é de caráter didático, inspirada em exemplos apresentados em obras como (Osborne; Rubinstein, 1999) e (Binmore, 2007), que discutem a aplicação da estratégia Minimax em jogos de soma zero com estratégias puras. Considere um jogo de soma zero entre dois jogadores, J_1 e J_2, com a seguinte matriz de *payoffs*, representando os ganhos de J_1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta matriz, J_1 escolhe uma das três linhas (estratégias), e J_2 escolhe uma das três colunas. O valor na posição (i, j) representa o ganho de J_1 quando ele escolhe a linha i e J_2 escolhe a coluna j. Como se trata de um jogo de soma zero, a perda de J_2 é exatamente igual ao ganho de J_1.

Passo 1: Estratégia de *Maximin* para o Jogador J_1

O jogador J_1, adotando uma postura conservadora, analisa o pior cenário para cada uma de suas estratégias, ou seja, calcula o menor valor de cada linha:

- Linha 1: $\min(3, 2, 1) = 1$,
- Linha 2: $\min(4, 3, 2) = 2$,
- Linha 3: $\min(1, 5, 0) = 0$.

Em seguida, ele escolhe a linha cujo menor valor seja o maior possível:

$$\max(1, 2, 0) = 2.$$

Assim, a melhor estratégia para J_1 é a linha 2, pois garante um ganho mínimo de 2, independentemente da escolha de J_2.

Passo 2: Estratégia de *Minimax* para o Jogador J_2

O jogador J_2 deseja minimizar o ganho de J_1, o que equivale a minimizar sua própria perda. Para isso, ele analisa o maior valor em cada coluna:

- Coluna 1: $\max(3, 4, 1) = 4$,

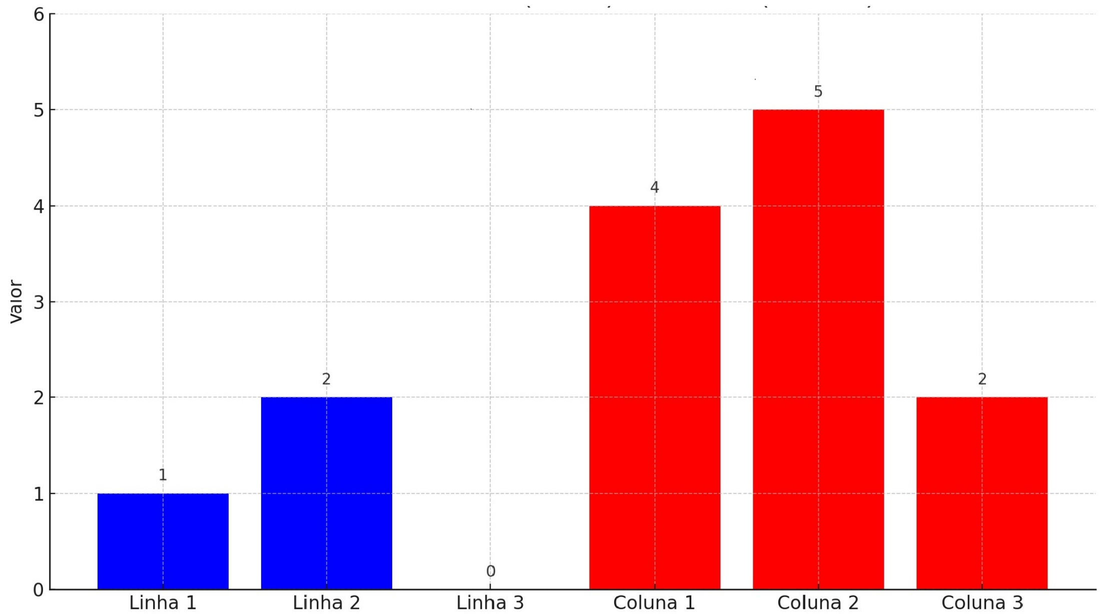
- Coluna 2: $\max(2,3,5) = 5$,
- Coluna 3: $\max(1,2,0) = 2$.

Em seguida, escolhe a coluna cujo maior valor seja o menor possível:

$$\min(4,5,2) = 2.$$

Logo, a melhor estratégia para J_2 é a coluna 3, pois limita o ganho máximo de J_1 a 2. Na tabela 1 temos uma representação dos valores apresentados:

Figura 3 – Cálculo do Maximin (linhas) e Minimax (colunas)



Fonte: Elaborado pelo autor

- **Azul** (Linha 1, 2, 3): mínimos de cada linha (para o cálculo do Maximin do jogador J_1),
- **Vermelho** (Coluna 1, 2, 3): máximos de cada coluna (para o Minimax do jogador J_2).

Ele ilustra que:

$$\max\Big(\min(\text{linhas})\Big) = \min\Big(\max(\text{colunas})\Big) = 2.$$

Portanto, existe equilíbrio em estratégias puras.

Conclusão: Valor do Jogo e Equilíbrio

Neste exemplo, tanto o jogador J_1 quanto o jogador J_2 escolhem estratégias que resultam em um valor de jogo igual a 2. Assim, temos:

$$\max \min = \min \max = 2.$$

Portanto, o jogo apresenta equilíbrio na forma de estratégias puras, e o valor do jogo é 2. Esse resultado é coerente com o Teorema Minimax de Von Neumann, aplicável a jogos de soma zero.

A estratégia *minimax* também está relacionada a diversos algoritmos computacionais aplicados em jogos como xadrez e damas, bem como em modelos de inteligência artificial, devido à sua característica de explorar decisões otimizadas frente a adversários racionais.

3.3 Jogos de Soma Zero e a Estratégia Minimax

O conceito de *jogo de soma zero* é central para o entendimento da estratégia *minimax*. Em um jogo de soma zero, o que um jogador ganha é exatamente igual ao que o outro perde, ou seja, a soma dos ganhos e perdas dos jogadores é sempre igual a zero. Isso implica que os interesses dos jogadores são completamente opostos: não é possível haver cooperação ou benefício mútuo.

Matematicamente, considere dois jogadores, A e B. Se $u_A(s_A, s_B)$ representa o pagamento para o jogador A, e $u_B(s_A, s_B)$ para o jogador B, então:

$$u_A(s_A, s_B) + u_B(s_A, s_B) = 0.$$

Esse tipo de jogo é particularmente útil para modelar situações de conflito puro, como competições, disputas de mercado com produtos idênticos, jogos de tabuleiro ou negociações altamente adversariais.

Nos jogos de soma zero com estratégias finitas, o uso da estratégia *minimax* permite que cada jogador adote um comportamento racional e defensivo, assegurando um resultado mínimo garantido, mesmo diante da pior resposta possível do adversário. Esses jogos são, portanto, os mais adequados para a aplicação direta do Teorema Minimax.

3.4 Exemplos Matemáticos da Estratégia Minimax em Jogos de Soma Zero

A elaboração dos exemplos apresentados nesta seção baseia-se em referências clássicas da literatura de Teoria dos Jogos, como (Osborne, 2004) e (Gibbons, 1994), bem como na adaptação didática realizada pelo próprio autor com o objetivo de ilustrar de forma acessível os conceitos fundamentais da estratégia Minimax. A fim de ilustrar de maneira concreta o funcionamento da estratégia Minimax em jogos de soma zero, apresentam-se a seguir três exemplos matemáticos que evidenciam sua aplicabilidade em diferentes contextos: jogos clássicos, jogos de tabuleiro e modelos econômicos simplificados. Cada situação demonstra como os jogadores podem utilizar princípios matemáticos para tomar decisões estratégicas racionais, com o objetivo de maximizar seus ganhos (ou minimizar perdas) frente à incerteza gerada pelas escolhas do oponente.

A construção da matriz de payoffs, a análise das estratégias puras e mistas, bem como o cálculo do valor do jogo, permitem evidenciar os fundamentos do Teorema Minimax de Von Neumann, destacando a relevância dessa abordagem tanto na modelagem teórica quanto em aplicações práticas. Os exemplos seguintes foram selecionados por sua familiaridade e clareza, permitindo o uso didático da Teoria dos Jogos no ambiente educacional.

Exemplo 1: Pedra, Papel e Tesoura

Este exemplo segue o modelo clássico de jogo simétrico de soma zero, amplamente discutido em (Osborne, 2004). Considere o jogo clássico Pedra, Papel e Tesoura, um jogo de soma zero com três opções: Pedra (P), Papel (L) e Tesoura (T). A matriz de payoffs (ganhos de J_1) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Nesta matriz, as linhas correspondem às escolhas do jogador J_1, e as colunas às escolhas do jogador J_2. Cada entrada $A_{ij} = A(i, j)$ indica o ganho de J_1 quando ele escolhe a opção i e J_2 escolhe a opção j. A interpretação das entradas é a seguinte:

- Primeira linha (Jogo de J_1: Pedra)
  - $A_{11} = 0$: ambos jogam Pedra, empate.
  - $A_{12} = -1$: J_1 joga Pedra e J_2 joga Papel, J_1 perde.
  - $A_{13} = 1$: J_1 joga Pedra e J_2 joga Tesoura, J_1 vence.

- Segunda linha (Jogo de J_1: Papel)
  - $A_{21} = 1$: J_1 joga Papel e J_2 joga Pedra, J_1 vence.
  - $A_{22} = 0$: ambos jogam Papel, empate.
  - $A_{23} = -1$: J_1 joga Papel e J_2 joga Tesoura, J_1 perde.
- Terceira linha (Jogo de J_1: Tesoura)
  - $A_{31} = -1$: J_1 joga Tesoura e J_2 joga Pedra, J_1 perde.
  - $A_{32} = 1$: J_1 joga Tesoura e J_2 joga Papel, J_1 vence.
  - $A_{33} = 0$: ambos jogam Tesoura, empate.

Como se trata de um jogo de soma zero, os ganhos de J_1 são exatamente as perdas de J_2, ou seja, $A_{ij} = -A_{ji}$. Essa estrutura anti-simétrica é característica de jogos simétricos como o Pedra, Papel e Tesoura, em que os papéis dos jogadores são intercambiáveis e nenhuma ação oferece vantagem inerente sem considerar a escolha do oponente. A estratégia mista de ambos os jogadores é $x = y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, significa que cada jogador escolhe aleatoriamente entre Pedra, Papel ou Tesoura com a mesma probabilidade de 1/3.

Valor esperado do jogo:

$$V = xAy^\top = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = 0.$$

O valor esperado do jogo representa o ganho médio do jogador 1 quando ambos os jogadores adotam racionalmente suas estratégias mistas. No caso do jogo Pedra, Papel e Tesoura, como $V = 0$, o jogo é totalmente equilibrado, nenhuma estratégia oferece vantagem, e não há lucro ou perda esperada em longo prazo.

Exemplo 2: Xadrez/Damas Simplificado

Para efeito didático, adaptou-se um modelo de ataque e defesa similar ao proposto em (Gibbons, 1994), visando ilustrar a ausência de equilíbrio em estratégias puras. Suponha que os jogadores possam apenas atacar (A) ou defender (D). As estratégias disponíveis para ambos os jogadores são, portanto, A e D, sendo as linhas da matriz as escolhas de J_1 e as colunas as escolhas de J_2. A matriz de payoffs é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cada entrada A_{ij} representa o ganho de J_1, quando ele escolhe a ação da linha i e J_2 escolhe a ação da coluna j. A interpretação de cada entrada é a seguinte:

- $A_{11} = 0$: Ambos os jogadores atacam, o confronto direto resulta em empate, e J_1 não ganha nem perde.
- $A_{12} = 3$: J_1 ataca e J_2 defende, o ataque é bem-sucedido e gera um alto ganho para J_1.
- $A_{21} = 1$: J_1 defende e J_2 ataca, a defesa de J_1 tem sucesso parcial, gerando um ganho moderado.
- $A_{22} = -1$: Ambos defendem, a passividade de ambos os lados gera uma perda leve para J_1, talvez representando perda de oportunidade ou desvantagem posicional.

Essa matriz evidencia uma situação em que não há equilíbrio em estratégias puras, pois as melhores respostas se alternam conforme a escolha do oponente, o que conduz naturalmente à necessidade de estratégias mistas. A análise desse exemplo permite ilustrar de forma clara a aplicação do Teorema Minimax em jogos assimétricos e com incentivos conflitantes entre ataque e defesa.

Estratégias puras

No contexto da matriz de payoffs, a análise das estratégias puras começa pelo conceito de *valor de segurança* para cada jogador. O jogador J_1, ao escolher uma estratégia pura, considera o pior resultado possível (ou seja, o menor valor em cada linha da matriz), assumindo que o oponente selecionará a ação mais desfavorável para ele.

- Para a primeira linha (estratégia A), o menor ganho possível é $\min(0, 3) = 0$.
- Para a segunda linha (estratégia D), o menor ganho possível é $\min(1, -1) = -1$.

O jogador J_1 escolhe a estratégia que oferece o maior entre esses piores resultados, ou seja:

$$\max\min = \max(0, -1) = 0,$$

Esse valor representa a garantia mínima de J_1 ao adotar a estratégia mais segura, mesmo diante da ação mais adversa de J_2.

Por outro lado, o cálculo do *minimax* é feito sob a perspectiva de J_2. Esse valor de segurança corresponde ao cenário mais desfavorável que J_2 poderá enfrentar caso J_1 atue para maximizar o próprio ganho. Para determinar esse valor, é necessário observar o maior resultado em cada coluna da matriz de payoffs de J_1, pois esses valores representam os ganhos máximos que J_1 pode alcançar em resposta às estratégias de J_2:

- Na primeira coluna (quando J_2 escolhe A): os valores são 0 e 1, então $\max(0, 1) = 1$.
- Na segunda coluna (quando J_2 escolhe D): os valores são 3 e -1, então $\max(3, -1) = 3$.

O jogador J_2 seleciona a coluna que minimiza o ganho máximo de J_1, ou seja:

$$\min\max = \min(1, 3) = 1.$$

Esse valor indica a perda mínima que J_2 pode garantir para si, adotando a estratégia mais defensiva possível diante da postura maximizadora de J_1.

Como $\max\min = 0$ e $\min\max = 1$, temos:

$$\max\min \neq \min\max\,.$$

Essa desigualdade confirma que não existe um ponto de equilíbrio em estratégias puras neste jogo. A diferença entre os dois valores indica que será necessário recorrer a estratégias mistas para que se estabeleça um equilíbrio e se determine o valor do jogo.

Como $maximin \neq minimax$, não há equilíbrio em estratégias puras.

Estratégia mista de J_1

Seja o vetor $x = (x_1, x_2)$ representando uma estratégia mista do jogador J_1, com a restrição de que $x_1 + x_2 = 1$, ou seja, a soma das probabilidades atribuídas às estratégias deve ser igual a 1. Assim, podemos reescrever x_1 como:

$$x_1 = 1 - x_2.$$

Consideremos o seguinte jogo de soma zero com matriz de payoffs para o jogador J_1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

onde:

- A primeira linha representa a estratégia pura A de J_1;
- A segunda linha representa a estratégia pura D de J_1;

- A primeira coluna corresponde à estratégia pura A de J_2;
- A segunda coluna corresponde à estratégia pura D de J_2.

Seja $x = (x_1, x_2)$ o vetor de probabilidades associado às estratégias mistas de J_1, com a restrição:

$$x_1 + x_2 = 1, \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - x_2.$$

O valor esperado do jogo para J_1 depende da estratégia escolhida por J_2:

- **Se J_2 jogar a primeira coluna (estratégia A):** O valor esperado para J_1 será:

$$V_A = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_2.$$

- **Se J_2 jogar a segunda coluna (estratégia D):** O valor esperado para J_1 será:

$$V_D = 3 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2.$$

Substituindo $x_1 = 1 - x_2$:

$$V_D = 3(1 - x_2) - x_2.$$

Como J_2 escolherá a coluna que *minimiza* o ganho de J_1, o valor do jogo V é dado por:

$$V = \min\Big(V_A,\ V_D\Big).$$

Substituindo as expressões obtidas:

$$V = \min\Big(x_2,\ 3(1 - x_2) - x_2\Big).$$

Essa equação expressa a relação entre a escolha de x_2 por J_1 e a resposta defensiva de J_2, de acordo com o Teorema Minimax.

Simplificando a expressão:

$$V = \min(x_2,\ 3 - 4x_2),$$

Para encontrar o ponto em que ambas as expressões se igualam, e assim obter a estratégia ótima de J_1, igualamos os termos:

$$x_2 = 3 - 4x_2,$$

$$5x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Portanto, a estratégia mista ótima para o jogador J_1 é:

$$x = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

O valor do jogo, dado por V, será:

$$V = x_2 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Esse resultado corresponde ao ganho esperado que o jogador J_1 consegue assegurar, ainda que o jogador J_2 adote a estratégia mais desfavorável possível para ele.

Exemplo 3: Duopólio e Guerra de Preços

Esse exemplo é diretamente inspirado na literatura de jogos aplicados à economia, especialmente na modelagem de competição de preços e guerra de preços. Duas empresas, A e B, escolhem entre preço alto (H) e preço baixo (L). A matriz de payoffs abaixo representa os ganhos (ou perdas) da empresa A, de acordo com as estratégias escolhidas por ambas:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A leitura da matriz deve ser feita da seguinte forma: as linhas correspondem às estratégias da empresa A e as colunas às estratégias da empresa B. A entrada A_{ij} representa o payoff da empresa A quando ela escolhe a estratégia i-ésima e a empresa B escolhe a estratégia j-ésima.

Tabela 2 – Matriz de payoffs entre as estratégias das empresas A e B

Empresa A / Empresa B	H (alto)	L (baixo)
H (alto)	3	-1
L (baixo)	5	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

- $A_{11} = 3$: ambas as empresas escolhem preço alto. A cooperação tácita resulta em lucro satisfatório para a empresa A, que recebe 3 unidades.
- $A_{12} = -1$: a empresa A mantém preço alto enquanto a concorrente B reduz seu preço. A empresa A perde mercado e tem prejuízo de 1 unidade.

- $A_{21} = 5$: a empresa A reduz o preço enquanto a concorrente mantém preço alto. A conquista grande parte do mercado e lucra 5 unidades.

- $A_{22} = 1$: ambas as empresas entram em guerra de preços, praticando preços baixos. A concorrência intensa reduz os lucros, e A recebe apenas 1 unidade.

Esse tipo de estrutura de jogo é típico de situações envolvendo guerra de preços, onde decisões estratégicas podem levar a equilíbrios cooperativos ou competitivos, com impactos diretos sobre os lucros das empresas.

Estratégias puras

Para compreender o comportamento da empresa A sob uma estratégia conservadora, podemos aplicar o critério maximin. Esse critério consiste em identificar, para cada linha da matriz (ou seja, para cada estratégia pura de A), o menor valor possível, assumindo que a empresa concorrente B tomará a decisão mais desfavorável para A. Em seguida, escolhe-se a estratégia cujo menor valor seja o maior possível:

$$\min(\text{linha } 1) = \min(3,\ -1) = -1, \quad \min(\text{linha } 2) = \min(5,\ 1) = 1,$$

$$\textit{maximin} = \max(-1,\ 1) = 1.$$

Isso significa que a melhor garantia de lucro para a empresa A, no pior cenário possível, ocorre quando ela escolhe a segunda estratégia (preço baixo), que assegura pelo menos 1 unidade de lucro, independentemente da escolha da empresa B. Da perspectiva do jogador adversário (empresa B), podemos aplicar o critério *minimax*, que consiste em, para cada coluna da matriz (cada estratégia pura de B), identificar o maior valor possível que A pode obter. Em seguida, busca-se minimizar esse valor máximo, ou seja, escolher a coluna que oferece o menor dos maiores ganhos para A:

$$\max(\text{coluna } 1) = \max(3,\ 5) = 5, \quad \max(\text{coluna } 2) = \max(-1,\ 1) = 1,$$

$$\min\max = \min(5,\ 1) = 1.$$

Esse resultado mostra que a empresa B, ao escolher a segunda estratégia (preço baixo), consegue limitar o lucro máximo da empresa A a 1 unidade. Essa é a melhor forma de defesa racional contra as possíveis escolhas de A.

Como maximin = minimax, há equilíbrio em estratégias puras. Ambas as empresas escolhem preço baixo (L).

Valor do jogo: $V = 1$.

Esse exemplo mostra como a estratégia minimax leva à escolha defensiva que minimiza as perdas em mercados altamente competitivos.

Em síntese, o estudo dos jogos de soma zero é fundamental para a compreensão e aplicação da estratégia minimax, fornecendo um modelo conceitual claro para decisões adversariais.

3.5 Análise e Justificativa da Aplicação no Ensino Básico

A introdução da estratégia *minimax* no ensino básico, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, pode ser uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento estratégico e da tomada de decisão fundamentada. Embora tradicionalmente associada a áreas como economia, computação e teoria matemática avançada, a Teoria dos Jogos oferece um potencial didático significativo quando adaptada à realidade escolar (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003).

Ao trabalhar com jogos estratégicos simples, como "pedra, papel e tesoura", ou versões simplificadas de jogos de tabuleiro e de decisão, é possível apresentar aos alunos noções intuitivas de conflito, estratégia, ganho e perda. A ideia de minimizar perdas e prever a ação do adversário promove o pensamento antecipatório e crítico, habilidades fundamentais no desenvolvimento cognitivo de jovens estudantes.

Além disso, o conceito de *minimax* pode ser explorado em atividades interdisciplinares, relacionando matemática com áreas como ética, filosofia e sociologia. Por exemplo, ao analisar dilemas estratégicos, os alunos podem ser convidados a refletir sobre escolhas racionais e suas consequências coletivas, enriquecendo o debate com temas como competição, cooperação e justiça (Skovsmose, 2001).

Do ponto de vista matemático, a estratégia *minimax* proporciona uma oportunidade valiosa para o desenvolvimento e a consolidação de diversos conteúdos essenciais, tais como:

- **Aplicação de matrizes e resolução de sistemas de equações lineares:** As matrizes de payoffs organizam as possíveis recompensas associadas às estratégias dos jogadores, enquanto a resolução de sistemas lineares permite determinar probabilidades ótimas para estratégias mistas.
- **Compreensão e utilização das noções de máximos e mínimos:** Essenciais na definição das estratégias maximin e minimax, que envolvem maximizar o ganho

mínimo garantido ou minimizar o ganho máximo do oponente, estabelecendo o equilíbrio do jogo.

- **Representação e análise de dados organizados em tabelas:** A utilização de tabelas torna explícita a relação entre escolhas estratégicas e payoffs, facilitando a visualização e compreensão dos resultados.

- **Resolução de problemas mediante métodos de tentativa e erro, análise combinatória e construção de algoritmos simples:** A busca por estratégias ótimas envolve a comparação sistemática de cenários e a análise das melhores respostas, processos que se assemelham a algoritmos e técnicas combinatórias básicas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) incentiva abordagens que promovam o letramento matemático, a modelagem e o uso da matemática na resolução de problemas contextualizados (Brasil, 2018). Nesse sentido, jogos e estratégias como o *minimax* atendem diretamente a esse objetivo, ao colocar o aluno como sujeito ativo na resolução de desafios estratégicos e lógicos.

Exemplos didáticos possíveis incluem:

- Propor jogos em grupo em que os alunos devem elaborar estratégias para vencer o oponente com base em tabelas de pagamento;

- Simulações econômicas em que dois grupos disputam recursos limitados;

- Atividades que envolvam a construção de algoritmos de decisão, de forma intuitiva e lúdica.

O ensino da estratégia *minimax*, quando bem contextualizado, torna-se não apenas viável, mas altamente desejável, por favorecer o desenvolvimento da autonomia intelectual, da argumentação lógica e da compreensão crítica de situações de escolha e conflito, competências essenciais para a formação cidadã dos alunos (Ponte et al., 2003; D'Ambrosio, 2001).

4 O modelo de Duopólio de Cournot

O comportamento estratégico entre empresas que competem por um mesmo mercado é tema central da Teoria dos Jogos e da microeconomia moderna. Amplamente discutido em na obra da literatura econômica de (Tirole, 1988). Dentre os diversos modelos que buscam representar esse tipo de interação, destaca-se o modelo de duopólio formulado por Antoine Augustin Cournot, em 1838, como uma das primeiras tentativas de aplicar ferramentas matemáticas à análise da competição entre firmas. Embora simples em sua estrutura, o modelo fornece uma base sólida para compreender decisões interdependentes, oferecendo uma ponte entre a economia, a matemática e a teoria da decisão. Neste capítulo, será apresentado o modelo de Cournot, explorando desde seus fundamentos conceituais até sua construção matemática e representação como jogo estratégico. Por fim, será discutido o potencial didático desse modelo no contexto do Ensino Médio.

4.1 Conceito de Duopólio e Competição entre Firmas

O duopólio é uma estrutura de mercado composta por apenas duas firmas que produzem bens substitutos próximos ou homogêneos. Essa configuração representa uma forma particular de concorrência imperfeita, em que cada empresa influencia significativamente o comportamento da outra, especialmente em termos de produção e preços.

Ao contrário da concorrência perfeita, onde as firmas são tomadoras de preço, ou do monopólio, onde há domínio total de uma única firma, o duopólio se caracteriza por uma interdependência estratégica entre as empresas. O modelo desenvolvido por Antoine Augustin Cournot em 1838 representa uma das primeiras tentativas de formalização dessa interação econômica.

Segundo (Tirole, 1988), Cournot introduziu uma abordagem inovadora ao modelar matematicamente o comportamento das firmas, assumindo que cada uma escolhe a quantidade a ser produzida com base na expectativa de que a produção da rival permanecerá fixa.

4.2 Construção Matemática do Modelo

Segundo(Gibbons, 1994), no modelo clássico de duopólio de Cournot, duas firmas produzem um bem homogêneo, e a quantidade total ofertada no mercado é dada por:

$$Q = q_1 + q_2,$$

em que q_1 e q_2 são as quantidades produzidas pelas firmas 1 e 2, respectivamente.

A demanda do mercado é expressa por uma função de demanda inversa linear:

$$P(Q) = a - bQ = a - b(q_1 + q_2),$$

onde $a > 0$ representa o preço máximo que o consumidor estaria disposto a pagar, e $b > 0$ indica a sensibilidade do preço à quantidade ofertada.

Considerando que ambas as firmas possuem custos marginais constantes iguais a c, o lucro da firma 1 é:

$$\pi_1(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1,$$

e, de forma análoga, o lucro da firma 2 é:

$$\pi_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2.$$

Para maximizar o lucro, cada firma resolve seu problema de otimização. A condição de primeira ordem da firma 1 é:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0,$$

e para a firma 2:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2bq_2 - bq_1 - c = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos o ponto de equilíbrio de Cournot:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3b},$$

com a quantidade total no mercado:

$$Q^* = \frac{2(a - c)}{3b},$$

e o preço de equilíbrio:

$$P^* = a - bQ^* = \frac{a + 2c}{3}.$$

4.3 Decisões Estratégicas no Duopólio de Cournot

Neste trecho, exploramos o modelo clássico de duopólio de Cournot, no qual duas firmas competem estrategicamente escolhendo simultaneamente as quantidades que irão produzir. Cada firma considera o impacto de sua própria produção sobre o preço de mercado e também leva em conta a reação da firma concorrente. O produto é homogêneo, e as firmas possuem custos marginais constantes, porém distintos. O objetivo é determinar as quantidades q_1 e q_2, que maximiza o lucro de cada firma dadas as escolhas da concorrente.

4.3.1 Hipóteses do modelo

- O bem é homogêneo, os produtos oferecidos pelas duas empresas são idênticos, sem diferenciação, sendo substitutos perfeitos. A competição ocorre pela quantidade produzida, que afeta o preço de mercado.
- A função de demanda inversa é linear, com o preço P dependendendo linearmente da soma das quantidades produzidas q_1 e q_2: $P = a - b(q_1 + q_2)$, com $a > 0$ e $b > 0$. Essa função é chamada de demanda inversa porque expressa o preço em função da quantidade, invertendo a forma tradicional de demanda que expressa quantidade em função do preço.
- As firmas escolhem simultaneamente suas quantidades, antecipando o efeito de suas decisões sobre o preço e sobre a reação da concorrente.
- Custos marginais constantes e distintos: c_1 para a firma 1 e c_2 para a firma 2.

4.3.2 Funções de lucro

A receita da firma 1 é dada por $R_1 = P \cdot q_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1$. O custo total é $C_1 = c_1 q_1$, e portanto o lucro é:

$$\pi_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - c_1 q_1,$$

Derivando em relação a q_1 e aplicando a condição de primeira ordem para máximo:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{1}{2} q_2.$$

De forma análoga, para a firma 2:

$$\pi_2 = (a - b(q_1 + q_2))q_2 - c_2 q_2 \Rightarrow \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2bq_2 - bq_1 - c_2 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{1}{2} q_1.$$

4.3.3 Equilíbrio de Cournot com custos diferentes

Resolvendo o sistema de equações formado pelas curvas de reação das duas firmas:

$$q_1 = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{1}{2} q_2, \tag{4.1}$$
$$q_2 = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{1}{2} q_1. \tag{4.2}$$

Substituindo (4.1) em (4.2):

$$q_1 = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a - c_2}{2b} - \frac{1}{2} q_1\right),$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$q_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \quad q_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}.$$

4.3.4 Preço e quantidade de equilíbrio

A quantidade total de equilíbrio é:

$$Q^* = q_1 + q_2 = \frac{2a - c_1 - c_2}{3b}.$$

E o preço de equilíbrio é obtido substituindo Q^* na função de demanda:

$$P^* = a - bQ^* = a - b \cdot \frac{2a - c_1 - c_2}{3b} = \frac{a + c_1 + c_2}{3}.$$

4.4 Observações

- Se $c_1 = c_2 = c$, então $q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}$: equilíbrio simétrico.
- Se $c_1 < c_2$, então $q_1 > q_2$: a firma mais eficiente produz mais.
- O modelo captura comportamento estratégico: cada firma ajusta sua produção em resposta à produção esperada da outra.

4.5 Exemplo Numérico no Modelo de Cournot

A seguir, apresentamos um exemplo numérico baseado no modelo de duopólio de Cournot com comportamento estratégico e custos marginais distintos para as duas firmas. Utilizamos os seguintes parâmetros:

- $a = 100$: intercepto da demanda inversa;
- $b = 1$: coeficiente angular da demanda inversa;
- $c_1 = 20$: custo marginal da firma 1;
- $c_2 = 30$: custo marginal da firma 2.

4.5.1 Cálculo das quantidades de equilíbrio

As quantidades de equilíbrio para cada firma no modelo clássico de Cournot com custos marginais distintos são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$q_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \qquad q_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}.$$

Substituindo os valores fornecidos:

$$q_1 = \frac{100 - 2(20) + 30}{3(1)} = \frac{100 - 40 + 30}{3} = \frac{90}{3} = 30,$$
$$q_2 = \frac{100 - 2(30) + 20}{3(1)} = \frac{100 - 60 + 20}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Portanto, no equilíbrio de Cournot, a firma 1 produzirá 30 unidades e a firma 2 produzirá 20 unidades.

4.5.2 Quantidade total e preço de equilíbrio

A quantidade total ofertada no mercado será:

$$Q^* = q_1 + q_2 = 30 + 20 = 50.$$

O preço de equilíbrio é obtido substituindo Q^* na função de demanda inversa:

$$P^* = a - bQ^* = 100 - 1 \cdot 50 = 50.$$

4.5.3 Lucros Individuais

Com o preço de equilíbrio $P^* = 50$, os lucros de cada firma são dados por:

$$\pi_1 = (P^* - c_1) \cdot q_1 = (50 - 20) \cdot 30 = 30 \cdot 30 = 900.$$
$$\pi_2 = (P^* - c_2) \cdot q_2 = (50 - 30) \cdot 20 = 20 \cdot 20 = 400.$$

4.6 Exemplo Numérico sem Uso de Derivadas

Neste exemplo, resolveremos o modelo de duopólio de Cournot utilizando apenas propriedades algébricas das funções quadráticas, sem fazer uso de derivadas. Este procedimento é acessível a estudantes que dominam funções do segundo grau, o que permite sua aplicação didática em turmas do Ensino Médio ou Superior inicial.

4.6.1 Parâmetros do modelo

- Demanda inversa: $P = 100 - (q_1 + q_2)$,
- Custo marginal da Firma 1: $c_1 = 20$,
- Custo marginal da Firma 2: $c_2 = 30$.

Cada firma escolhe sua quantidade q_i para maximizar seu lucro, dado o nível de produção da concorrente. Utilizaremos a forma padrão da função do segundo grau para encontrar os pontos de máximo (vértices).

4.6.2 Função de lucro da firma 1

A receita da Firma 1 é o preço de mercado multiplicado por sua quantidade:

$$\pi_1(q_1, q_2) = (100 - (q_1 + q_2))q_1 - 20q_1 = -q_1^2 + (80 - q_2)q_1.$$

Essa é uma função quadrática em q_1 com concavidade voltada para baixo. O valor de q_1 que maximiza o lucro para um dado q_2 é obtido pela fórmula do vértice:

$$q_1^* = \frac{-(80 - q_2)}{2(-1)} = \frac{80 - q_2}{2}.$$

Esta é a **curva de reação da Firma 1**, que pode ser visualizada na figura 4.

4.6.3 Função de lucro da firma 2

De forma análoga, a função de lucro da Firma 2 é:

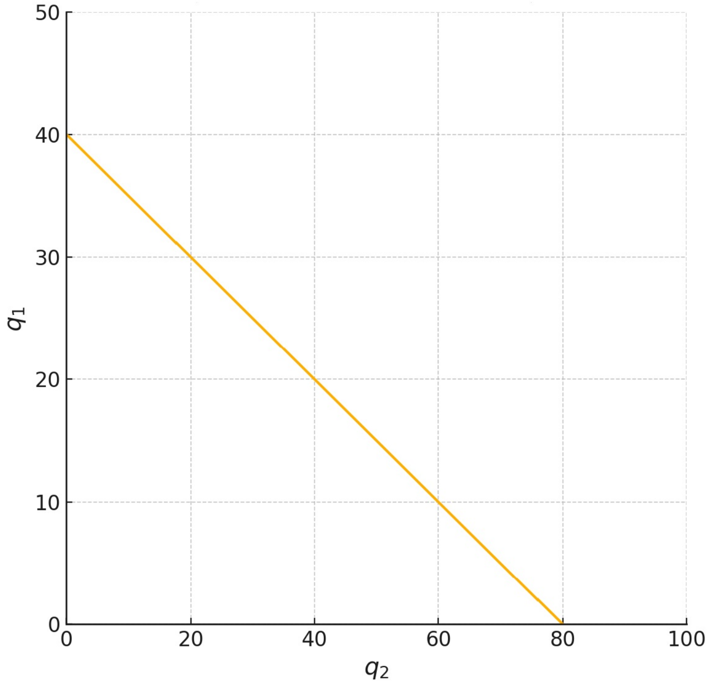
$$\pi_2(q_1, q_2) = (100 - (q_1 + q_2))q_2 - 30q_2 = -q_2^2 + (70 - q_1)q_2.$$

Também é uma função quadrática em q_2, e seu ponto de máximo é:

$$q_2^* = \frac{70 - q_1}{2}.$$

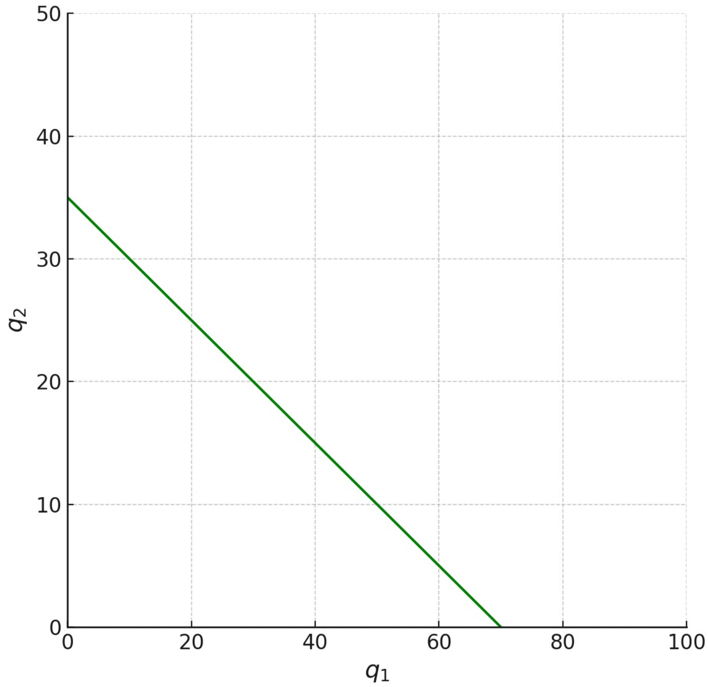
Esta é a **curva de reação da Firma 2** que pode ser visualizada na figura 5.

Figura 4 – Curva de reação da firma 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5 – Curva de reação da firma 2



Fonte: Elaborado pelo autor

4.6.4 Resolução do sistema das curvas de reação

Resolvemos o sistema abaixo para encontrar o equilíbrio de Cournot:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{80 - q_2}{2}, \\ q_2 = \dfrac{70 - q_1}{2}. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira:

$$q_1 = \frac{80 - \left(\frac{70 - q_1}{2}\right)}{2},$$

$$q_1 = \frac{80 - 35 + \frac{q_1}{2}}{2} = \frac{45 + \frac{q_1}{2}}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$2q_1 = 45 + \frac{q_1}{2}.$$

Multiplicando ambos os lados por 2 novamente:

$$4q_1 = 90 + q_1 \Rightarrow 3q_1 = 90 \Rightarrow q_1^* = 30.$$

Substituindo em $q_2 = \dfrac{70 - q_1}{2}$:

$$q_2^* = \frac{70 - 30}{2} = 20.$$

4.6.5 Resultados do Equilíbrio

- Quantidade produzida pela Firma 1: $q_1^* = 30$,
- Quantidade produzida pela Firma 2: $q_2^* = 20$,
- Quantidade total no mercado: $Q = q_1 + q_2 = 50$,
- Preço de mercado: $P = 100 - Q = 50$.

4.6.6 Lucros no equilíbrio

- Lucro da Firma 1:

$$\pi_1 = (P - c_1)q_1 = (50 - 20) \cdot 30 = 30 \cdot 30 = 900.$$

- Lucro da Firma 2:

$$\pi_2 = (P - c_2)q_2 = (50 - 30) \cdot 20 = 20 \cdot 20 = 400.$$

Este exemplo demonstra que o equilíbrio de Cournot pode ser obtido por meio de álgebra básica, utilizando apenas a fórmula do vértice para funções quadráticas. Isso permite sua aplicação didática sem a necessidade de cálculo diferencial, o que favorece a abordagem em contextos educacionais introdutórios.

4.6.7 Interpretação econômica

Esse exemplo numérico mostra como os custos marginais distintos afetam as decisões de produção das firmas em um duopólio de Cournot. A firma 1, com custo marginal menor ($c_1 = 20$), produz uma quantidade maior ($q_1 = 30$) e obtém um lucro superior ($\pi_1 = 900$) em comparação à firma 2, que possui um custo marginal mais elevado ($c_2 = 30$), produz menos ($q_2 = 20$) e obtém menor lucro ($\pi_2 = 400$).

Além disso, o preço de equilíbrio $P^* = 50$ reflete o resultado do comportamento estratégico das firmas, onde cada uma escolhe sua quantidade maximizando o lucro dado o comportamento da concorrente.

Tabela 3 – Exemplo Numérico do Equilíbrio de Cournot com Custos Marginais Diferenciados

Variável	**Valor**
q_1	30
q_2	20
$Q^* = q_1 + q_2$	50
P^*	50
π_1	900
π_2	400

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.7 Representação como um Jogo Estratégico

O modelo de Cournot pode ser interpretado como um jogo estratégico em que:

- Os **jogadores** são as duas firmas participantes do mercado;
- As **ações** disponíveis para cada jogador são as quantidades q_1 e q_2 que cada um decide produzir;
- Os **pagamentos** (ou recompensas) correspondem aos lucros π_1 e π_2 de cada firma;

- O **equilíbrio** ocorre quando nenhuma firma deseja alterar unilateralmente sua decisão de produção, dado o comportamento da concorrente este é o *Equilíbrio de Nash* no contexto de Cournot.

Assim, o modelo de Cournot se encaixa na estrutura dos jogos simultâneos de soma não zero, nos quais a decisão de cada agente impacta o resultado do outro. Essa representação é útil para ilustrar os conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos, como estratégia dominante, interdependência e racionalidade.

4.8 Possibilidade de Uso no Ensino Médio

A adaptação do modelo de Cournot para o contexto escolar, especialmente no Ensino Médio, pode ser uma ferramenta eficaz para desenvolver competências matemáticas e estratégicas nos alunos. Por meio de simulações de mercado e jogos entre duplas ou grupos, os estudantes podem compreender noções de otimização, sistemas lineares, funções e até mesmo de derivadas, caso estejam em séries mais avançadas.

Além disso, o modelo favorece discussões interdisciplinares envolvendo matemática, economia e ética, promovendo habilidades como argumentação lógica, tomada de decisão e análise de consequências. Conforme destaca Kasper (2016, p. 52), "a aplicação da Teoria dos Jogos no ensino permite desenvolver habilidades analíticas e reflexivas por meio da simulação de conflitos e cooperação".

Como sugestão prática, pode-se propor um jogo em sala de aula no qual cada grupo representa uma firma que decide quanto produzir, observando o efeito de suas decisões no "mercado" simulado pelo professor ou por meio de planilhas eletrônicas. Ao final da atividade, podem ser discutidos os conceitos de equilíbrio, lucro, competição e racionalidade estratégica.

O modelo de duopólio de Cournot, além de ser fundamental para a compreensão de mercados não competitivos, oferece uma estrutura matemática acessível e rica para aplicação educacional. Sua formalização como jogo estratégico permite abordar a Teoria dos Jogos de forma contextualizada, favorecendo a aprendizagem ativa, crítica e interdisciplinar dos estudantes.

5 Integração entre a Estratégia Maximin e o Modelo de Duopólio de Cournot

Neste capítulo, opta-se por utilizar a estratégia **Maximin** em vez do tradicional conceito de **Minimax** para a análise estratégica dentro do modelo de duopólio de Cournot. Essa escolha está fundamentada nas características específicas do contexto econômico e estratégico estudado.

Enquanto o conceito de *Minimax* é clássico em jogos de soma zero, onde um jogador busca minimizar a máxima perda que o adversário pode impor, a estratégia *Maximin* se mostra mais adequada para situações de competição econômica, em que os agentes buscam maximizar seu ganho mínimo garantido diante da incerteza sobre as ações do concorrente.

No contexto do duopólio de Cournot, os competidores tomam decisões simultâneas sobre a quantidade a produzir, visando maximizar seus lucros diante de um cenário estratégico em que a escolha do rival é incerta. Assim, a estratégia Maximin, que consiste em maximizar o pior resultado possível (lucro mínimo), reflete o comportamento racional de agentes econômicos avessos ao risco e que buscam garantir um patamar mínimo de retorno independentemente da ação do concorrente.

Segundo (Myerson, 1991), o conceito Maximin é amplamente aplicado em jogos não cooperativos para modelar decisões sob incerteza, especialmente em ambientes onde a minimização da perda máxima não é o objetivo direto, mas sim a maximização do ganho mínimo. Já (Osborne; Rubinstein, 1994) destacam que a estratégia Maximin é uma ferramenta robusta para análise de equilíbrio em situações de competição econômica, como oligopólios.

Além disso, no duopólio de Cournot, a estrutura do jogo não é de soma zero, o que implica que o Minimax originalmente concebido para jogos de soma zero não representa de forma adequada a interação estratégica entre as empresas. Portanto, a estratégia Maximin oferece um arcabouço mais realista para capturar a busca por segurança econômica em um ambiente competitivo.

5.1 Integração Teórica entre Maximin e Cournot

A Teoria dos Jogos fornece um aparato conceitual poderoso para a modelagem de decisões estratégicas entre agentes racionais. A estratégia Maximin, tradicionalmente aplicada a jogos de soma zero, pode ser reinterpretada no contexto do modelo de duopólio de Cournot, que é um jogo de soma não zero. A essência do Maximin, maximizar o menor ganho possível, se adapta bem a cenários nos quais empresas adotam posturas defensivas diante da incerteza sobre o comportamento da concorrente.

Essa integração entre Maximin e Cournot permite examinar de forma mais realista o comportamento das firmas em contextos oligopolistas, particularmente quando se considera a ausência de informação perfeita ou a possibilidade de ações adversas, conforme discutido por (Fudenberg; Tirole, 1991), que destaca a importância de estratégias prudentes em jogos econômicos com incertezas e competição estratégica.

5.2 Formalização da Estratégia Maximin

A estratégia Maximin para a firma i pode ser formalmente definida como a escolha da quantidade de produção q_i que maximiza o lucro mínimo possível, considerando que a concorrente j adotará a estratégia q_j que resulta no pior cenário para i. Assim, tem-se a expressão matemática:

$$\max_{q_i \in Q_i} \left(\min_{q_j \in Q_j} \pi_i(q_i, q_j) \right),$$

onde $\pi_i(q_i, q_j)$ representa a função lucro da firma i, enquanto Q_i e Q_j são os conjuntos de estratégias disponíveis para as firmas i e j, respectivamente.

Essa formalização está fortemente fundamentada no Teorema 3.1, que assegura a existência de um valor de segurança em jogos de soma zero, no qual as estratégias Maximin e Minimax coincidem, garantindo um equilíbrio de Nash.

Entretanto, em contextos como o duopólio, que configuram jogos de soma não zero, as propriedades garantidas pelo Teorema do Minimax não se aplicam diretamente. Nesses casos, a estratégia Maximin representa uma abordagem conservadora de tomada de decisão, na qual a firma busca proteger-se contra o pior cenário possível imposto pela concorrente, sem necessariamente garantir um equilíbrio no sentido clássico da teoria dos jogos.

5.3 Aplicação da Estratégia Maximin no Modelo de Cournot

Consideremos um duopólio clássico, com a seguinte estrutura de demanda:

$$P = a - b(q_1 + q_2).$$

As funções de lucro para as firmas A e B são:

$$\pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - c_1 q_1,$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2))q_2 - c_2 q_2.$$

A adoção do critério Maximin implica que cada firma irá escolher q_i para garantir o maior lucro possível no pior cenário, ou seja, quando a concorrente adota a estratégia mais prejudicial a ela.

5.4 Justificativa para o Uso do Maximin

O *Teorema Minimax*, resultado fundamental na Teoria dos Jogos, estabelece que, sob certas condições, é possível inverter a ordem das operações de maximização e minimização sobre as estratégias dos jogadores, sem alteração do valor resultante do jogo. De forma formal, tem-se que

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Para que a igualdade apresentada no Teorema Minimax seja válida, é necessário que os conjuntos X e Y sejam convexos e compactos, e que a função $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ seja contínua, convexa em y para cada x fixo, e côncava em x para cada y fixo. Essas condições, que garantem a existência do valor de equilíbrio e de estratégias ótimas para ambos os jogadores, encontram-se explicitamente detalhadas na demonstração do Teorema 3.1, conforme apresentado em (Sartini et al., 2004).

Temos que $f(x, y)$ denota a função payoff dependente das estratégias x e y dos respectivos jogadores. Nesta formulação, o produto matricial tradicional $x^\top Ay$ é substituído por uma função genérica $f(x, y)$, permitindo uma abordagem mais ampla e conceitual.

Tal igualdade assegura a existência de um valor de equilíbrio para o jogo, conferindo a cada jogador a possibilidade de adotar uma estratégia que maximize seu ganho mínimo garantido, independentemente das ações do oponente.

Neste trabalho, opta-se pela utilização desta forma simplificada do Teorema 3.1, privilegiando sua aplicação conceitual, sem adentrar nas demonstrações técnicas, tendo em vista o foco na integração da estratégia Maximin ao modelo de Duopólio de Cournot.

No entanto, o modelo de Cournot não é um jogo de soma zero. Logo, a equivalência entre as estratégias não se sustenta. A aplicação do Maximin, nesse contexto, é justificada por:

- Incerteza sobre as ações da firma concorrente, as empresas escolhem simultaneamente suas quantidades sem conhecer previamente as decisões do rival, o que exige uma postura defensiva para garantir um ganho mínimo;

- Ausência de cooperação ou comunicação entre os agentes, a competição ocorre de forma não cooperativa, tornando necessária a adoção de estratégias individuais que considerem o pior cenário possível.

- Preferência por estratégias conservadoras que garantam lucros mínimos aceitáveis.

Assim, o uso do Maximin é tecnicamente mais preciso que o Minimax neste tipo de jogo.

5.5 Exemplo Numérico e Simulação Maximin

Neste exemplo, aplicamos a estratégia **Maximin** no modelo de duopólio de Cournot com comportamento conservador. A simulação serve para ilustrar, de maneira prática, como a tomada de decisão baseada no pior cenário possível influencia o nível de produção das firmas em ambientes de incerteza. Ao adotar essa abordagem, cada firma busca assegurar um resultado mínimo aceitável, independentemente das ações do concorrente. Essa postura tende a reduzir os riscos de perdas significativas, ainda que possa implicar renúncia a ganhos mais elevados em cenários favoráveis. Além disso, o uso da estratégia Maximin evidencia o caráter defensivo da decisão, reforçando sua aplicabilidade em situações nas quais a informação disponível é limitada e as condições de mercado apresentam elevada imprevisibilidade.

5.5.1 Parâmetros do modelo

Adotamos os seguintes valores para os parâmetros da demanda e custos:

- $a = 80$: intercepto da demanda;
- $b = 1$: coeficiente da função de demanda linear;
- $c_1 = c_2 = 20$: custo marginal constante para ambas as firmas;
- Preço: $P = 80 - (q_1 + q_2)$;
- Faixa de produção: $q_1, q_2 \in \{0, 5, 10, ..., 40\}$.

A função de lucro da Firma A é dada por:

$$\pi_1(q_1, q_2) = (80 - (q_1 + q_2))q_1 - 20q_1.$$

Esta função reflete a receita total da firma subtraída de seus custos marginais, assumindo que o preço de mercado depende da produção total das duas empresas.

Tabela 4 – Valores da função payoff para combinações de q_1 e q_2

q_1/q_2	0	5	10	15	20	25	30	35	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	150	125	100	75	50	25	0	-25	-50
10	400	350	300	250	200	150	100	50	0
15	675	600	525	450	375	300	225	150	75
20	960	860	760	660	560	460	360	260	160
25	1250	1125	1000	875	750	625	500	375	250
30	1440	1290	1140	990	840	690	540	390	240
35	1575	1400	1225	1050	875	700	525	350	175
40	1600	1400	1200	1000	800	600	400	200	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

5.5.2 Procedimento da simulação

A seguir, apresentamos o procedimento detalhado para aplicar a estratégia Maximin à Firma A:

1. **Fixamos valores para** q_1 dentro do intervalo definido:
   $q_1 \in \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$.
2. **Para cada valor de** q_1, variamos q_2 de forma análoga e calculamos o lucro $\pi_1(q_1, q_2)$.
3. **Para cada linha da matriz (com** q_1 **fixo)**, identificamos o **menor lucro possível**, ou seja, assumimos que a Firma B escolherá a quantidade q_2 que mais prejudica a Firma A.
4. **Selecionamos o valor de** q_1 que maximiza o menor lucro encontrado em cada linha. Este é o ponto Maximin da Firma A.

A tabela a seguir apresenta os valores de lucro $\pi_1(q_1, q_2)$ para diferentes combinações de produção:

5.5.3 Cálculo da estratégia maximin

A seguir, calculamos o menor valor de cada linha (menor lucro para cada q_1):

- $q_1 = 0$: menor lucro = 0,
- $q_1 = 5$: menor lucro = -50,
- $q_1 = 10$: menor lucro = 0,
- $q_1 = 15$: menor lucro = 75,

- $q_1 = 20$: menor lucro = 160,
- $q_1 = 25$: menor lucro = 250,
- $q_1 = 30$: menor lucro = 240,
- $q_1 = 35$: menor lucro = 175,
- $q_1 = 40$: menor lucro = 0.

Selecionamos o valor de q_1 que maximiza esse menor lucro:

$$\max\{0, -50, 0, 75, 160, \mathbf{250}, 240, 175, 0\} = \mathbf{250} \quad \text{em} \quad q_1 = \mathbf{25}.$$

Portanto, a **estratégia Maximin** da Firma A é produzir $q_1 = 25$ unidades.

Esse resultado mostra que, mesmo em um ambiente competitivo, uma firma pode adotar uma estratégia conservadora e garantir um nível de lucro mínimo diante da pior decisão possível da concorrente. A abordagem maximin, portanto, privilegia a segurança em contextos de incerteza ou risco estratégico elevado.

5.5.4 Comparação com o equilíbrio de Cournot

No equilíbrio de Cournot tradicional:

$$q_i^* = \frac{a - c_i}{3b} = \frac{80 - 20}{3} = 20.$$

Observa-se que o valor da estratégia maximin ($q_1 = 25$) é superior ao do equilíbrio de Cournot ($q_i^* = 20$), o que reflete o caráter conservador do maximin. Essa abordagem desconsidera o ajuste estratégico mútuo entre as firmas, característica central do modelo de Cournot, no qual cada agente define sua produção assumindo que o outro também agirá de forma racional e otimizadora. Enquanto o maximin se concentra na segurança frente ao pior cenário, o equilíbrio de Cournot considera a interdependência das decisões estratégicas.

5.6 Discussão Didática e Aplicabilidade

A aplicação do Maximin ao modelo de Cournot possui elevado valor pedagógico, permitindo discutir com os estudantes aspectos fundamentais, tais como:

- Tomada de decisão em contextos de incerteza;
- Segurança versus otimalidade econômica;

- Construção de tabelas de payoff e interpretação gráfica;
- Comparação entre estratégias clássicas (Cournot) e conservadoras (Maximin).

Além disso, o exercício estimula habilidades matemáticas como interpolação de dados, uso de planilhas e compreensão de funções quadráticas. Segundo Kasper (2017, p. 48), "a Teoria dos Jogos oferece instrumental para o desenvolvimento do pensamento matemático por meio de um aprendizado ativo, e que incentive os alunos a se tornarem protagonistas de seu próprio processo educacional".

Dessa forma, a utilização do modelo Maximin integrado ao Duopólio de Cournot configura-se não apenas como uma ferramenta matemática, mas também como um recurso pedagógico capaz de fomentar o pensamento crítico e estratégico dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

5.7 Proposta de Atividade Contextualizada

A proposta a seguir consiste em um exemplo numérico prático que permite a simulação da estratégia Maximin no contexto do modelo de duopólio de Cournot. Ao construir a matriz de lucros para diferentes combinações de produção das duas empresas, é possível identificar o menor lucro associado a cada decisão e determinar a estratégia Maximin, que maximiza esse valor mínimo. Essa abordagem facilita a compreensão dos conceitos estratégicos e econômicos envolvidos, possibilitando também a comparação dos resultados obtidos com o equilíbrio tradicional de Cournot.

Situação-problema: Duas empresas, Alfa e Beta, vendem galões de água em um mercado local. Ambas têm custos marginais iguais ($c = 20$) e capacidade máxima de produção de 40 unidades. O preço de mercado depende da produção total, dada por $P = 80 - (q_1 + q_2)$.

Tarefas:

1. Construir a matriz de lucros da firma Alfa, considerando $q_1, q_2 \in \{0, 5, 10, \ldots, 40\}$.
2. Identificar o menor lucro em cada linha.
3. Determinar o valor de q_1 que maximiza o menor lucro encontrado (estratégia Maximin).
4. Repetir o procedimento para a firma Beta.
5. Comparar os resultados com o equilíbrio de Cournot.
6. Discutir as implicações econômicas e estratégicas de cada abordagem.

5.8 Interpretação da Estratégia

A distinção entre Maximin e Minimax é essencial para a correta aplicação da Teoria dos Jogos. No modelo de Cournot, um jogo de soma não zero, a estratégia Maximin é mais apropriada para representar decisões cautelosas. A aplicação desse conceito amplia as possibilidades analíticas e didáticas do modelo, contribuindo para uma compreensão mais rica e realista das decisões econômicas sob incerteza. Nesse sentido, (Osborne; Rubinstein, 1994) destacam que a estratégia Maximin busca assegurar o melhor resultado possível frente ao pior cenário, servindo como um instrumento valioso para decisões conservadoras em ambientes hostis ou incertos.

Essa integração oferece uma abordagem interdisciplinar valiosa, conectando economia, matemática e teoria da decisão. Ao permitir simulações práticas, fortalece o ensino da matemática aplicada e promove o desenvolvimento do raciocínio estratégico nos estudantes.

6 Aplicação Didática: Sequência de Ensino e Análise de Recurso

Neste capítulo, apresentamos uma proposta didática estruturada para o ensino dos conceitos integrados da estratégia Maximin e do modelo de duopólio de Cournot. A sequência de ensino foi desenvolvida visando facilitar a compreensão dos alunos sobre tomada de decisão estratégica em contextos econômicos, utilizando uma abordagem ativa e contextualizada. Além disso, discutimos a análise do recurso didático elaborado, considerando aspectos pedagógicos, matemáticos e tecnológicos que potencializam a aprendizagem.

A fundamentação teórica para a construção da sequência de ensino encontra respaldo em (Kasper, 2017), que ressalta que a Teoria dos Jogos pode ser utilizada como ferramenta para promover o pensamento crítico e a tomada de decisões em situações de incerteza, além de favorecer um aprendizado ativo e contextualizado, aproximando os conteúdos matemáticos da realidade dos estudantes.

Este capítulo está organizado em duas partes principais: a primeira apresenta a sequência de ensino detalhada, incluindo objetivos, atividades, recursos e estratégias de avaliação; a segunda parte realiza uma análise crítica do recurso didático aplicado, identificando suas potencialidades e limitações no contexto escolar.

6.1 Alinhamento com a BNCC e Justificativa Pedagógica

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que o ensino de Matemática deve promover o desenvolvimento do pensamento lógico, da resolução de problemas, da modelagem e da argumentação matemática. Nesse contexto, a Teoria dos Jogos, por meio do modelo de Cournot e da estratégia Minimax, constitui uma abordagem inovadora que articula conteúdos matemáticos com situações reais de tomada de decisão.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018), no Ensino Médio, a área da Matemática e suas Tecnologias deve:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca desoluções (Brasil, 2018, p. 267).

Nesse cenário, propor atividades que envolvam decisões estratégicas entre empresas simula situações reais de mercado e mobiliza conhecimentos como funções do 2º grau, sistemas de equações, interpretação de tabelas e raciocínio lógico. Ao utilizar o modelo de Cournot com funções quadráticas (sem recorrer a derivadas), cria-se uma ponte direta entre os conteúdos da Matemática escolar e a modelagem de contextos econômicos.

6.2 Planejamento de Aulas com Base em Competências

A proposta didática está alinhada às seguintes competências gerais e específicas da BNCC:

- **Competência específica 3**: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 535).
- **Habilidade (EM13MAT301)**: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 536).
- **Habilidade (EM13MAT302)**: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 536).

6.3 Sequência de Ensino Proposta

Tema:

Estratégias de produção e competição entre empresas: uma abordagem matemática.

Ano/Série:

2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Duração:

5 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Compreender o conceito de duopólio e o modelo de Cournot.
- Explorar a noção de equilíbrio por meio de funções quadráticas.
- Resolver problemas com tabelas, gráficos e sistemas lineares.
- Aplicar a estratégia Minimax em decisões econômicas simuladas.
- Analisar estratégias racionais em ambientes competitivos.

Etapas da Sequência:

1. **Aula – Introdução à competição e tomada de decisão:** Discussão inicial sobre tipos de mercado (concorrência, monopólio, duopólio). Introdução à ideia de que empresas fazem escolhas estratégicas sobre produção. Levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos sobre funções e gráficos.

2. **Aula – Situação contextualizada e simulação com funções:** Apresentação do problema: duas empresas competem em um mercado. Os alunos, organizados em grupos, representam cada firma. Comparam tabelas de lucros para diferentes quantidades produzidas. Construção conjunta das funções de lucro e identificação do ponto de máximo por meio do vértice da parábola, sem uso de derivadas.

3. **Aula – Estratégia Minimax e análise de decisão:** Exploração do conceito de "escolha segura no pior cenário". Aplicação em jogos simples (pedra-papel-tesoura) e transição para o modelo de empresas. Os grupos comparam estratégias, constroem matrizes de lucros e identificam estratégias minimax.

4. **Aula – Estratégia Maximin e simetria da decisão:** Revisão dos conceitos de minimax vistos na aula anterior, agora sob a ótica do jogador que busca maximizar seu ganho mínimo garantido (estratégia Maximin). Comparação entre as estratégias Minimax e Maximin em diferentes jogos simples. Aplicação da lógica do Maximin no contexto das empresas, refletindo sobre o ponto de vista do segundo jogador (concorrente). Ênfase na ideia de simetria estratégica e na identificação de pontos de equilíbrio nos jogos de soma zero.

5. **Aula – Discussão crítica e interdisciplinaridade:** Análise comparativa entre o equilíbrio de Cournot (cooperação racional) e a estratégia Maximin (precaução individual). Discussão sobre qual estratégia leva a maior lucro ou maior segurança. Reflexão final: como a Matemática pode apoiar decisões na vida real.

Produto final sugerido

Como forma de consolidar os conhecimentos desenvolvidos ao longo da sequência, sugere-se que os alunos elaborem um produto final que envolva:

- **Construção das curvas de reação**: Utilizar as funções de lucro e os valores fornecidos para determinar, via maximização, as curvas de reação de cada empresa. Em seguida, representar graficamente essas curvas em um mesmo plano cartesiano. Indicar o ponto de interseção das curvas, que corresponde ao equilíbrio de Cournot. Identificar no gráfico as quantidades produzidas por cada empresa nesse equilíbrio. Nomear adequadamente os eixos, definir escalas e inserir legenda.
- **Cálculo do equilíbrio de Cournot:** Resolver o sistema de equações obtido pelas curvas de reação, determinando q_1^* e q_2^*. Calcular o preço de equilíbrio P^*. Determinar o lucro de cada empresa no equilíbrio.
- **Aplicação da estratégia Maximin:** Considerando um cenário conservador, aplicar a estratégia Maximin às funções de lucro. Definir qual quantidade de produção cada empresa escolheria de modo a maximizar seu lucro mínimo possível. Comparar o resultado com o equilíbrio de Cournot
- **Análise e apresentação:** Preparar uma apresentação oral contendo: Justificativa matemática dos cálculos realizados; Interpretação econômica dos resultados; Comparação entre as quantidades obtidas no equilíbrio de Cournot e pela estratégia Maximin; Discussão sobre o impacto da escolha de estratégia nas decisões de produção.

Problema Proposto

Duas empresas competem em um mercado cuja função de demanda inversa é:

$$P = 120 - 2(q_1 + q_2).$$

em que:

- P representa o preço de mercado;
- q_1 e q_2 são as quantidades produzidas pelas empresas 1 e 2, respectivamente.

Ambas as empresas apresentam custo marginal constante:

$$C_m = 30.$$

Passo 1: Funções de Lucro

A receita total de cada empresa é dada por $R_i = P \cdot q_i$, e o lucro é a diferença entre a receita e o custo total.

Para a Empresa 1:

$$\pi_1 = (P - C_m)q_1 = [120 - 2(q_1 + q_2) - 30]\, q_1,$$

$$\pi_1 = (90 - 2q_1 - 2q_2)q_1,$$

$$\pi_1 = 90q_1 - 2q_1^2 - 2q_1q_2.$$

Para a Empresa 2:

$$\pi_2 = (P - C_m)q_2 = [120 - 2(q_1 + q_2) - 30]\, q_2,$$

$$\pi_2 = (90 - 2q_1 - 2q_2)q_2,$$

$$\pi_2 = 90q_2 - 2q_1q_2 - 2q_2^2.$$

Passo 2: Curvas de Reação

Para determinar a quantidade ideal a ser produzida por cada empresa, observamos que o lucro de cada uma é uma função quadrática em relação à sua própria produção. O valor que maximiza o lucro corresponde ao*vértice da parábola definida por essa função.

Sabemos que, para uma função da forma $ax^2 + bx$, o valor de x que maximiza a função é dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Para a Empresa 1, a função lucro é:

$$\pi_1 = -2q_1^2 + (90 - 2q_2)q_1.$$

Aplicando a fórmula do vértice:

$$q_1 = \frac{90 - 2q_2}{4} = 22{,}5 - 0{,}5q_2.$$

Para a Empresa 2 a função lucro é:

$$\pi_2 = -2q_2^2 + (90 - 2q_1)q_2.$$

Aplicando a fórmula do vértice:

$$q_2 = \frac{90 - 2q_1}{4} = 22{,}5 - 0{,}5q_1.$$

Passo 3: Equilíbrio de Cournot

Sistema:

$$q_1 = 22,5 - 0,5q_2,$$
$$q_2 = 22,5 - 0,5q_1,$$

Substituindo q_2 na primeira:

$$q_1 = 22,5 - 0,5(22,5 - 0,5q_1),$$
$$q_1 = 22,5 - 11,25 + 0,25q_1,$$
$$q_1 - 0,25q_1 = 11,25,$$
$$0,75q_1 = 11,25, \quad \Rightarrow \quad q_1^* = 15,$$
$$q_2^* = 22,5 - 0,5(15) = 15.$$

Preço:

$$P^* = 120 - 2(15 + 15) = 120 - 60 = 60.$$

Lucro:

$$\pi_1^* = (60 - 30)(15) = 30 \cdot 15 = 450,$$
$$\pi_2^* = 450.$$

Passo 4: Estratégia Maximin

Considerando comportamento conservador: Para a Empresa 1, fixando $q_2 = 20$ (cenário menos favorável), a função de lucro fica:

$$\pi_1 = 90q_1 - 2q_1^2 - 2(20)q_1,$$
$$\pi_1 = 90q_1 - 2q_1^2 - 40q_1,$$
$$\pi_1 = 50q_1 - 2q_1^2.$$

Como o coeficiente de q_1^2 é negativo, trata-se de uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, o valor máximo ocorre no vértice da parábola.

1) Utilizando a fórmula do vértice:

A abscissa do vértice de uma parábola dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:

$$q_1 = -\frac{b}{2a},$$

No caso:

$$a = -2, \quad b = 50 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -\frac{50}{2 \cdot (-2)} = \frac{50}{4} = 12{,}5.$$

2) Completando o quadrado:

$$\pi_1 = -2q_1^2 + 50q_1 = -2(q_1^2 - 25q_1).$$

Completando o quadrado dentro dos parênteses:

$$q_1^2 - 25q_1 = \left(q_1 - \frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2,$$

Substituindo:

$$\pi_1 = -2\left[\left(q_1 - \frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2\right] = -2\left(q_1 - 12{,}5\right)^2 + 312{,}5,$$

O valor máximo de π_1 ocorre quando o termo quadrático for zero, ou seja, quando:

$$q_1 = 12{,}5.$$

Portanto, o ponto de produção que maximiza o lucro da Empresa 1 em cenário conservador é:

$$\boxed{q_1 = 12{,}5}$$

Passo 5: Comparação

- **Cournot:** $q_1 = q_2 = 15,\ P = 60,\ \pi_1 = \pi_2 = 450.$
- **Maximin:** $q_1 = q_2 = 12,5,\ P = 120 - 2(25) = 70,\ \pi_1 = \pi_2 = (70 - 30)12,5 = 500.$

Passo 6: Representação Gráfica

Representar graficamente:

- Curvas de reação $q_1 = 22,5 - 0,5q_2$ e $q_2 = 22,5 - 0,5q_1$;
- Ponto de interseção $(15, 15)$ para Cournot;
- Pontos correspondentes à estratégia Maximin $(12, 5, 12, 5)$.

6.4 Análise do Recurso Didático Utilizado

A simulação baseada no modelo de Cournot e na estratégia Minimax se configura como um recurso didático de alto potencial pedagógico. Sua estrutura permite que o aluno mobilize diferentes saberes matemáticos ao mesmo tempo em que analisa situações contextualizadas.

Potencialidades do recurso:

- Integra conteúdos como funções do 2º grau, álgebra e lógica.
- Estimula a argumentação matemática e o trabalho colaborativo.
- Permite a simulação de um problema real, favorecendo o protagonismo do aluno.
- Desenvolve competências socioemocionais como negociação, empatia e pensamento estratégico.

Limitações e cuidados necessários:

- Exige um planejamento prévio para adaptação do contexto ao nível da turma.
- Pode demandar uso de recursos tecnológicos (planilhas, projetor, quadros de dupla entrada).
- É importante garantir que todos os alunos compreendam a função de lucro antes de avançar para estratégias.

A aplicação didática da Teoria dos Jogos no Ensino Médio, por meio do modelo de Cournot e da estratégia Minimax, constitui uma proposta inovadora, acessível e alinhada à BNCC. Ao se basear em funções quadráticas e sistemas de equações, conteúdos do currículo escolar, torna-se possível explorar a tomada de decisão racional, o raciocínio estratégico e a modelagem matemática de situações do cotidiano e do mundo do trabalho. A sequência apresentada visa evidenciar que a Matemática pode ir além dos cálculos tradicionais, promovendo uma aprendizagem significativa e conectada com a realidade.

7 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir da simulação da proposta didática fundamentada na Teoria dos Jogos, em especial no modelo de duopólio de Cournot e na estratégia Maximin. O objetivo é analisar de que forma os conteúdos matemáticos e as estratégias de decisão podem ser apropriados pelos estudantes, além de discutir o impacto pedagógico potencial da atividade.

Na Seção 7.1, são discutidos os resultados matemáticos e estratégicos da simulação, com destaque para a aplicação do modelo de Cournot utilizando funções quadráticas e o cálculo do ponto de equilíbrio sem o uso de derivadas, além da comparação com a estratégia Maximin. Já a Seção 7.2 apresenta os resultados didáticos e pedagógicos projetados para a sequência de ensino, como o desenvolvimento de habilidades lógico-matemáticas, o engajamento dos alunos e o uso de estratégias interativas. Por fim, a Seção 7.3 discute as potencialidades e limitações da proposta, considerando seu alinhamento com a BNCC e sua viabilidade no contexto do Ensino Médio.

A análise aqui proposta busca evidenciar como a articulação entre teoria matemática e situações contextuais pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa, crítica e estratégica, conforme defendido por (Kasper, 2017).

7.1 Resultados Matemáticos e Estratégicos

Os resultados obtidos a partir da simulação do modelo de duopólio de Cournot com os parâmetros $a = 100$, $b = 1$, $c_1 = 20$ e $c_2 = 30$ evidenciaram que é possível calcular o ponto de equilíbrio do modelo sem o uso de derivadas, por meio da análise de vértices de funções quadráticas. As curvas de reação de ambas as firmas foram construídas com base na fórmula do vértice, permitindo a resolução do sistema de equações e a determinação do equilíbrio de Nash:

- Quantidade de equilíbrio da Firma 1: $q_1^* = 30$;
- Quantidade de equilíbrio da Firma 2: $q_2^* = 20$;
- Preço de mercado no equilíbrio: $P = 50$;
- Lucro da Firma 1: $\pi_1 = 900$;
- Lucro da Firma 2: $\pi_2 = 400$.

Além disso, foi possível aplicar a estratégia Minimax à matriz de lucros, identificando o ponto em que cada firma minimiza sua perda máxima. Isso permitiu uma comparação crítica entre o equilíbrio de Cournot (que considera reações mútuas) e a estratégia Minimax (que assume posturas mais defensivas), favorecendo a análise de decisões racionais em cenários com diferentes níveis de informação.

7.2 Resultados Didáticos e Pedagógicos

A construção da sequência didática fundamentada nos modelos matemáticos explorados evidenciou que conteúdos como funções do segundo grau, sistemas lineares e interpretação de gráficos podem ser aplicados a contextos reais de forma acessível e envolvente. A estruturação da proposta em quatro aulas foi planejada para favorecer a compreensão gradual dos conceitos e para possibilitar a participação ativa dos estudantes, com foco no raciocínio lógico, argumentação e tomada de decisão.

A utilização da Teoria dos Jogos como recurso pedagógico apresenta potencial para:

- Estimular a curiosidade dos alunos por envolver situações de competição e estratégia.
- Promover a interdisciplinaridade entre Matemática, Economia e Ética.
- Fortalecer competências previstas na BNCC, como modelagem, análise crítica de dados e uso da Matemática em contextos sociais.
- Tornar a aprendizagem mais significativa ao conectar a Matemática ao mundo real.

Além disso, a proposta mostra-se compatível com turmas de Ensino Médio, uma vez que não exige cálculo diferencial e utiliza apenas ferramentas presentes no currículo escolar, como fórmulas de funções quadráticas, sistemas de equações e leitura de gráficos.

7.3 Discussão das Potencialidades e Limitações

Dentre as principais potencialidades da proposta, destacam-se:

- A acessibilidade do conteúdo matemático, mesmo com a complexidade do tema.
- A possibilidade de desenvolver atividades investigativas, em que os alunos constroem e testam hipóteses.
- A promoção do protagonismo estudantil e do pensamento estratégico.

Contudo, algumas limitações foram identificadas:

- A necessidade de mediação docente ativa para contextualizar os modelos e garantir o engajamento dos alunos.
- O tempo necessário para a realização completa da sequência didática.
- A possível dificuldade de algumas turmas em interpretar tabelas de lucros e simulações econômicas sem o devido suporte visual.

Mesmo diante dessas limitações, a proposta mostrou-se viável, inovadora e alinhada às diretrizes curriculares, demonstrando que é possível abordar conceitos avançados por meio de recursos didáticos acessíveis, tornando a Matemática mais atraente, compreensível e útil para os estudantes.

Conclusão

Esta dissertação teve como objetivo investigar e propor uma abordagem didática que integra a Teoria dos Jogos ao ensino de Matemática no Ensino Médio, por meio do modelo de duopólio de Cournot e da estratégia Minimax, explorando conteúdos como funções quadráticas e sistemas lineares, com foco no desenvolvimento do pensamento estratégico e na contextualização da aprendizagem conforme as diretrizes da BNCC.

Por meio da fundamentação teórica e da construção de exemplos numéricos contextualizados, foi possível simular cenários econômicos e estratégias de decisão, evidenciando o potencial da Teoria dos Jogos como ferramenta pedagógica para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação e da modelagem matemática.

A análise do modelo de Cournot com curvas de reação e das estratégias Minimax e Maximin permitiu ilustrar como decisões interdependentes entre agentes influenciam os equilíbrios de mercado e como diferentes níveis de cautela impactam o processo decisório. A sequência didática planejada mostrou-se adequada para explorar esses conceitos de forma acessível, interdisciplinar e contextualizada, permitindo conectar conteúdos matemáticos ao mundo real de maneira significativa.

Os resultados obtidos nas simulações indicam que a articulação entre teoria matemática e proposta pedagógica apresenta potencial para favorecer uma aprendizagem mais estratégica, crítica e conectada ao cotidiano, promovendo competências previstas na BNCC e o desenvolvimento do pensamento matemático.

Por fim, este trabalho abre caminhos para investigações futuras, incluindo a adaptação dos modelos para situações mais complexas, como a inclusão de mais agentes, estratégias mistas ou cooperação, bem como a aplicação em sala de aula com coleta de dados empíricos, que poderá reforçar ainda mais a relevância da Teoria dos Jogos no contexto educacional.

Referências

BINMORE, K. **Playing for real: A text on game theory**. Oxford: CRC Press, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Básica**. 1. ed. Brasília, 2018. Acesso em: 30 de maio de 2025. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC$_{p}ublicacao.pdf$ > .

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game Theory**. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.

GIBBONS, R. **A Primer in Game Theory**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994. 288 p. ISBN 978-0-131-39148-2.

KASPER, F. **Teoria dos jogos: uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — ProfMat). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017. 113 f.

MYERSON, R. B. **Game Theory: Analysis of Conflict**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991.

NEUMANN, J. VON. **Zur Theorie der Gesellschaftsspiele**. Mathematische Annalen, v. 100, p. 295–320, 1928. Disponível em: <http://eudml.org/doc/159291>.

NEUMANN, J. VON; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. [S.l.]: CRC Press, 1944.

OSBORNE, M.; RUBINSTEIN, A. **Solution Manual for A Course in Game Theory**. [S.l.]: CRC Press, 1994. v. 32.

OSBORNE, M. J. **An Introduction to Game Theory**. New York: Oxford University Press, 2004. ISBN 0-19-512895-8.

OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **Teoria dos Jogos**. São Paulo: Atlas, 1999. Tradução da obra original: **A Course in Game Theory**.

PEREIRA, S. B. **Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Orientadora: D. F. Mondaini.

PONTE, C. M. A.; BROCARDO, C. M.; OLIVEIRA, E. DE. **Teoria dos Jogos e sua Aplicação no Ensino Básico**. Rio de Janeiro: Editora da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.

SARTINI, B. A. et al. **Uma introdução à teoria dos jogos**. In: Universidade Federal da Bahia. Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador, 25 a 29 de outubro de 2004.

SKOVSMOSE, O. **Aprender a Ensinar Matemática Criticamente**. São Paulo: Autêntica, 2001.

TIROLE, J. **The Theory of Industrial Organization**. New edition. Cambridge, MA: MIT Press, 1988. 496 p. Recurso fundamental para modelagem de competição de Cournot. ISBN 978-0262200714.

VYGOTSKY, L. S. **Psicologia pedagógica**. Tradução de Claudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2003.