UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CÂMPUS CIMBA ARAGUAÍNA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

ANTÔNIO FRANCISCO ONOFRE BATISTA

INTRODUÇÃO ÀS SEQUÊNCIAS 2E

ARAGUAÍNA – TO
2025

ANTÔNIO FRANCISCO ONOFRE BATISTA

INTRODUÇÃO ÀS SEQUÊNCIAS 2E

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Norte do Tocantins – UFNT, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA – TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O58i Onofre Batista, Antônio Francisco .
Introdução às Sequências 2E / Antônio Francisco Onofre Batista. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.
89 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: José Carlos de Oliveira Junior.

1. Sequências 2E. 2. Padrões. 3. MMC e MDC.

CDD 510

ANTÔNIO FRANCISCO ONOFRE BATISTA

INTRODUÇÃO ÀS SEQUÊNCIAS 2E

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Norte do Tocantins – UFNT, como requisito básico para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da aprovação: 25 /08/ 2025.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 12/09/2025 09:59:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior – Orientador (UFNT)

Documento assinado digitalmente
MATHEUS PEREIRA LOBO
Data: 12/09/2025 09:33:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo – Membro interno (UFNT)

Documento assinado digitalmente
KEIDNA CRISTIANE OLIVEIRA SOUZA
Data: 12/09/2025 08:16:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza – Membro Externo (UFT)

ARAGUAÍNA – TO
2025

Dedico este trabalho aos meus filhos ***Edwin*** *e* ***Ewlin,*** *que são fontes de inspiração, alegria e esperança em todos os momentos. Que esta conquista seja também um exemplo de que, com amor, dedicação e coragem, podemos alcançar tudo aquilo em que acreditamos. Dedico também a todos que, de alguma forma, caminharam ao meu lado e contribuíram para a realização desta etapa tão importante da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos professores da Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), (Álvaro, Raimundo, David, José Carlos, Samara, Rogério e Renata) por todo o conhecimento compartilhado, pela dedicação ao ensino e pela inspiração diária, que foram fundamentais para minha formação acadêmica e pessoal.

A minha namorada, Karolayne, pelo amor, pela paciência e por acreditar em mim mesmo nos momentos mais difíceis. Sua presença constante, o apoio incondicional e o incentivo silencioso foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui. Sou imensamente grato por compartilhar esta conquista ao seu lado.

Ao meu orientador, Professor José Carlos de Oliveira Junior, pela orientação competente, pelos ensinamentos transmitidos e pela confiança no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas do mestrado, especialmente ao Carlos, à Gabriela, Matheus e ao Daniel, pela parceria, troca de experiências e amizade construída ao longo do percurso.

Aos membros da banca examinadora, manifesto meu profundo agradecimento pela generosidade em dedicar seu tempo, sua atenção e seu conhecimento na avaliação deste trabalho. Reconheço e valorizo cada contribuição, crítica e sugestão, que certamente agregarão qualidade acadêmica e novas perspectivas à pesquisa aqui apresentada.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação, deixo aqui minha sincera gratidão.

As sequências numéricas são mais do que simples ordens de números — são o alicerce de padrões, previsões e decisões matemáticas no mundo real.

Antônio Onofre

RESUMO

Esta dissertação propõe uma proposta didática com uma intervenção pedagógica inovadora, desenvolvida a partir do que chamamos aqui de Sequências 2E (Exploração e Explicitação), aplicadas ao ensino dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC). O trabalho busca promover uma aprendizagem centrada também na resolução de problemas reais e na construção ativa do conhecimento matemático pelos alunos. A fundamentação teórica baseia-se nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que valorizam o desenvolvimento de competências relacionadas a padrões, raciocínio lógico, argumentação e pensamento crítico. A proposta didática foi estruturada em uma sequência de 10 aulas, divididas entre momentos de exploração, em que os alunos resolvem situações-problema de forma autônoma e colaborativa, e momentos de explicitação, nos quais os conceitos matemáticos são formalizados com o auxílio do *software* a mediação do professor.
A metodologia da Sequência 2E consiste em alternar de exploração e explicitação: na exploração, os estudantes investigam padrões matemáticos por meio de problemas contextualizados, manipulando as sequências e formulando hipóteses; já na explicitação, o ele organiza, valida e formaliza o conhecimento construído, consolidando conceitos como MMC e MDC. Esse movimento cíclico entre investigação e sistematização potencializa a aprendizagem ativa, favorecendo a autonomia intelectual e a participação crítica dos alunos. A abordagem da Sequência 2E é uma construção matemática simétrica, definida a partir de um valor d. A sequência cresce de 1 até d, e então retorna simetricamente a 1, formando um ciclo do tipo: $(1,2,3,4, \dots, d-2, d-1, d, d-1, d-2, \dots, 3,2,1,2,3, \dots)$. Esse comportamento cíclico permite a modelagem de padrões periódicos e a criação de subsequências a partir de saltos fixos, o que é útil na resolução de problemas envolvendo periodicidade, MMC e MDC e simetrias em progressões. Além disso, demonstra-se, via software desenvolvido pelo autor, que é possível determinar o MDC e o MMC entre números inteiros apenas utilizando tais sequências.

Palavras-chave: Sequências 2E; padrões; MDC; MMC.

ABSTRACT

This dissertation proposes a didactic proposal with an innovative pedagogical intervention, developed from what we call here the 2E Sequences (Exploration and Explicitation), applied to the teaching of the concepts of Least Common Multiple (LCM) and Greatest Common Divisor (GCD). The work aims to promote learning that is also centered on solving real-world problems and the students' active construction of mathematical knowledge. The theoretical foundation is based on the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC), which values the development of competencies related to patterns, logical reasoning, argumentation, and critical thinking. The didactic proposal was structured as a sequence of 10 lessons, divided between exploration moments, where students solve problem situations autonomously and collaboratively, and explicitation moments, in which the mathematical concepts are formalized with the aid of software and the mediation of the teacher. The methodology of the 2E Sequence consists of alternating between exploration and explicitation: in exploration, students investigate mathematical patterns through contextualized problems, manipulating the sequences and formulating hypotheses; in explicitation, the teacher organizes, validates, and formalizes the constructed knowledge, consolidating concepts such as LCM and GCD. This cyclical movement between investigation and systematization enhances active learning, fostering students' intellectual autonomy and critical participation. The 2E Sequence approach is a symmetric mathematical construction, defined from a value d. The sequence increases from 1 to d, and then returns symmetrically to 1, forming a cycle of the type: $(1,2,3,4,\ldots,d-2,d-1,d,d-1,d-2,\ldots,3,2,1,2,3,\ldots)$. This cyclical behavior allows for the modeling of periodic patterns and the creation of subsequences based on fixed intervals, which is useful for solving problems involving periodicity, LCM and GCD, and symmetries in progressions. Furthermore, it is demonstrated, via software developed by the author, that it is possible to determine the GCD and LCM of integers using only such sequences.

Keywords: 2E Sequences; patterns; GCD; LCM.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

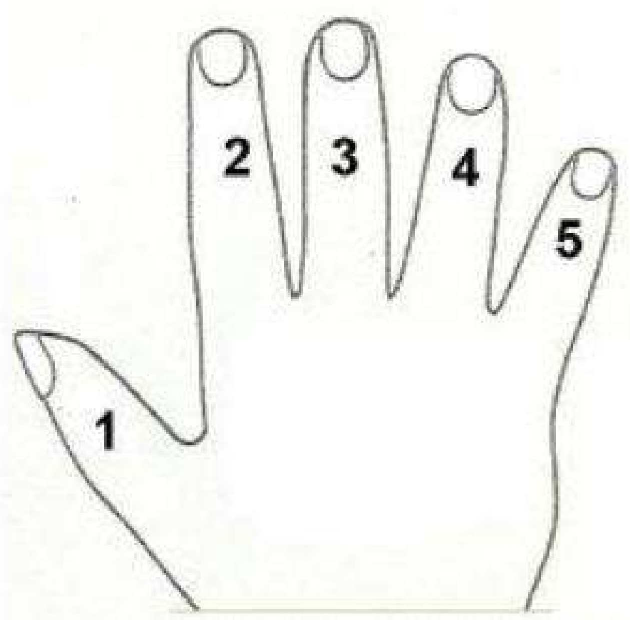
SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A **Matemática**, muitas vezes, nos surpreende nos momentos mais inesperados. Quem diria que, observando as próprias mãos durante uma simples viagem, poderíamos encontrar um exemplo tão claro de regularidade e invariância em sequências numéricas? Nelas, o número 2 tornou-se um símbolo de permanência e recorrência. Pois é! Durante uma viagem pelo interior do Maranhão, o professor José Carlos, enquanto observava suas próprias mãos, foi tomado por um pensamento curioso.

Se contarmos os dedos da seguinte forma:

Figura 1: Contagem dos dedos



Fonte: "Atividades educativas" [Imagem]. Disponível em: https://atividadeseducativa.com/desenhos-da-mao-direita-e-esquerda-para-colorir/. Acesso em: 7 de jun. 2025.

"1, 2, 3, 4, 5", e depois voltarmos: "4, 3, 2, 1", e continuarmos novamente: "2, 3, 4, 5…", e assim sucessivamente, percebe-se que estamos construindo uma sequência infinita.

Intrigado, o professor José Carlos decidiu analisar esse padrão restrito agora a um outro número. Ele notou que, ao extrair uma subsequência específica dessa sequência original, escolhendo previamente um número inteiro positivo qualquer para formá-la, o número 2 aparecia invariavelmente em todas elas, independentemente desse número previamente escolhido.

Para facilitar a compreensão, vamos a um exemplo prático.

Exemplo 1.1 Vamos montar a sequência primitiva à qual nos referimos. Por enquanto, vamos chamá-la apenas de *Sequência Base*, ou simplesmente (a_n), e futuramente daremos uma nomenclatura mais específica. Assim, temos que a sequência segue o seguinte padrão:

$$(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, \ldots)$$

Agora, vamos analisar algumas subsequências extraídas dessa sequência original. Para facilitar o entendimento, vamos denominar estas subsequências de (b_n).

Primeiramente, pegaremos os termos da sequência (a_n) de 1 em 1. Ora, de 1 em 1, é fácil observar que aparecem todos os temos da sequência (a_n), ou seja,

$$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 4, b_5 = 5, b_6 = 4, b_7 = 3, b_8 = 2, b_9 = 1$$

e começa a repetição. Então, $(b_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \ldots) = (a_n)$.

Nem é preciso comentar, uma vez que todos os termos aparecem, o 2 também aparece.

Agora da mesma sequência (a_n), vamos escolher os termos de (a_n) mas agora vamos "saltar" de 2 em 2 para formar a subsequência (b_n). Teremos $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 4$, $b_4 = 2$, e aqui começa a se repetir. Assim, nossa subsequência (b_n), formada tomando os termos de 2 em 2, será

$$(b_n) = (2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, \ldots).$$

Observe que o número 2 também aparece nela.

De maneira análoga, iremos escolher os termos de (a_n) agora de 3 em 3. Temos

$$b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 1, b_4 = 4, b_5 = 3, b_6 = 2, b_7 = 5, b_8 = 2, b_9 = 3$$

e daí começa a repetição. Portanto, $(b_n) = (3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, \ldots)$. Nesse caso, observe novamente que aparece número o 2.

Escolhendo os termos de (a_n) de 4 em 4, obtemos

$$b_1 = 4, b_2 = 2, b_3 = 4, b_4 = 2,$$

e, assim, sucessivamente. Logo, $(b_n) = (4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots)$, onde também aparece o número 2. Escolhendo agora os termos de (a_n) de 5 em 5, tem-se

$$b_1 = 5, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 4, b_5 = 1, b_6 = 4, b_7 = 3, b_8 = 2, b_9 = 5,$$

ou seja, $(b_n) = (5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, \ldots)$. Aqui também vemos que todos os termos aparecem, e consequentemente, temos o termo 2.

Agora iremos escolher de 6 em 6. Segue que

$$b_1 = 4, b_2 = 4, b_3 = 2, b_4 = 2,$$

e daí vem a repetição. Logo, $(b_n) = (4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, \ldots)$. Mais uma vez, aparece o número 2.

De 7 em 7, temos que

$$b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 4, b_5 = 5, b_6 = 2, b_7 = 1, b_8 = 2, b_9 = 3$$

e assim por diante. Logo, $(b_n) = (3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \ldots)$, que contém o número 2 em seus termos.

Agora construiremos (b_n) tomando de 8 em 8 os elementos de (a_n). Este é um caso especial (que veremos com mais detalhes adiante). Neste caso, temos

$$b_1 = 2, b_2 = 2, b_3 = 2 \ldots,$$

repetindo o número 2 em todos os demais termos e, portanto, $(b_n) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$. Aqui, curiosamente, o único termo que aparece é o número 2, o que já é um indicativo de um comportamento especial que será tratado posteriormente com mais rigor matemático, através de um teorema.

Como a sequência (a_n) é periódica de período $\Pi = 8$ (isso será bem definido nos capítulos subsequentes), se, para construirmos a subsequência (b_n), escolhermos os termos de (a_n) de $8k + r$ em $8k + r$, com $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$ e $0 \leq r < 7$, por exemplo, a subsequência obtida será igual à subsequência construída tomando os termos de (a_n) de r em r. Aqui estamos considerando $r = 0$ e $r = 8$.

Como podemos ver, todos os exemplos apresentados acima, o número 2 aparece na subsequência formada a partir de (a_n). Generalizando essa ideia, seja $d \geq 2$ um número inteiro e considere a sequência (a_n^d) definida por:

$$(a_n^d) = (1,2,3,4, \ldots, d-1, d, d-1, d-2, \ldots,3,2,1,2,3, \ldots).$$

Este trabalho busca, portanto, resolver a seguinte problemática: *Dado um número natural l, será que a subsequência formada a partir da sequência (a_n^d), escolhendo os elementos de l em l, contém o número 2 como um de seus termos para todo l? Se sim, quais são as consequências desse fato?*

1.1 CONTEXTO HISTÓRICO

A busca por padrões matemáticos acompanha a humanidade desde os tempos mais remotos. Embora os gregos antigos tenham sido os primeiros a sistematizar esses estudos com maior profundidade, já se observam indícios desse interesse em civilizações anteriores, como a babilônica e a egípcia. Nessas culturas, padrões relacionados aos ciclos naturais, aos astros e ao ambiente já despertavam curiosidade, ainda que de maneira menos formalizada.

Diversos matemáticos da Antiguidade identificaram regularidades que, ainda hoje, continuam sendo objeto de estudo nas salas de aula e na pesquisa científica.

1.1.1 Sequências e Padrões

A busca por padrões é intrínseca ao pensamento humano. Desde os primeiros registros históricos, civilizações como os babilônios, egípcios e gregos já utilizavam sequências numéricas para resolver problemas cotidianos, como medições de terras, cálculos astronômicos e transações comerciais. Uma sequência matemática pode ser definida como uma lista ordenada de números (ou objetos mais gerais) seguindo uma regra bem estabelecida, seja ela aritmética, geométrica, recursiva ou definida por uma fórmula explícita.

O estudo formal das sequências permitiu não apenas o avanço da matemática pura, mas também aplicações em áreas como física, engenharia, computação e biologia. Neste capítulo. exploraremos a evolução histórica desse conceito, destacando as contribuições de cinco matemáticos fundamentais: Fibonacci, Gauss, Euler, Cauchy e Ramanujan. Além disso, serão apresentados exemplos clássicos, propriedades e aplicações práticas, demonstrando como as sequências estão presentes em diversos aspectos da ciência e da tecnologia.

As informações reunidas neste capítulo foram fundamentadas em estudos acadêmicos e obras reconhecidas na história da matemática, como o *Liber Abaci*, de Leonardo Fibonacci (publicado em 1202), e em referências modernas como Boyer e Merzbach (2011), que oferecem uma ampla perspectiva sobre o desenvolvimento histórico das ideias matemáticas. Também foram utilizadas análises contemporâneas presentes em Stillwell (2010) e em publicações científicas indexadas em bases como JSTOR e Scielo, garantindo rigor acadêmico e atualidade aos conteúdos apresentados.

1.2 ORIGENS ANTIGAS E DESENVOLVIMENTO INICIAL

1.2.1 Sequências nas Civilizações Antigas

Os primeiros registros de sequências matemáticas aparecem em tabletes babilônicos (c. 1800 a.C.), onde eram utilizadas progressões aritméticas para cálculos de juros e divisão de heranças (Neugebauer, 1957). No Papiro de Rhind (Egito, c. 1650 a.C.), há problemas envolvendo divisão proporcional usando sequências simples.

Os gregos deram um passo além, com Euclides (300 a.C.) explorando progressões geométricas em *Os Elementos* e Arquimedes (287–212 a.C.) utilizando séries infinitas para calcular áreas e volumes, antecipando ideias do cálculo integral.

1.2.2 Fibonacci e a Sequência Recursiva

A Idade Média trouxe um marco importante com Leonardo Fibonacci (1170–1250), cujo livro *Liber Abaci* (1202) introduziu recursivamente a famosa sequência de Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1$$

Quando analisamos vários valores de n, obtemos a sequência:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$$

onde cada termo (a partir do terceiro) é a soma dos dois anteriores.

Originalmente aplicada ao crescimento populacional de coelhos, essa sequência aparece em fenômenos naturais, como a disposição de folhas em plantas (filotaxia) e a estrutura de galáxias espirais (Livio, 2002). Além disso, a razão entre termos consecutivos converge para o número áureo $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, um padrão estético presente na arte e na arquitetura.

1.3 CONTRIBUIÇÕES FUNDAMENTAIS NO PERÍODO MODERNO

1.3.1 Gauss e as Progressões Aritméticas

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) demonstrou seu gênio precoce ao deduzir, ainda criança, a fórmula da soma de uma progressão aritmética (PA):

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

A lenda conta que Gauss somou os números de 1 a 100 em segundos, observando que $1 + 100 = 101,\ 2 + 99 = 101,$ e assim por diante, totalizando 50×101=5050 (Bühler, 1981). Seus trabalhos posteriores em teoria dos números e séries hipergeométricas consolidaram o rigor no estudo de sequências infinitas.

1.3.2 Euler e as Séries Infinitas

Leonhard Euler (1707–1783) foi um mestre na manipulação de séries infinitas. Entre suas contribuições mais notáveis está a resolução do Problema de Basel, provando que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler também explorou sequências recursivas, frações contínuas e a relação entre séries e funções trigonométricas/exponenciais, como na famosa identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Dunham, 1999).

1.3.3 Cauchy e a Formalização da Convergência

No século XIX, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) estabeleceu os fundamentos da análise moderna ao definir limites e critérios de convergência para sequências. Seu *Cours d'Analyse* (1821) introduziu o famoso Critério de Cauchy, cujo a formalização foi essencial para o desenvolvimento do cálculo e da topologia (Kline, 1972).

1.4 EXEMPLOS CLÁSSICOS DE SEQUÊNCIAS

1.4.1 Progressões Aritméticas e Geométricas

1. **Progressão Aritmética:** Seja a_1 um número real qualquer. A sequência (a_n) é chamada de Progressão Aritmética se $a_n = a_1 + (n-1)r$, para algum r real, chamado de razão. Uma aplicação pode ser dada no cálculo de juro simples
2. **Progressão Geométrica:** Seja a_1 um número real qualquer. A sequência (a_n) é chamada de Progressão Geomética se $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para algum q real. Uma aplicação é a Modelagem de crescimento populacional
3. **Sequência de Primos:** 2,3,5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Talvez seja a sequência mais famosa e intrigante da Matemática.
4. **Sequências definidas por recorrência (por exemplo, na Torre de Hanói)**: Número mínimo de movimentos.

$$T_n = 2T_{n-1} + 1.$$

1.5 APLICAÇÕES PRÁTICAS

1.5.1 Computação e Algoritmos

- Busca Binária: Opera em listas ordenadas (sequência logarítmica).

- Sequência de Fibonacci: Usada em otimização e grafos.

1.5.2 Engenharia e Física

- Séries de Fourier: Decomposição de sinais em séries trigonométricas.
- Soluções de Equações Diferenciais: Sequências de aproximações numéricas.

O estudo das sequências matemáticas percorreu um longo caminho, desde problemas práticos antigos até teorias profundas na matemática moderna. As contribuições de Fibonacci, Gauss, Euler, Cauchy e Ramanujan não apenas enriqueceram a teoria, mas também permitiram aplicações revolucionárias em diversas áreas. Hoje, sequências são ferramentas indispensáveis tanto na pesquisa acadêmica quanto na tecnologia cotidiana.

Definição 1.1 Uma sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ será uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = a_n$ de tal forma que cada $n \in \mathbb{N}$ determina de maneira única, um elemento da sequência. Chamamos o número n de índice e a_n de n-ésimo elemento da sequência ou ainda de termo geral da sequência. Essa sequência também pode ser representada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou somente por (a_n).

Existem algumas formas de se definir sequências. Uma mais simples é quando o termo geral é dado explicitamente em função do índice n. Por exemplo, $f(n) = 2n - 1$ ou $f(n) = \frac{1}{n^2} + log(n)$. Outra forma, uma pouco mais sofisticada, é quando definimos uma sequência de forma recorrente, utilizando indução. Por exemplo, a sequência de Fibonacci (Fibonacci e a Sequência Recursiva) ou ainda a sequência dada por $a_1 = 5 \ e \ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ com $n \geq 1$. Nesse caso,

$$(a_n) = \left(5, \sqrt{6}, \sqrt{\sqrt{6} + 1}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{6} + 1} + 1}, \ldots\right).$$

Como vimos, em algumas sequências, é simples determinar uma forma explícita matemática que as define, mas nem sempre é assim; na verdade, nem sempre é possível determinar uma expressão que possa representar certas sequências, como por exemplo, a sequência dos números primos.

Outro fato importante para se mencionar é que não podemos confundir os elementos de uma sequência com o conjunto de seus termos.

Considere a sequência $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada pela expressão $a_n = f(n) = (-1)^n$ ou ainda $(f(n)) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$. Apesar dessa sequência ter infinitos termos, o conjunto dos elementos da sequência é formado apenas por dois elementos, ou seja, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\} = \{-1, 1\}$.

Visto isto, agora iremos falar sobre conceito de igualde de duas sequências.

Definição 1.2 Dadas duas sequências $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots,)$ e $(b_n) = b_1, b_2, b_3, b_4, \dots b_n, \dots,)$, dizemos que $a_n = b_n$ se, e somente se, $a_i = b_i$ para todo número natural i.

Porém, podemos ter duas sequências com termos gerais distintos e, ainda assim, o conjunto de elementos ser o mesmo. Vejamos as duas sequências definidas por (a_n) e (b_n) com $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \begin{cases} 1, & se\ n\ for\ ímpar \\ \frac{2}{n+2}, & se\ n\ for\ par \end{cases}$. Agora vamos escrever os primeiros termos das sequências (a_n) e (b_n):

$$a_n = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \dots) \text{ e } b_n = \left(1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{4}, 1, \tfrac{1}{5}, \dots\right)$$

Observando as duas sequências, podemos ver que, apesar de serem sequências de termos gerais diferentes e que, portanto, alguns de seus termos são distintos, como por exemplo $a_3 = \frac{1}{3}$ e $b_3 = 1$, tem-se que o conjunto de seus elementos é $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$.

1.6 SUBSEQUÊNCIA

Para o melhor entendimento deste trabalho, é importante que tenhamos uma boa familiaridade com subsequências. Assim sendo, daremos uma ênfase mais neste assunto para a melhor compreensão do leitor.

Uma subsequência é a restrição de uma sequência original, isto é, consiste em selecionar alguns de seus termos, sem mudar a ordem em que aparecem.

Exemplo 1.5 Considere a sequência definida por $a_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Podemos reescrever esta sequência como $(a_n) = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \dots)$

Uma possível subsequência é aquela em que selecionamos apenas os termos que pertencem ao conjunto dos números naturais $(a_n) = (\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \dots)$

Para melhorar ainda mais seu entendimento, daremos um exemplo ainda mais simples.

Exemplo 1.6 Considere a sequência dos números naturais $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, tem-se que $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$

Vejamos algumas possíveis subsequências dessa sequência.

i) $(a_n) = (2n) = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ (sequência dos números pares).

ii) $(a_n) = (2n - 1) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots)$ (sequência dos números ímpares).

iii) $(a_n) = (n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, \dots)$ (sequência dos cubos perfeitos).

E temos infinitas subsequências possíveis para essa sequência.

Exemplo 1.7 Considere a sequência (a_n) dada por $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, \dots)$. Escreva todas as subsequências (b_n), cujos termos são escolhas de l em l em (a_n), de modo que o primeiro termo b_1 seja um número primo.

Vamos identificar os primos nos termos da sequência (a_n):

Da sequência $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, \dots)$, os primos são a_2, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11} e a_{12}. Assim, os l escolhidos devem ser $l = 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13$. Para $l = 2$, vamos escolher os termos de (a_n) de 2 em 2. Temos $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 6$, $b_4 = 6$, $b_5 = 4$, $b_6 = 2$, e, então, a subsequência fica

$$(b_n) = (2, 4, 6, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 2, 4, 6, \dots.).$$

De maneira análoga, iremos fazer para $l = \ 3, 5, 7, 9, 11, 13$

Para $l = 3$, vamos escolher os termos de (a_n) de 3 em 3. Assim, $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 5$, $b_4 = 2, \dots$

$$(b_n) = (3, 6, 5, 2, 3, 6, 5, 2, 3, 6, 5, 2, 3, 6, 5, \dots).$$

Para $l = 5$, vamos escolher os termos de (a_n) de 5 em 5. Tem-se que $b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $b_3 = 3$, $b_4 = 7$, $b_5 = 2$...

$$(b_n) = (5, 4, 3, 6, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7, 2, 5, 4, 3, \dots.).$$

Para $l = 7$, vamos escolher os termos de (a_n) de 7 em 7. Temos que $b_1 = 7$, $b_2 = 2$, $b_3 = 5$, $b_4 = 4$, $b_5 = 3$, $b_6 = 6$, $b_7 = 1$, $b_8 = 6$, $b_9 = 3$, $b_{10} = 4$, $b_{11} = 5$, $b_{12} = 2$...

$$(b_n) = (7, 2, 5, 4, 3, 6, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7, 2, 5, \dots).$$

Para $l = 9$, vamos escolher os termos de (a_n) de 9 em 9. Então, $b_1 = 5$, $b_2 = 6$, $b_3 = 3$, $b_4 = 2$...

$$(b_n) = (5, 6, 3, 2, 5, 6, 3, 2, 5, 6, 3, 2, 5, 6, 3, \ \dots).$$

Para $l = 11$, vamos escolher os termos de (a_n) de 11 em 11. Temos que $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = 5$, $b_4 = 6$, $b_5 = 7$, $b_6 = 6$, $b_7 = 5$, $b_8 = 4$, $b_9 = 3$, $b_{10} = 2$, $b_{11} = 1$, $b_{12} = 2$ ...

$$(b_n) = (3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Finalmente, para $l = 12$, vamos escolher os termos de (a_n) de 12 em 12. Assim, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $b_4 = 2$, ...

$$(b_n) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots).$$

2 SEQUÊNCIAS 2E: EXPLORAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesse capítulo, vamos introduzir o objeto principal do trabalho, que são as sequências 2E. Antes, precisamos definir alguns conceitos preliminares.

Definição 2.1 Seja $d \geq 1$ um número inteiro. Definimos a sequência (a_n^d) por

$$(a_n^d) = (1, 2, 3, 4, \dots, d-2, d-1, d, d-1, d-2, \dots 3, 2, 1, 2, 3, \dots)$$

É possível definir a sequência (a_n^d) de forma explícita da seguinte forma:

$$a_n^d = \begin{cases} n, se\ 1 \leq n \leq d \\ 2d-n, se\ d < n \leq 2(d-1) \end{cases}$$

e $a_{n+2(d-1)k}^d = a_n^d$ para todo $k, n \in \mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$.

Segue abaixo a definição das chamadas sequências 2E.

Definição 2.2 Sejam $d \geq 1$ um número inteiro e a sequência (a_n^d) a sequência dada na definição anterior. Dado $l \geq 1$ um número inteiro, chamamos a sequência 2E associada a l a subsequência $(b_n^{d,l})$ definida por $b_n^{d,l} = a_{nl}^d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, o n-ésimo termo da sequência 2E é igual ao nl-ésimo termo da sequência (a_n^d).

Exemplo 2.1 Vamos considerar a sequência (a_n^d) para $d = 5$. Tem-se

$$(a_n^5) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \dots)$$

Nesse exemplo, vamos analisar os casos $l = 1,2,3,4,5,6,7,8$. Para $l = 1$, temos:

$$(b_n^{5,1}) = (1, 2, 3, 4, 5, 4,3,2,1,2, \dots),$$

o que claramente podemos ver que é a própria sequência (a_n^5), já que $b_n^{5,1} = a_{n \cdot 1}^d = a_n^d$. Para $l = 2$, temos:

$$(b_n^{5,2}) = (2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, \dots).$$

Nesse caso, observamos que aparecem apenas os elementos $2, 4$. Para $l = 3$, temos:

$$(b_n^{5,3}) = (3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 3, 4, 1, \dots).$$

Nesse caso, observe que aparecem todos os elementos de 1 a 5. Para $l = 4$, temos:

$$\left(b_n^{5,4}\right) = (4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, \dots).$$

Nesse caso, também aparecem somente os elementos $2, 4$. Para $l = 5$, temos:

$$(b_n^{5,5}) = (5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 3, 4, \dots).$$

Esse é mais um caso em que todos os elementos aparecem. Para $l = 6$, temos:

$$\left(b_n^{5,6}\right) = (4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, \dots).$$

Mais um caso em que só aparecem os elementos $2, 4$. Para $l = 7$, temos:

$$(b_n^{5,7}) = (3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, \dots).$$

E assim temos mais um caso em que todos os elementos aparecem. Para $l = 8$, temos:

$$(b_n^{5,8}) = (2, 2, 2, 2, \dots).$$

Nesse último caso, só aparece o elemento 2. Todavia, veja que o número 2 aparece em algum termo da sequência 2E para todo valor de l que escolhemos entre 1 e 8. Será que isso é válido para todos os elementos d e l? Esse é chave de nosso estudo.

Iremos desenvolver outra sequência para termos um embasamento melhor e ficar um pouco mais clara a nossa ideia.

Neste exemplo, fizemos só até $l = 8$, no caso $l = 2(d - 1)$. No próximo exemplo, iremos fazer um estudo para $l > 2(d - 1)$, e veremos que a partir disso as sequências voltam a se repetir.

Exemplo 2.2 Escreva a sequência a_n^d, com $d = 4$, e encontre as suas sequências 2E associadas a l (dado abaixo).

Solução: Vamos primeiramente escrever a sequência (a_n^d), para $d = 4$.

$$(a_n^4) = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, \dots)$$

Agora iremos encontrar algumas subsequências associadas a l, com l natural e diferente de 1.

Para $l = 2$, temos:

$$(b_n^{4,2}) = (2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, \dots).$$

Para $l = 3$, temos:

$$(b_n^{4,3}) = (3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots).$$

Para $l = 4$, temos:

$$(b_n^{4,4}) = (4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, \dots).$$

Para $l = 5$, temos:

$$(b_n^{4,5}) = (3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Para $l = 6$, temos:

$$(b_n^{4,6}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots).$$

Para $l = 7$, temos:

$$(b_n^{4,7}) = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, \dots).$$

Para $l = 8$, temos:

$$(b_n^{4,8}) = (2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, 2, 2, \dots).$$

Para $l = 9$, temos:

$$(b_n^{4,9}) = (3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots).$$

Para $l = 10$, temos:

$$(b_n^{4,10}) = (4,2,2,4,2,2,4,2,2,4,2,2,4,2,2,4,2,2,4,2,2,4,2,2,4,\ldots).$$

Para $l = 11$, temos:

$$(b_n^{4,11}) = (3,4,3,2,1,2,3,4,3,2,1,2,3,4,3,2,1,2,3,4,2,1,2,3,4,\ldots).$$

Para $l = 12$, temos:

$$(b_n^{4,12}) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\ldots).$$

Analisando as subsequências acima, podemos ver que:

$$(b_n^{4,1}) = (b_n^{4,7}) = (b_n^{4,13}) = (b_n^{4,19}) = \cdots = \left(b_n^{4,(1+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

$$(b_n^{4,2}) = (b_n^{4,8}) = (b_n^{4,14}) = (b_n^{4,20}) = \cdots = \left(b_n^{4,(2+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

$$(b_n^{4,3}) = (b_n^{4,9}) = (b_n^{4,15}) = (b_n^{4,21}) = \cdots = \left(b_n^{4,(3+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

$$(b_n^{4,4}) = (b_n^{4,10}) = (b_n^{4,16}) = (b_n^{4,22}) = \cdots = \left(b_n^{4,(4+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

$$(b_n^{4,5}) = (b_n^{4,11}) = (b_n^{4,17}) = (b_n^{4,22}) = \cdots = \left(b_n^{4,(5+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

$$(b_n^{4,6}) = (b_n^{4,12}) = (b_n^{4,18}) = (b_n^{4,24}) = \cdots = \left(b_n^{4,(6+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

$$(b_n^{4,7}) = (b_n^{4,13}) = (b_n^{4,19}) = (b_n^{4,25}) = \cdots = \left(b_n^{4,(7+6k)}\right), \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

Com esse exemplo, é possível observar não apenas que existe um número finito de subsequências distintas, mas também que podemos modelar uma expressão matemática para essas subsequências. Isso evidencia que as sequências 2E são todas definidas para valores de l entre 1 e $2(d-1)$.

Exemplo 2.3 Vamos considerar agora a sequência (a_n^d) onde $d = 7$. Temos:

$(a_n^7) = (1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,\ldots)$

Agora iremos analisar somente os valores de $l = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$, pois como vimos no exemplo anterior a partir de $l = 2(d-1)$, as subsequências começam a se repetir todos os elementos (veremos mais detalhes sobre isso posteriormente quando falarmos sobre período de (a_n^d)). Para $l = 2$, temos:

$$(b_n^{7,2}) = (2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2\ \ldots).$$

Para $l = 3$, temos:

$$(b_n^{7,3}) = (3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6\ \ldots).$$

Para $l = 4$, temos:

$$(b_n^{7,4}) = (4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2\ \ldots).$$

Para $l = 5$, temos:

$$(b_n^{7,5}) = (5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,1,6,\ldots).$$

Para $l = 6$, temos:

$$(b_n^{7,6}) = (6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2\ldots).$$

Para $l = 7$, temos:

$$(b_n^{7,7}) = (7,2,5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,\ldots).$$

Para $l = 8$, temos:

$$(b_n^{7,8}) = (6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,\ldots).$$

Para $l = 9$, temos:

$$(b_n^{7,9}) = (5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,\ldots).$$

Para $l = 10$, temos:

$$(b_n^{7,10}) = (4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,\ldots).$$

Para $l = 11$, temos:

$$(b_n^{7,11}) = (3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,..).$$

Para $l = 12$, temos:

$$(b_n^{7,12}) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,\ldots).$$

Nesses dois últimos exemplos, é possível perceber que quando pegamos uma sequência 2E qualquer associada a l, podemos ter comportamentos distintos, comportamentos esses que pretendemos estudar melhor no decorrer desta dissertação. Mas o que mais nos chama a atenção é que, independentemente de como escolhemos o l, o número 2 sempre aparece nas sequências 2E. Por esse motivo, chamamos essa sequência de **Sequência 2E**. A letra E vem do que entendemos ser uma sequência de Exploração e de Explicitação.

Como essa sequência vai crescendo de 1 até o número d e, depois, decresce até 1, novamente, e assim os termos se repetem, então é observável que ela tem o que chamamos de período.

Definição 2.2 Uma sequência é dita sequência periódica quando existe um número $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+p} = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, o menor p com essa característica é chamado período da sequência.

Seja $d \geq 2$ um número inteiro. A sequência (a_n^d), definida como

$$a_n^d = (1,2,3,4,\ldots d-2, d-1, d, d-1, d-2, \ldots 3,2,1,2,3,\ldots),$$

tem período igual a $2(d-1)$, período esse que denotaremos por Π. Esse fato segue diretamente da Definição 2.1.

Exemplo 2.4 (OBMEP – 2006/Nível 3) Os termos de uma sequência são formados usando-se apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, como segue:

1º termo: 123454321

2º termo: 12345432123454321

3º termo: 1234543212345432123454321

e assim por diante. Quantas vezes o algarismo 4 aparece no termo que tem 8001 algarismos?

(A) 1000

(B) 1001

(C) 2000

(D) 2001

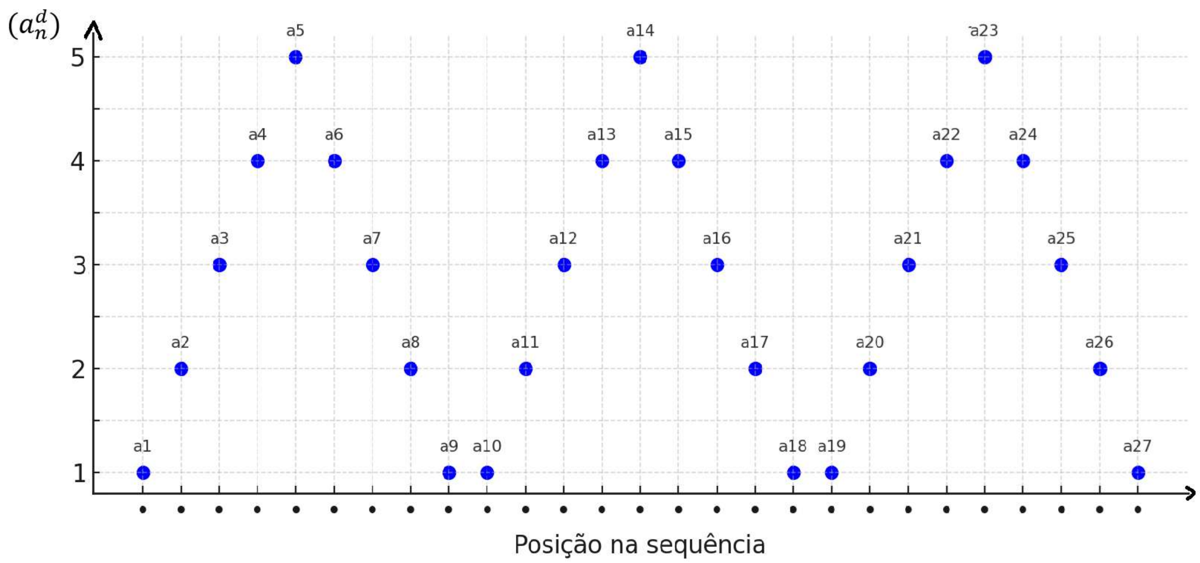
(E) 4000

Solução: Por definição, temos $\Pi = 2(5-1)$, ou seja, Π = 8. Logo, o termo que tem 8000 algarismos, tem 1000 períodos. Como temos dois 4 em cada período, temos 2000 algarismos 4. Alternativa "C".

Vamos analisar a construção da sequência (a_n^d) para entender seu padrão. Na "primeira subida", vai de 1 até d, ou seja, tem d termos. Na "primeira descida", vai de $(d-1)$ até 2, ou seja, tem $(d-2)$ termos (pois temos $(d-1)$ termos, porém temos que tirar o número 1, que, para os cálculos, não entra na descida).

Para o melhor entendimento iremos representar graficamente este enunciado.

Gráfico 1 – Sequência (a_n^d)



Fonte: Elaboração do autor.

Exemplo 2.5 Escreva as sequências (a_n^d) para $d = 9$ e $d = 13$ e verifique seus períodos.

Solução: Primeiramente, vamos escrever as sequências:

$$(a_n^9) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, \ldots)$$

Temos que $\Pi = 2(d-1)$, como $d = 9$, então $\Pi = 2(9-1) = 16$.

O que é fácil observar, pois a sequência vai de 1 até 9 e volta até o 2, pois o 1 subsequente já pertence ao novo ciclo, portanto, o período tem exatamente 16 termos ou ainda $2(9-1)$.

$$(a_n^{13}) = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,\dots)$$

De maneira, análoga a anterior temos $\Pi = 2(d-1)$, porém, agora $d = 13$, então $\Pi = 2(13-1) = 24$.

O que é fácil observar pois a sequência vai de 1 até 9 de volta até o 2, pois o 1 subsequente, já pertence ao novo ciclo, portanto, o período tem exatamente 24 termos ou ainda $2(13-1)$.

Diante do escrito até aqui, é possível observarmos algumas características as quais iremos analisar com mais detalhes a partir de agora.

A primeira e mais importante é que independentemente dos números inteiros d e l escolhidos, o número 2 sempre aparece. Isso é verificado no seguinte resultado.

Ressaltamos que, para tornar a leitura mais acessível, julgamos melhor apresentar primeiro alguns enunciados dos resultados obtidos para, posteriormente, prová-los. Antes, faremos discussões com exemplos aplicados sobre os resultados expostos.

Teorema 2.1 Dados dois números inteiros $d, l \geq 2$, então $b_{n_0}^{d,l} = 2$, para algum n_0.

Esse é o resultado que dá sentido ao nome Sequências 2E (como dissemos anteriormente). Em outras palavras, não importam os valores $d, l \geq 2$ escolhidos; o número 2 sempre irá aparecer nas respectivas sequências 2E.

Exemplo 2.6 Escreva a sequência a_n^d para $d = 8$ e verifique a veracidade do Teorema 2.1.

Solução: Vamos escrever a sequência a_n^d para $d = 8$. Temos:

$$(a_n^8) = (1,2,3,4,5,6,7,8,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,8,7,6,5,4,3,2,1,2,\dots).$$

Agora iremos escrever cada uma das sequências 2E $(b_n^{d,l})$ para $2 \leq l \leq 2(d-1) = 14$:

$$(b_n^{8,2}) = (2,4,6,8,6,4,2,2,4,6,8,6,4,2,2,4,6,8,6,4,2,2,4,6,8,6,4,2,2,4,\dots).$$

$$(b_n^{8,3}) = (3,6,7,4,1,4,7,6,3,2,5,8,5,2,3,6,7,4,1,4,7,6,3,2,5,8,5,2,3,6,\dots).$$

$$(b_n^{8,4}) = (4,8,4,2,6,6,2,4,8,4,2,6,6,2,4,8,4,2,6,6,2,4,8,4,2,6,6,2,4,8,\dots).$$

$$(b_n^{8,5}) = (5,6,1,6,5,2,7,4,3,8,3,4,7,2,5,6,1,6,5,2,7,4,3,8,3,4,7,2,5,6,\dots).$$

$$(b_n^{8,6}) = (6,4,4,6,2,8,2,6,4,4,6,2,8,2,6,4,4,6,2,8,2,6,4,4,6,2,8,2,6,4,\dots).$$

$$(b_n^{8,7}) = (7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,7,2,\dots).$$

$$(b_n^{8,8}) = 8,2,6,4,4,6,2,8,2,6,4,4,6,2,8,2,6,4,4,6,2,8,2,6,4,4,6,2,8,2,\dots).$$

$$(b_n^{8,9}) = (7,4,3,8,3,4,7,2,5,6,1,6,5,2,7,4,3,8,3,4,7,2,5,6,1,6,5,2,7,4,\dots).$$

$(b_n^{8,10}) = (6, 6, 2, 4, 8, 4, 2, 6, 6, 2, 4, 8, 4, 2, 6, 6, 2, 4, 8, 4, 2, 6, 6, 2, 4, 8, 4, 2, 6, 6\ , \dots)$.

$(b_n^{8,11}) = (5, 8, 5, 2, 3, 6, 7, 4, 1, 4, 7, 6, 3, 2, 5, 8, 5, 2, 3, 6, 7, 4, 1, 4, 7, 6, 3, 2, 5, 8, \dots)$.

$(b_n^{8,12}) = (4, 6, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, \dots)$.

$(b_n^{8,13}) = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, \dots)$.

$(b_n^{8,14}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$.

Então, como podemos ver em todos os casos, o número 2 aparece em todas as sequências 2E acima determinadas, independentemente do valor de l.

Exemplo 2.7 Considere a seguinte situação:

A academia **ODL Fitness**, para atrair os clientes que estão de férias em sua cidade, resolveu fazer a seguinte promoção em seus valores de diárias o cliente que optar em treinar na **ODL Fitness** pagará suas diárias de acordo com a tabela abaixo:

Tabela 1 – Promoção nos valores de diárias na academia ODL Fitness

Dia do mês	Valor da diária em R$
1	15
2	16
3	17
4	18
5	19
6	18
7	17
8	16
9	15
10	16
11	17
12	18
13	19
14	18
15	17
16	16
17	15
18	16
19	17
20	18

21	19
22	18
23	17
24	16
25	15
26	16
27	17
28	18
29	19
30	18

Fonte: Elaboração do autor.

Supondo que os clientes sejam usuários fiéis, ou seja, treinam em um certo padrão, uns treinam de 2 em 2 dias, outros de 3 em 3 dias, outros de 4 em 4 dias, e assim sucessivamente, com base nos dados da tabela e na rotina dos clientes, responda as seguintes questões.

a) É possível um cliente pagar sempre R$ 15,00 na diária?

b) O cliente tem que treinar de quantos em quantos dias para que ele pague todos os valores de diárias?

c) O cliente deve treinar de quantos em quantos dias para pagar sempre o mesmo valor?

d) Qual valor sempre será pago independente de quantos em quantos dias o cliente treine?

Solução: Vamos primeiramente escrever as sequências que representam os valores a serem pagos em cada dia do mês.

$$(a_n) = (15, 16, 17, 18, 19, 18, 17, 16, 15\ , 16, 17, 18, 19, 18, 17, 16, \dots).$$

Vamos escrever na nossa nomenclatura como:

$$(a_n^5) = (15, 16, 17, 18, 19, 18, 17, 16, 15\ , 16, 17, 18, 19, 18, 17, 16, \dots).$$

Agora analisando a situação de cada cliente com treinos distintos, tome primeiro aquele que treina de 2 em 2 dias. Ou seja, vamos encontrar a sequência 2E para $d = 5$ e $l = 2$.

$$\left(b_n^{5,2}\right) = \ (16, 18, 18, 16, 16, 18, 18, 16, \dots).$$

Agora iremos analisar como fica a situação do cliente que treina de 3 em 3 dias, ou seja, $d = 5$ e $l = 3$. Tem-se

$$\left(b_n^{5,3}\right) = \ (17, 18, 15, 18, 17, 16, 19, 16, \dots).$$

Agora iremos analisar como fica a situação do cliente que treina de 4 em 4 dias, ou seja, $d = 5$ e $l = 4$.

$$(b_n^{5,4}) = (18, 16, 18, 16, 18, 16, 18, \dots).$$

Agora iremos analisar como fica a situação do cliente que treina de 5 em 5 dias, ou seja, $d = 5$ e $l = 5$.

$$(b_n^{5,5}) = (19, 16, 17, 18, 15, 18, 17, 16, \dots).$$

Agora iremos analisar como fica a situação do cliente que treina de 6 em 6 dias, ou seja, $d = 5$ e $l = 6$.

$$\left(b_n^{5,6}\right) = (18, 18, 16, 16, 18, 18, 16, 16, \dots).$$

Agora iremos analisar como fica a situação do cliente que treina de 7 em 7 dias, ou seja, $d = 5$ e $l = 7$.

$$(b_n^{5,7}) = (17, 18, 19, 18, 17, 16, 15, 16, 17, \dots).$$

Agora iremos analisar como fica a situação do cliente que treina de 8 em 8 dias, ou seja, $d = 5$ e $l = 8$.

$$\left(b_n^{5,8}\right) = (16, 16, 16, 16, 16, 16, \dots).$$

Agora podemos analisar cada situação com mais propriedade.

a) Não, pois de qualquer maneira em algum dia o cliente irá pagar R$ 16,00 (como mostraremos no Teorema 2.1, olhando para o segundo termo).

b) O cliente deverá treinar todos os dias, de 3 em 3 dias, de 5 em 5 dias ou de 7 em 7 dias ***(ainda uma conjectura para o caso geral).***

Conjectura: Se $l = \Pi \pm 1$, necessariamente, todos os termos de (a_n^d) também aparecem na sequência 2E $(b_n^{d,l})$.

c) O cliente deve treinar de 8 em 8 dias, ou seja, de $l(= 2(d-1))$ em l dias (veja o Teorema 2.2).

d) Será de R$ 16,00 (veja o Teorema 2.1).

Teorema 2.2 Sejam d, l números inteiros positivos. Se $d \geq 2$ e $l = 2(d-1)$, então $b_n^{d,l} = 2$ para todo $n \geq 1$. Ou seja, a sequência $2E$ associada a l é constante e igual a 2.

O exemplo a seguir ilustra o resultado acima.

Exemplo 2.8 Dadas as sequências (a_n^5), $d = 5$, e (a_n^7), $d = 7$, encontre as sequências 2E $\left(b_n^{d,2(d-1)}\right)$ com $d = 5$ e $d = 7$.

Solução: Primeiramente, e vamos escrever a sequência(a_n^5), assim, teremos:

$$(a_n^5) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, \dots)$$

Agora, se observarmos temos que $\left(a_n^{d,2(d-1)}\right) = \left(a_n^{5,2(5-1)}\right) = \left(a_n^{5,8}\right)$. Vamos determinar a sequência 2E $\left(b_n^{5,8}\right)$. Temos $(b_n^{5,8}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 \dots)$.

Agora vamos escrever também a sequência(a_n^d), como, $d = 7$, temos então que $\left(a_n^{d,2(d-1)}\right) = (a_n^{7,2(7-1)})$ ou seja $(a_n^{7,12})$, portanto vamos escrever esta sequência, mas primeiro vamos escrever somente a sequência (a_n^7).

$(a_n^7) = (1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4, \dots)$

Agora escrevendo a sequência $\left(a_n^{7,12}\right)$, temos:

$$(a_n^{7,12}) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \dots).$$

Como vimos, quando $l = 2(d-1)$, independente do valor que tomamos para d, a sequência $2E$ é sempre constante e igual a 2, como afirma o Teorema 2.2.

Teorema 2.3 Dados $d \geq 2$ e $l = d - 1$, tem-se

$$b_n^{d,l} = \begin{cases} l, se\ n \text{ é } ímpar \\ 2, \quad se\ n \text{ é } par \end{cases}.$$

Exemplo 2.9 Vamos verificar o teorema anterior para a sequência (a_n^d) para $d = 6$ e para $d = 11$.

Solução: Para $d = 6$, temos:

$$(a_n^6) = (1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,5,4,3,2, \dots).$$

Fazendo $l = d - 1 = 6 - 1 = 5$. Logo,

$$(b_n^{6,5}) = (5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2,5,2, \dots).$$

E para $d = 11$, temos:

$$(a_n^{11}) = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,8,9, \dots).$$

Agora fazendo $l = d - 1$, temos $l = 11 - 1 = 10$. Assim,

$$(b_n^{11,10}) = (10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10,2,10, \dots).$$

Como vimos nesse exemplo, a conclusão do teorema é verdadeira.

Exemplo 2.10 A empresa DOL contratou 7 vigilantes para trabalharem em um revezamento de 12h contínuas para cada vigilante. Paulo iniciou o plantão às 00:00 de domingo. Depois que todos trabalharem em seus plantões, Paulo irá iniciar seu plantão novamente às 12:00 de quarta, e assim sucessivamente. Nessas condições, verifique se Paulo irá trabalhar no 1000º dia.

Solução: Levando em consideração a diferença de tempo (em horas) de 0 hora de domingo, temos o seguinte:

Diferença de 0:00 de domingo

0 de domingo, diferença = 0 (**Paulo**, vigilante 1).

12 de domingo, diferença = 12 (vigilante 2).

0 de segunda, diferença = 24 (vigilante 3).

12 de segunda, diferença = 36 (vigilante 4).

0 de terça, diferença 48 (vigilante 5).

12 de terça, diferença 60 (vigilante 6).

0 de quarta, diferença = 72 (vigilante 7).

12 de quarta, diferença 84 (**Paulo**, vigilante 1).

0 de quinta, diferença =72 (vigilante 2).

12 de quinta, diferença 60 (vigilante 3).

0 de sexta, diferença 48 (vigilante 4).

12 de sexta, diferença =36 (vigilante 5).

0 de sábado, diferença =24 (vigilante 6).

12 de sábado, diferença = 12 (vigilante 7).

Montando a sequência com a diferença (em horas) para 00:00 de domingo, temos

0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 72, 60, 48, 36, 24, 12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 72, 60, 48, 36, 24, 12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 72, 60, 48, 36, 24, 12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 72, 60, 48, 36, 24, 12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 72, 60, 48, 36, 24, 12, 0, ...

Como a sequência acima tem as características da (a_n^d), com $d = 8$ e a sequência 2E associada para $l = d - 1 = 7$, pelo Teorema 2.3, temos que

$$b_n^{d,l} = \begin{cases} l, se\ n \text{ é } ímpar \\ 2, \quad\quad se\ n \text{ é } par \end{cases},$$

onde estamos olhando a igualdade acima de forma posicional, isto é, o valor 2 significa o segundo termo da sequência (12), enquanto o valor l significa o termo na posição l (72).

Com isso, se for um plantão ímpar, Paulo entra no trabalho a 0:00 de domingo, e, se for um plantão par, Paulo entra no trabalho às 12:00 da quarta, como o milésimo dia é uma sexta feira, pois 1000 dividido por 7 deixa resto 6, então Paulo não trabalhará no milésimo dia.

Teorema 2.4 Sejam $d, l \geq 2$ números inteiros. Se a igualdade entre as sequências 2E $b_n^{d,l} = b_n^{l,d}$ é verdadeira, então $d = l$.

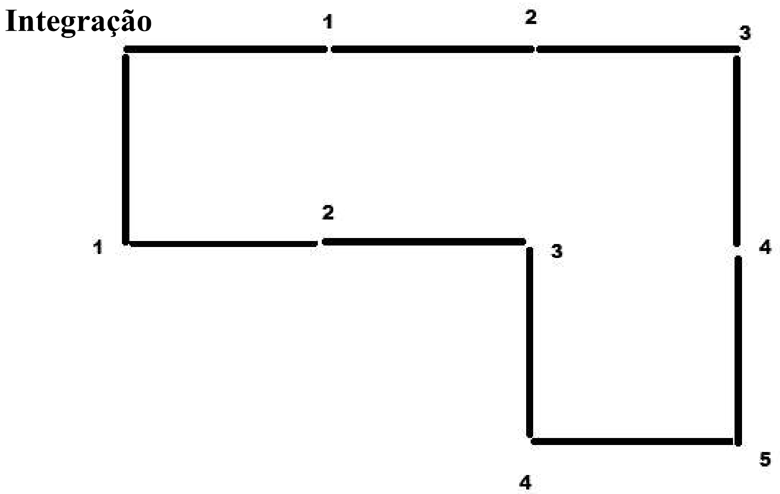
Exemplo 2.11 Matheus e Gabriela estão estudando padrões numéricos cada um vai fazer uma Sequência 2E, mas usando parâmetros possivelmente diferentes. Gabriela usa $d = 6$ e $l = 9$ enquanto Matheus usa $d = 8$ e $l = 13$. Eles percebem que, para os primeiros termos, suas sequências parecem coincidir, e resolvem verificar se isso é verdade para todos os n termos. Pelo Teorema 2.4, se as sequências coincidirem para todos os n, então necessariamente $d = l$. Como no exemplo $d \neq l$, o teorema garante que, em algum momento, as sequências terão termos distintos ou seja, não são idênticas para todos os termos.

Proposição 2.1 Dados dois números inteiros $d, l \geq 4$, com $l \leq 2(d-1)$, considere o número $mmc[l, 2(d-1)] = l \cdot \rho$ para algum inteiro ρ. Então, o período da sequência $2E$ $(b_n^{d,l})$ é igual a ρ.

Exemplo 2.12 Considere o seguinte problema.

Para testar um sistema de alarme contra assalto, a empresa de ônibus ODL resolveu soar o alarme a cada 4km rodados. A imagem a seguir mostra a distância (em km) do ônibus até a integração.

Figura 2 – Integração



Fonte: Elaborado pelo autor.

Supondo que o primeiro sinal sonoro ocorra na posição 3km, quantos km irá percorrer o ônibus até que o sinal soe novamente na posição 3km?

Solução: Bem, primeiramente vamos encontrar a sequência (a_n^d) das posições do ônibus. Temos $d = 6$, pois a posição zero (Integração) também conta. Logo,

$$(a_n^7) = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, ...$$

Como o sinal soará a cada 4km, então $l = 4$. Pelo Proposição 2.1, que garante que podemos escrever $\rho = \frac{mmc[l,2(d-1)]}{l}$, onde ρ é o ciclo do sinal sonoro. Como $d = 6$ e $\Pi = 2(\mathrm{d}-1) = 10$, para $l = 4$, temos que $\rho = \frac{mmc(4,10)}{4} = \frac{20}{4}$, ou seja, $\rho = 5$. Portanto, após o primeiro sinal (na posição 3km), o 5º sinal sonoro será na posição 3km também.

Veja uma solução mais simples.

Como $(a_n^7) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, ...)$ e $l = 4$, então $(b_n^{7,4}) = (3, 3, 1, 5, 1, 3 ...)$ e, com isso, vemos que, após o soar na posição 3km, o primeiro soar será na posição 5km, o segundo soar será na posição 1km ,e por fim, o terceiro soar será na posição 3km.

Deixamos a próxima aplicação como exercício ao leitor interessado.

Exemplo 2.13 Depois da queda da ponte Juscelino Kubitschek de Oliveira em Estreito, as ambulâncias de Imperatriz vão até Estreito e voltam percorrendo 6 cidades: Imperatriz(I), Edson Lobão(L), Ribamar Fiquene(R), Campestre(C), Porto Franco(P) e Estreito(E) em uma estrada única. Após chegar à cidade de Estreito, elas retornam pelo mesmo caminho, fazendo o seguinte percurso total (ida e volta): I, L, R, C, P, E, P, C, R, L, I. As ambulâncias estão sendo rastreadas por rádio, mas, por limitações do sistema, o sinal é enviado a cada 4 cidades.

Após quantas observações, o monitor verá a ambulância passar novamente no mesmo povoado da primeira leitura?

O próximo capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos necessários à compreensão ampla do escopo da pesquisa. Nesse contexto, daremos a devida ênfase às propriedades específicas das chamadas Sequências 2E. Além do mais, ele será dedicado à exposição minuciosa das demonstrações relativas aos resultados obtidos ao longo da pesquisa. Por fim, serão discutidas, de maneira geral, as conclusões e as principais contribuições advindas deste estudo.

3 EXPLICITAÇÃO DOS RESULTADOS E PROBLEMAS EM ABERTO

Neste capítulo, exploraremos os fundamentos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e de Máximo Divisor Comum (MDC) entre números inteiros, apresentando definições rigorosas e exemplos numéricos que ilustram a relação entre esses conceitos e as sequências 2E. Esses conceitos servirão como base, pois serão utilizados posteriormente na demonstração de resultados mais complexos, como a análise de periodicidade em sequências e a demonstração de alguns teoremas. Faremos também as provas dos resultados apresentados no capítulo anterior.

Agora iremos entrar um universo fascinante, onde a arte de reconhecer padrões em sequências numéricas se transforma em uma aventura intelectual repleta de descobertas e desafios instigantes.

Este não é apenas um estudo abstrato, é uma exploração única que combina criatividade e rigor matemático, revelando conexões surpreendentes e abrindo portas para novos horizontes do conhecimento. Prepare-se para:

- Desvendar a beleza oculta em sequências aparentemente simples.
- Enfrentar problemas que testarão sua intuição e habilidades analíticas.
- Descobrir como padrões familiares podem levar a resultados profundos e inesperados.

Seja bem-vindo(a) a uma experiência que vai muito além dos números: é uma verdadeira celebração do pensamento lógico e da curiosidade matemática.

3.1 PRINCIPAIS RESULTADOS

Dado um número inteiro $d \geq 2$, recordamos a definição da sequência (a_n^d) (veja a Definição 2.1):

$$a_n^d = \begin{cases} n, se\ 1 \leq n \leq d \\ 2d - n, se\ d < n \leq 2(d-1) \end{cases}$$

e $a_{n+2(d-1)k}^d = a_n^d$ para todo $k, n \in \mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$.

Note que essa sequência é periódica cujo período $\Pi = 2(d-1)$, pois, quando a sequência sobe $(a_n^d = n, se\ 0 \leq n \leq d)$, temos d termos; quando ela desce $(a_n^d = 2d - n, se\ d \leq n \leq 2(d-1))$, temos $(d-2)$ termos. A partir daí, ela começa a se repetir. Assim, a quantidade de termos nesse período é dada pala soma da quantidade de termos da “subida” $(1\ até\ d)$ e na “descida” $(2\ até\ d-1)$, isto é, $d + (d-2) = 2(d-1)$.

Exemplo 3.1 Um nadador se move em uma piscina de 8 metros de comprimento, com velocidade constante de 1 m/s. Ele parte da posição inicial 1 (extremidade esquerda da piscina) e se desloca para a direita até atingir a extremidade oposta ($8m$), onde toca a borda e imediatamente inverte o sentido, retornando para a extremidade inicial. Esse padrão de movimento (ida e volta) se repete indefinidamente.

Construa a sequência exata das posições do nadador a cada segundo (n representa o tempo em segundos), excluindo o ponto 0 e

Solução: Sabemos que:

$$(a_n^d) = \begin{cases} n, se\ 0 \leq n \leq d\ (ida) \\ 2d - n, se\ d \leq n \leq 2(d-1)(volta) \end{cases}$$

Como ele já parte da posição 1, então $a_1^9 = 1$, e como sua velocidade é de 1m/s, então suas respectivas posições a cada segundo serão dadas por

$$(a_n^9) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, ...).$$

Agora, dado $l \geq 1$ um número inteiro, chamamos a sequência 2E associada a l a subsequência $(b_n^{d,l})$ definida por $b_n^{d,l} = a_{n \cdot l}^d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, o n-ésimo termo da sequência 2E é igual ao nl-ésimo termo da sequência (a_n^d).

Teorema 2.1 Dados dois números inteiros $d, l \geq 2$, então $b_{n_0}^{d,l} = 2$ para algum n_0.

Demonstração. A sequência $(1, 2, 3, \dots, d-1, d, d-1, \dots, 3, 2, \dots)$ tem período igual a $2(d-1)$. Desse modo, temos que o termo com índice $2(d-1)$ é igual 2. Seja $n_0 = l \cdot [2(d-1)]$, e vamos mostrar que $b_{n_0}^{d,l} = 2$. De fato, por definição da subsequência $(b_n^{d,l})$, o índice n remete à quantidade de vezes que se conta l dentre os termos da sequência $(1, 2, 3, \dots, d-1, d, d-1, \dots, 3, 2, \dots)$. Assim, $b_{2(d-1)}^{d,l}$ é o termo $2(d-1) \cdot l$ na contagem. Dessa maneira, esse resultado é igual a 2, uma vez que esse termo pode ser entendido como o $2(d-1)$-ésimo elemento contado l vezes. ■

Exemplo 3.2 Usando o enunciado do Exemplo 3.1**,** verifique a veracidade do Teorema 2.1 para alguns fotógrafos que estão à beira da piscina e que batem fotos sucessivas a cada l segundos, sendo $2 \leq l \leq 2(d-1)$.

Solução: Já sabemos que

$a_n^d = (a_n^9) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, \dots)$.

Assim sendo, basta calcularmos as subsequências $(b_n^{9,l})$ para $2 \leq l \leq 2(d-1)$.

$$(b_n^{9,2}) = (2, 4, 6, 8, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8, 8, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 8, 8, 6 \dots).$$

$$(b_n^{9,3}) = (3, 6, 9, 6, 3, 2, 5, 8, 7, 4, 1, 4, 7, 8, 5, 2, 3, 6, 9, 6, 3, 2, 5, 8, 7, 4, 1, 4, 7, 8 \dots).$$

$$(b_n^{9,4}) = (4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8 \dots).$$

$$(b_n^{9,5}) = (5, 8, 3, 4, 9, 4, 3, 8, 5, 2, 7, 6, 1, 6, 7, 2, 5, 8, 3, 4, 9, 4, 3, 8, 5, 2, 7, 6, 1, 6 \dots).$$

$$(b_n^{9,6}) = (6,6,2,8,4,4,8,2,6,6,2,8,4,4,8,2,6,6,2,8,4,4,8,2,6,6,2,8,4,4\ldots).$$

$$(b_n^{9,7}) = (7,4,5,6,3,8,1,8,3,6,5,4,7,2,9,2,7,4,5,6,3,8,1,8,3,6,5,4,7,2\ldots).$$

$$(b_n^{9,8}) = (8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2,8,2\ldots).$$

$$(b_n^{9,9}) = (9,2,7,4,5,6,3,8,1,8,3,6,5,4,7,2,9,2,7,4,5,6,3,8,1,8,3,6,5,4\ldots).$$

$$(b_n^{9,10}) = (8,4,4,8,2,6,6,2,8,4,4,8,2,6,6,2,8,4,4,8,2,6,6,2,8,4,4,8,2,6\ldots).$$

$$(b_n^{9,11}) = (7,6,1,6,7,2,5,8,3,4,9,4,3,8,5,2,7,6,1,6,7,2,5,8,3,4,9,4,3,8\ldots).$$

$$(b_n^{9,12}) = (6,8,4,2,6,8,4,2,6,8,4,2,6,8,4,2,6,8,4,2,6,8,4,2,6,8,4,2,6,8\ldots).$$

$$(b_n^{9,13}) = (5,8,7,4,1,4,7,8,5,2,3,6,9,6,3,2,5,8,7,4,1,4,7,8,5,2,3,6,9,6\ldots).$$

$$\left(b_n^{9,14}\right) = (4,6,8,8,6,4,2,2,4,6,8,8,6,4,2,2,4,6,8,8,6,4,2,2,4,6,8,8,6,4\ldots).$$

$$\left(b_n^{9,15}\right) = (3,4,5,6,7,8,9,8,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,8,9,8,7,6,5,4,3,2\ldots).$$

$$\left(b_n^{9,16}\right) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\ldots).$$

Observe que em todas as subsequências, o 2 sempre aparece para algum n_0, como nos diz o Teorema 2.1.

Teorema 2.2 Sejam d, l números inteiros positivos. Se $d \geq 2$ e $l = 2(d-1)$, então $a_n^{d,l} = 2$ para todo $n \geq 1$. Ou seja, a sequência $2E$ associada a d, l dados é constante e igual a 2.

Demonstração. Considere a sequência (a_n^d), com $n \geq 1$, e $d \geq 2$, escrita da seguinte maneira

$$(a_n^d) = (1,2,3,4,\ldots,d-3,d-2,d-1,d,d-1,d-2,d-3,\ldots,4,3,2,1,2,3,\ldots).$$

Observe que essa sequência é periódica de período igual a $\Pi = 2(d-1)$. Para $l = 2(d-1)$, obtém-se $b_1^{d,l} = a_{2(d-1)}^d = 2$, que é o último termo que aparece no período da sequência (a_n^d), e, então, a sequência passa a repetir seus termos novamente e vai até o 2, seguindo esse ciclo. Logo, como $b_n^{d,l} = a_{n\cdot 2(d-1)}^d$, obtemos $\left(b_n^{d,l}\right) = (2,2,2,2,\ldots)$ como queríamos mostrar.

Exemplo 3.3 No Colégio Estadual Buriti, o professor Iteglan levou seus alunos para observar o ciclo da Lua por 28 dias consecutivos, começando no dia da Lua Nova (dia 1). Os alunos notaram que, a cada dia, a Lua apresentava um aumento (em percentual) aproximadamente como mostra a tabela em relação à sua superfície iluminada, até atingir 100% no 14º dia (Lua Cheia), e então começou a minguar no mesmo ritmo até zerar novamente no 28º dia. Durante a observação, o professor introduziu uma sequência chamada (a_n^d), apresentada pelo professor Onofre com período $\Pi = 2(d-1)$, usada para analisar padrões que se repetem ciclicamente na natureza, como as fases da Lua. Ele explicou que a subsequência $(b_n^{d,l})$ da (a_n^d) pode ser usada para marcar os dias em que a Lua apresenta percentuais similares de iluminação.

De quantos em quantos dias deveriam ser feitas as observações de modo a sempre ser visto 1,25% de sua superfície iluminada?

Solução: Para resolver essa questão, vamos chamar os termos da sequência (a_n^d) de P_1 para 0%, P_2 para 1,25%, P_3 para 4,95% e assim sucessivamente. Temos a Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Fases Lunar

Dias de observação	P_n	Percentual da superfície iluminada	Fase da lua
1	P_1	0	Lua Nova
2	P_2	1,25	Crescente Inicial
3	P_3	4,95	Crescente Inicial
4	P_4	10,91	Crescente Inicial
5	P_5	18,83	Crescente Inicial
6	P_6	28,31	Crescente Inicial
7	P_7	38,87	Crescente Gibosa
8	P_8	50,00	Quarto Crescente
9	P_9	61,13	Crescente Gibosa
10	P_{10}	71,69	Crescente Gibosa
11	P_{11}	81,18	Crescente Gibosa
12	P_{12}	89,09	Crescente Gibosa
13	P_{13}	95,05	Crescente Gibosa
14	P_{14}	98,75	Crescente Gibosa
15	P_{15}	100,00	Lua Cheia
16	P_{14}	98,75	Minguante Gibosa
17	P_{13}	95,05	Minguante Gibosa
18	P_{12}	89,09	Minguante Gibosa
19	P_{11}	81,18	Minguante Gibosa
20	P_{10}	71,69	Minguante Gibosa
21	P_9	61,13	Minguante Gibosa
22	P_8	50,00	Quarto Minguante
23	P_7	38,87	Minguante Final
24	P_6	28,31	Minguante Final
25	P_5	18,83	Minguante Final
26	P_4	10,91	Minguante Final
27	P_3	4,95	Minguante Final
28	P_2	1,25	Minguante Final
29	P_1	0	Lua nova

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, escrevemos nossa sequência (a_n^d), para $d = P_{14}$:

$$a_n^{P_{15}} = \ P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_{14}, P_{15}, P_{14}, \dots, P_3, P_2, \dots$$

e começa um novo ciclo. Como queremos que sempre seja visto 1,25% de sua superfície iluminada, então queremos que nossa observação seja sempre P_2. Pelo Teorema 2.2, basta que tomemos $l = 2(d-1)$. Como $d = 15$, tem-se $l = 2(15-1)$, ou seja, $l = 28$. Logo, temos $(b_n^{P_{15},28}) = (P_2, P_2, P_2, P_2, P_2, \dots)$. Portanto, a cada 28 dias temos uma visão de aproximadamente 1,25% da superfície iluminada da lua.

Teorema 2.3 Dados $d\ \geq 2$ e $l = d - 1$, tem-se

$$b_n^{d,l} = \begin{cases} l, se\ n \text{ é } ímpar \\ 2,\ \ se\ n \text{ é } par \end{cases}.$$

Demonstração. Considere $d \geq 2$ e $l = d - 1$. Seja a sequência

$$(a_n^d) = (1, 2, 3, 4, \dots, d-2, d-1, d, d-1, d-2,\ \ \dots, 4, 3, 2, \dots).$$

Como $l = d - 1$, então podemos reescrever a sequência (a_n^d) substituindo l por $d - 1$, ou seja, $(a_n^d) =\ (1, 2, 3, 4, \dots d-3, d-2, l, d, l, d-2, d-3, \dots 4, 3, 2, \dots)$.

Como $l = d - 1$, isso implica em $d = l + 1$, como a sequência tem $2(d-1)$ termos, então tem $2(l+1-1)$ termos, ou seja, $2l$ termos, e por definição temos $b_1^{d,l} = l$ e $b_2^{d,l} = 2$ que é exatamente o último termo, antes de iniciar novamente a sequência. Assim,

$$b_n^{d,l} = \begin{cases} l, se\ n \text{ é } ímpar \\ 2,\ \ se\ n \text{ é } par \end{cases}.$$

■

Exemplo 3.4. Londres está localizada aproximadamente na latitude 51,5° N. Durante o ano, a duração do dia varia consideravelmente, chegando a cerca de 8 horas de luz solar no solstício de inverno (cerca de 21 de dezembro) e aproximadamente 17 horas no solstício de verão (cerca de 21 de junho). Para entender melhor, observe a tabela 3 a seguir.

Tabela 3 - Duração aproximada do dia em Londres

Dia/mês	Duração aproximada do dia (em horas)	Representação didática
21/janeiro	8,4	T_1
21/fevereiro	10,4	T_2
21/março	12,3	T_3
21/abril	14,3	T_4
21/maio	16,4	T_5
21/junho	17,2	T_6

21/julho	16,4	T_5
21/agosto	14,3	T_4
21/setembro	12,3	T_3
21/outubro	10,4	T_2
21/novembro	8,4	T_1

Fonte: Elaborada pelo autor.

O astrônomo Edwin vai para um ponto de observação nos dias 21 de cada mês, com exceção de dezembro, quando ele está de férias. Edwin leva sua esposa Thaís a cada 5 meses para esse ponto de observação.

Em quais meses Thaís irá visitar o trabalho de Edwin?

Solução: Montando a nossa sequência (a_n^d) para $d = T_6$, teremos

$$\left(a_n^{T_6}\right) = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_5, T_4, T_3, T_2, \dots).$$

Como Thaís irá com ele a cada 5 meses, então temos $l = 5$, ou seja, $l = d - 1 = 6 - 1$, que pelo Teorema 2.3, pode-se concluir que Thaís irá com Edwin nos meses l T_5, mês de maio, ou T_2, mês de outubro, como claramente é esperado.

Teorema 2.4 Sejam $d, l \geq 2$ números inteiros. Se a igualdade $b_n^{d,l} = b_n^{l,d}$ entre as sequências $2E$ é verdadeira, então $d = l$.

Demonstração. Suponha por contradição que $l < d$. Como

$$(a_n^d) = (1, 2, 3, \dots, d-1, d, d-1, \dots, 3, 2 \dots)$$

e $l < d$, então l está antes de d na sequência. Assim, para $n = 1$, temos $a_{1\cdot l}^d = b_1^{d,l} = l$. Por outro lado, $(a_n^l) = (1, 2, 3, \dots, l-1, l, l-1, \dots, 3, 2 \dots)$. Nessa sequência disposta, todos os valores de números inteiros são menores do que ou iguais a l. Mas, nesse caso, $l = b_1^{d,l} = b_1^{l,d} = a_{d\cdot 1}^l = b_d^l$. Veja que, na sequência (a_n^l) acima, o número l aparece apenas uma vez a cada período $2(l-1)$. Assim, como $a_d^l = l$, isso só ocorre quando $d = l + k \cdot (2(l - 1)), k \geq 0$ um inteiro. Como supomos $l < d$, segue que

$$l + k(2(l - 1) = d > l \Rightarrow k \geq 1.$$

Então, segue do fato de

$$d = l + k(2(l - 1)) \geq l + 2(l - 1) = 3l - 2 \geq 2l \, (pois \, l \geq 2)$$

que, escolhendo $n = 2$, $b_2^{d,l} = 2l = b_2^{l,d}$, mas $2l$ não está na sequência $(1, 2, 3, \dots, (l-1), l, (l-1), \dots 3, 2 \dots$. Por isso, chegamos a um absurdo. Logo, não pode valer $l < d$, ou seja, $l \geq d$. Da mesma forma, não vale $d > l$. Portanto, $d = l$. ■

Exemplo 3.5 A empresa de monitoramento ODL precisa montar escalas de revezamento para dois funcionários chamados Carlos e Lucas, seguindo uma lógica cíclica baseada em padrões repetitivos como o da sequência 2E. Cada funcionário tem um número de dias de trabalho e folga diferentes:

- Carlos trabalha em um ciclo de d dias.
- Lucas trabalha em um ciclo de l dias.

A empresa quer saber se as escalas de ambos se alinham perfeitamente todos os dias, ou seja, se os padrões de presença e ausência são iguais. A escala de cada um é organizada pela subsequência $(b_n^{d,l})$ que define a presença (ou ausência) no dia n. A empresa observa que as escalas de Carlos e Lucas são idênticas em todos os dias, ou seja $(b_n^{d,l}) = (b_n^{l,d})$.

É possível que Carlos e Lucas tenham escalas diferentes (com $d \neq l$) e ainda assim coincidam em todos os dias?

Solução: Pelo Teorema 2.4, se $(b_n^{d,l}) = (b_n^{l,d})$ para todos os dias n, então necessariamente $d = l$. Logo, as escalas só são idênticas se os ciclos forem exatamente do mesmo comprimento.

Verifica-se, desse modo, que o presente resultado demonstra que a ordem dos parâmetros d e l na sequência tem um significado crucial e que trocar as posições desses parâmetros resulta em sequências diferentes, a menos que $d = l$.

A proposição a seguir foi chave para a construção da proposta didática que trazemos neste trabalho. Ela relaciona os conceitos de MMC e (portanto) de MDC com as sequências 2E. Essa relação produz uma maneira alternativa e inovadora, diferente de todas aquelas que encontramos na literatura atual (Divisões Sucessivas pelo Algoritmo de Euclides, Fatoração em Primos ou Explicitação de Divisores).

Com esse resultado em mãos, foi possível desenvolver um *software* que determina o MMC de dois números inteiros apenas utilizando contagem de termos de sequências 2E específicas. Veremos mais detalhes sobre isso no próximo capítulo.

Proposição 2.1 *(Teorema 1.10 de (Alisson, 2023, p. 10))* Dados dois números inteiros $d,l \geq 4$, com $l \leq 2(d-1)$, considere o número $mmc[l, 2(d-1)] = l \cdot \rho$, para algum inteiro ρ. Então, o período da subsequência $2E$ $(b_n^{d,l})$ é igual a ρ.

Exemplo 3.6 Na fazenda do professor José Carlos, há um sistema de irrigação e iluminação que alterna em ciclos regulares para plantas que crescem melhor com alternância de luz. A iluminação funciona num padrão cíclico de liga/desliga baseado numa sequência com período Π, onde começa no primeiro viveiro, vai até o sexto viveiro e volta até o primeiro. Um técnico programa o sistema para ligar a irrigação a cada 4 horas (pulando 4 viveiros na sequência). O professor quer saber quando a irrigação passar pelo viveiro 6, após quantas horas a irrigação vai cair exatamente nos mesmos momentos da luz novamente no viveiro 6?

Solução: Como $d = 6$, temos $(a_n^6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, \dots)$ e tomando $l = 4$, temos $(b_n^{6,4}) = (4, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 2, 6 \dots)$. Temos ainda $\Pi = 2(6 - 1) = 10$. Como $mmc(4, 10) = 20$, pela Proposição 2.1, temos que $20 = 4\rho$, ou seja, $\rho = 5$. Então, a irrigação vai coincidir com o mesmo padrão de luz a cada 5 ativações da irrigação, ou seja, a cada $4 \cdot 5$ horas, portanto, 20 horas.

Demonstração. Pela definição do período ρ, tem-se que, para todo $n \geq 1$, assim

$$b_{n+\rho}^{d,l} = b_n^{d,l}.$$

Segue, então, da definição da sequência 2E $b_n^{d,l}$ que, para todo n ≥ 1,

$$a_{(n+\rho)\cdot l}^{d} = a_{n\cdot l}^{d},$$

isto é, para todo n ≥ 1,

$$a_{n\cdot l+\rho\cdot l}^{d} = a_{n\cdot l}^{d}.$$

Nesse momento, vamos separar em alguns casos possíveis para o valor de $l = 2(d - 1)$.

Caso 1) $l = 2(d - 1)$. Nessa situação, segue do Teorema 2.2 que o período da sequência 2E $\left(b_n^{d,l}\right)$ é 1. Também temos que $mmc(l, \Pi) = \Pi = l \cdot 1$, mostrando que $\rho = 1$ Logo, o resultado está provado para esse caso.

Caso 2) $l = d - 1$ Nesse caso, temos $mmc(l, 2(d - 1)) = 2(d - 1) = l \cdot 2\, e\, \rho = 2$. Além disso, $b_n^{d,l} = a_{n(d-1)}^{d} = d - 1$ se n é ímpar e 2 se n é par. Com isso, $\rho = 2$, pois $d - 1$ e diferente de 2 já que $d \geq 4$. Isso mostra que o teorema é válido para esse caso também.

Caso 3) $l = d$. Aqui, analisamos a sequência (a_n^d) que é dada por

$$(a_n^d) = (1, 2, 3, 4, \dots, d - 2, d - 1, d, d - 1, d - 2, \dots 3, 2, 1, 2, 3, \dots).$$

Note que o número $l = d$ só se repete 1 vez a cada sequência dos números que aparecem acima, que são apenas $1, 2, 3, \dots, d$. Assim, para que, por exemplo, $a_{l+\rho\cdot l}^{d} = a_l^d = l = d$. Assim, temos necessariamente que o valor $\rho \cdot l$ deve ser múltiplo do período da sequência (a_n^d) isto é, $\rho \cdot l = 2(d - 1) \cdot \gamma$ ara algum inteiro γ.

Caso 4) $2 \leq l < d - 1$. Nesse cenário, temos que a sequência (a_n^d) é dada por

$$(a_n^d) = (1, 2, 3, 4, \dots, d - 2, d - 1, d, d - 1, d - 2, \dots 3, 2, 1, 2, 3, \dots).$$

Aparecem dois valores de l nesse período destacado acima: um antes de d e o outro depois. Como é válida para todo n e, para $n = 1$, $\left(a_l^d\right) = l \leq d$, então, para que$a_{l+\rho\cdot l} = l$, há duas possibilidades:

Possibilidade 1: O valor de $\rho \cdot l$ é tal que, somado com l no índice da sequência, resulta exatamente no mesmo l inicial (o primeiro que aparece na lista). Se assim for, o valor deve ser igual a um múltiplo do período da sequência (a_n^d), pois é a única forma da contagem realizar um ciclo completo, isto é, $\rho \cdot l = 2(d-1) \cdot \gamma$ para algum inteiro γ.

Possibilidade 2: O valor de $\rho \cdot l$ e tal que, somado com l no índice da sequência, resulta exatamente no segundo l que aparece na lista. Contando as casas, temos que, de l a d (sem contar o l), há $d-l$ termos e, de d ao segundo l, tem-se $d-l$ termos também. Assim, ao todo, há $2(d \; - \; l)$ termos do primeiro l ao segundo. Concluímos que $\rho \cdot l = 2(d-l) + 2(d-1)\gamma$. Para algum inteiro não negativo γ (aqui γ pode ser 0). Todavia, observe que $l < d-1$ implica $l \leq d-1$ e, portanto, $2l \leq 2(d-1)$. Isso mostra que contar $2l$ termos da sequência (a_n^d)para encontrar o valor de (a_{2l}^d)vai resultar em um termo que esta dentro da lista dada por

$$(a_n^d) = (1, 2, 3, 4, \dots, l, \dots, d-1, d, d-1, \dots l, \dots 3, 2, 1, 2, 3, \dots)$$

que contém $2(d-1)$ termos. Assim, a igualdade

$$a_{2l+\rho \cdot l}^d = a_{2l}^d$$

quando substituímos $2l + \rho \cdot l = 2l + 2(d-l) + 2(d-1)\gamma = 2d + 2(d-1)\gamma$ e lembramos que $a_{2d}^d = a_{2+2(d-1)}^d = 2$ produz $2 = a_{2d}^d = a_{2l+\rho \cdot l}^d = a_{2l}^d$.

Mas só há dois números 2 na lista acima, que só ocorrem se contarmos $2l = 2$ (o que não é verdadeiro, pois $l \neq 1$) ou se $2l = 2(d-1)$, isto é, se $l = d-1$, que não é verdadeiro nesse caso. Essas considerações mostram que a Possibilidade 2) não pode ocorrer.

Caso 5) $d < l < 2(d-1)$. Esse caso é análogo ao anterior. Diante de todos os possíveis casos acima, só há uma alternativa:

$$\rho \cdot l = 2(d-1)\gamma$$

para algum inteiro positivo γ. Agora, note que, sendo $\alpha = mmc(l, 2(d-1)) = \rho \cdot l$ tanto um múltiplo de l quanto um múltiplo de $2(d-1)$, tem-se

$$a_{n \cdot l + \alpha}^d = a_{n \cdot l}^d$$

para todo $n \geq 1$, isto é,

$$b_{n+\frac{\alpha}{l}}^{d,l} = b_n^{d,l}$$

para todo $n \geq 1$. Isso mostra que $\rho = \frac{\alpha}{l} = \rho \cdot \lambda$ é um múltiplo de ρ, para algum inteiro positivo λ. Vamos mostrar que $\lambda = 1$ e concluir o resultado. Para tanto, isso garante que o

número ρ é ao mesmo tempo múltiplo de l e de $2(d - 1)$. Pela definição de mmc, segue que $mmc\big(l, 2(d - 1)\big) = \rho \cdot l$ divide o número $\rho \cdot l$, isto e, existe um inteiro
positivo k tal que

$$\rho \cdot l \cdot k = \rho \cdot l$$

Cancelando l em ambos os lados e substituindo o valor de ρ, concluímos que $\rho \cdot \lambda \cdot k = \rho$, isto é, $\lambda k = 1$. Como λ e k são inteiros positivos, isso mostra que $\lambda = 1$ e finaliza a demonstração do teorema. ■

Corolário 3.1 Dados dois números inteiros $d, l \geq 2$, sendo $\Pi = 2(d-1)$ o período da sequência (a_n^d) e ρ o período da sequência 2E $(b_n^{d,l})$, então $\rho = \frac{2(d-1)}{mdc(l,2(d-1))}$ ou simplesmente $\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$.

Demonstração. Como $l \cdot \Pi = mmc(l,\Pi) \cdot mdc(l,\Pi)$, então $mmc(l,\Pi) = \frac{l \cdot \Pi}{mdc(l,\Pi)}$. Segue da Proposição 2.1 que $\rho \cdot l = mmc(l,\Pi)$. Portanto, o período ρ da sequência 2E $(b_n^{d,l})$ é dado por $\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$, como queríamos demonstrar. ■

Esse corolário nos mostra também que o número Π é múltiplo de ρ. Com isso, é possível garantir que não existem sequências (a_n^d) com sequências 2E $(b_n^{d,l})$ associadas tais que, por exemplo, $\Pi = 45$ e $\rho = 12$.

Exemplo 3.7 Dada a sequência a_n^d para $d = 7$, escreva todas as subsequências $(b_n^{d,l})$ para $1 \leq l \leq 2(d-1)$ e encontre os seus respectivos períodos.

Solução: Escrevendo a sequência a_n^d, temos

$$(a_n^7) = (1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,\dots).$$

Agora escrevendo as subsequências para $1 \leq l \leq 2(d-1)$, e destacando seus períodos, temos:

$$(b_n^{7,1}) = (1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,7,6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6,\dots).$$
$$(b_n^{7,2}) = (2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,2,4,6,6,4,2,\dots).$$
$$(b_n^{7,3}) = (3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,5,2,3,6,\dots).$$
$$\big(b_n^{7,4}\big) = (4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,4,6,2,\dots).$$
$$\big(b_n^{7,5}\big) = (5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,1,6,\dots).$$
$$\big(b_n^{7,6}\big) = (6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2,\dots).$$
$$(b_n^{7,7}) = (7,2,5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,1,6,3,4,5,2,7,2,5,4,3,6,\dots).$$
$$\big(b_n^{7,8}\big) = (6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,6,4,2,\dots).$$
$$\big(b_n^{7,9}\big) = (5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,3,2,5,6,\dots).$$

$\left(b_n^{7,10}\right) = (4, 6, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 2, 4, 6, 6, 4, 2, 2, \ldots)$.

$\left(b_n^{7,11}\right) = (3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, \ldots)$.

$\left(b_n^{7,12}\right) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$.

Outra solução: Como $\Pi = 2(d-1)$, então $\Pi = 12$.

Tabela 4 – MDC

l	$mdc(l, \Pi)$	$\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$
1	$mdc(1,12) = 1$	12
2	$mdc(2,12) = 2$	6
3	$mdc(3,12) = 3$	4
4	$mdc(4,12) = 4$	3
5	$mdc(5,12) = 1$	12
6	$mdc(6,12) = 6$	2
7	$mdc(7,12) = 1$	12
8	$mdc(8,12) = 4$	3
9	$mdc(9,12) = 3$	4
10	$mdc(10,12) = 2$	6
11	$mdc(11,12) = 1$	12
12	$mdc(12,12) = 12$	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.8 Uma balsa parte da cidade de Araguaína e visita em $d = 7$ dias comunidades ribeirinhas em sequência (uma por dia), subindo o rio Tocantins e, depois, retorna visitando as mesmas comunidades na ordem inversa. Um inspetor da vigilância sanitária visita a balsa a cada $l = 8$ dias para inspecionar os mantimentos. Com que periodicidade o inspetor encontrará a balsa na mesma comunidade? Ou seja, queremos descobrir após quantos dias o inspetor e a balsa coincidem na mesma comunidade.

Solução: O trajeto ida e volta forma um ciclo periódico. Esse é o padrão da sequência (a_n^d), para $d = 7$, ou seja, $(a_n^7) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, \ldots)$. Como $\Pi = 2(d-1)$, temos $\Pi = 12$. A solução da questão corresponde a calcular o período da sequência 2E $(b_n^{7,8})$, ou seja, $\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$, em que $l = 8$. Tem-se $mdc(8,12) = 4$, e, então, $\rho = \frac{12}{4} = 3$. Portanto, o inspetor encontrará a balsa na mesma comunidade a cada 3 visitas, ou seja, a cada 3·8 =24 dias.

Como consequência direta da Proposição 2.1, obtemos os seguintes corolários que estão relacionados com a sua natureza.

Corolário 3.2 Dados os números inteiros $d, l \geq 2$ com $l \leq 2(d-1)$. Se $mdc(l, \Pi) = 1$, então, $\Pi = \rho$.

Exemplo 3.9 Encontre dois números primos entre si Π e l, e determine as sequências (a_n^d) e $(b_n^{d,l})$.

Solução: Vamos tomar os números 10 e 7 para Π e l, respectivamente. Como $\Pi = 2(d-1)$ e $\Pi = 10 = 2(d-1)$, então $d = 6$. Logo,

$$(a_n^6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, ...).$$

Agora, como $l = 7$, temos $(b_n^{6,7}) = (5, 4, 1, 4, 5, 2, 3, 6, 3, 2, 5, 4, ...)$ e, como podemos ver, ρ também é igual a 10, como diz o Corolário 3.2.

Corolário 3.3 Dados $d, l \geq 4$ números inteiros, se l é ímpar, então ρ é par.

Demonstração. Sabemos que o período da sequência (a_n^d) é $\Pi = 2(d-1)$ e o período da sequência 2E $(b_n^{d,l})$ é dado por $\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$. Vamos mostrar que ρ é par quando l é ímpar em dois passos. ■

Passo 1 : $mdc(l,\ 2(\mathrm{d}-1))$.

Se l é ímpar, ou seja, $l = 2k - 1$ com $k \in \mathbb{N}$; então não possui fator 2, portanto o $mdc(l, \Pi)$ não pode conter o fator 2. Logo, $mdc(l, \Pi)$ é ímpar.

Passo 2 : Analisar paridade de ρ.

Como $\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$, e Π é sempre par, pois $\Pi = 2(d-1)$, então ρ também necessariamente é par, como queríamos demonstrar.

Com isso, tomando $l = 321$, não existe sequência 2E com período igual a $\rho = 31$, independente do número $d \geq 4$ escolhido.

Corolário 3.4 Dado qualquer número natural $J \in \mathbb{N}$, existem $d, l \geq 2$, com $l \leq 2(d-1)$, tais que $\rho = J$.

Demonstração. Sabemos que $\rho = \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$ é o período da sequência 2E $(b_n^{d,l})$ e $\Pi = 2(d-1)$ é o período da sequência (a_n^d). Dado $J \in \mathbb{N}$ qualquer, queremos escolher d e l de tal forma que $\frac{2(d-1)}{mdc(l,2(d-1))} = J$ ou ainda $mdc\big(l, 2(d-1)\big) = \frac{2(d-1)}{J}$. Vamos $d = J + 1$, e, assim, segue que $d - 1 = J$ e $2(d-1) = 2J$. Queremos que $\frac{2(d-1)}{mdc(l,2(d-1))} = J$, então queremos que valha $\frac{2J}{mdc(l,2J)} = J$. Para que isso ocorra, basta que o $mdc(l, 2J) = 2$, e, para isso, é só tomarmos $l = 2$. Consequentemente, $\rho = \frac{2J}{2} = J$. Portanto, dado qualquer número natural J, basta escolher um $d = J + 1$ e um $l = 2$, para que ρ seja igual a J, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 3.10 Escolha um d suficientemente grande e verifique a veracidade do corolário 3.4.

Solução: Vamos escolher um $J = 521$. Para isso temos $d = 522$ e $\Pi = 1042$ pegando $l = 2$, pelo Corolário 3.4 $J = \rho \frac{\Pi}{mdc(l,\Pi)}$. De fato, pois $\frac{1042}{mdc(2,1042)} = \frac{1042}{2} = 521$

Lema 3.1 Dadas a sequência (a_n^d) de período $\Pi = 2(d-1)$ e a subsequência $(b_n^{d,l})$, então

$$(a_n^d) = (b_1^{d,1}, b_1^{d,2}, b_1^{d,3}, \dots, b_1^{d,n}, \dots).$$

Demonstração: Pela Definição 2.2, temos que $b_n^{d,l} = a_{nl}^d$. Então, para $n, l = 1$, temos $b_1^{d,1} = a_1^d$. Assim, quando tomarmos $l = 2, 3, 4, 5, \dots$, teremos exatamente a formação da sequência dada por $(b_1^{d,1}, b_1^{d,2}, b_1^{d,3}, \dots, b_1^{d,n}, \dots)$. ■

Lema 3.2 Dados os números inteiros $d, l \geq 2$ com $\Pi = 2(d-1)$, se $l = \Pi + 1$, então $(a_n^d) = (b_n^{d,l})$.

Demonstração: Segue diretamente da definição de período de uma sequência. ■

Esse Lema no diz que a sequência 2E $(b_n^{d,l})$ obtida da (a_n^d), com salto $l = \Pi + 1$, coincide exatamente com a sequência original (a_n^d). De fato, a sequência (a_n^d), com período $\Pi = 2(d-1)$, é usada como uma base e, normalmente, ao extrair uma subsequência com saltos de tamanho l, ela muda o padrão. Mas, nesse caso especial, quando $l = \Pi + 1$, a subsequência "reconstrói" exatamente a sequência original, ou seja, $(a_n^d) = (b_n^{d,\Pi+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.3 Dados $d, l \geq 3$ números inteiros, sempre que $l = \Pi \pm 1$, d é um dos termos da sequência 2E $(b_n^{d,l})$.

Demonstração: É uma aplicação do Lema 3.2 com a definição de período de uma sequência. ■

Lema 3.4 Dada a sequência (a_n^d) de período $\Pi = 2(\mathrm{d}-1)$, a soma dos termos que definem o número Π é dada por $S_d = d^2 - 1$.

Demonstração: Sabemos que os termos que definem o período de (a_n^d) são $1, 2, 3, \dots, d-1, d, d-1, \dots, 3, 2$. Usando a soma dos termos de uma P.A., vamos somar os valores 1 até $(d-1)$, ou seja, $d-1$ termos. Logo,

$$S_{d1} = \frac{(1+d-1)(d-1)}{2} = \frac{d^2-d}{2}.$$

Agora vamos somar de d até 2. Nesse caso, temos $d-1$ termos sendo o primeiro igual a d e o último igual a 2. Portanto,

$$S_{d2} = \frac{(d+2)(d-1)}{2} = \frac{d^2+d-2}{2}$$

Assim, $S_d = S_{d1} + S_{d2} = \frac{d^2-d}{2} + \frac{d^2+d-2}{2} = d^2 - 1$ como queríamos provar. ■

Exemplo 3.11 A professora Renata deseja comprar uma nova casa na cidade de Araguaína. Para isso, ela decidiu reservar mensalmente, guardando dinheiro conforme o planejamento a seguir:

Tabela 5 – Economia mensal

Mês	R$
Janeiro	1000,00
Fevereiro	2000,00
Março	3000,00
Abril	4000,00
Maio	5000,00
Junho	6000,00
Julho	7000,00
Agosto	6000,00
Setembro	5000,00
Outubro	4000,00
Novembro	3000,00
Dezembro	2000,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sabendo que o valor da casa é de **R$ 240.000,00**, determine **em quantos meses** a professora Renata conseguirá juntar esse valor, mantendo esse mesmo padrão de economia?

Solução: Como podemos ver esta é uma sequência 2E a_n^d com $d = 7$, assim temos,

$$(a_n^6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5\ 4, 3, 2, \dots)$$

e, pelo Lema 3.4, temos $S_7 = 7^2 - 1 = 48$. Como ela juntará R$ 48.000,00 por ano, então ela irá demorar 5 anos para comprar a casa.

Lema 3.5 Sejam d,l inteiros maiores ou iguais a 2. Então, vale que $b_n^{d,l} = a_n^{d,l+2(n-1)(d-1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como a sequência (a_n^d) tem período $2(d-1)$, então a cada $2(d-1)$ posições, ela se repete. Ou seja, se aumentarmos o l em múltiplos de $2(d-1)$, a sequência não muda estruturalmente. Portanto, aplicar o parâmetro $l + 2(n-1)(d-1)$ resulta na mesma posição da sequência. ∎

Exemplo 3.12 Considere $d = 5$ e $l = 1,2,3,4, \dots, 8$. Vamos escrever a sequência (a_n^d) em que $d = 5$. Temos

$$(a_n^5) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 \dots).$$

Agora vamos escrever as sequências 2E $(b_n^{5,l})$ para $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Para $l = 1$, temos: $\left(b_n^{5,1}\right) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \dots)$.

Para $l = 2$, temos: $\left(b_n^{5,2}\right) = (2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, \dots.)$.

Para $l = 3$, temos: $(b_n^{5,3}) = (3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, \dots)$.

Para $l = 4$, temos: $\left(b_n^{5,4}\right) = (4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots)$.

Para $l = 5$, temos: $(b_n^{5,5}) = (5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, \dots)$.

Para $l = 6$, temos: $(b_n^{5,6}) = (4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2, \dots)$.

Para $l = 7$, temos: $\left(b_n^{5,7}\right) = (3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, \dots)$.

Para $l = 8$, temos: $\left(b_n^{5,8}\right) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$.

Analisando os termos das sequências 2E acima, note que

$$(b_n^{5,1}) = (b_n^{5,9}) = (b_n^{5,17}) = \cdots = (b_n^{5,1+8(n-1)}).$$
$$(b_n^{5,2}) = (b_n^{5,10}) = (b_n^{5,18}) = \cdots = \left(b_n^{5,(2+8(n-1))}\right).$$
$$\vdots$$
$$(b_n^{d,l+2(n-1)(d-1)}).$$

Observe que $(b_n^{5,3}) = (b_n^{5,3+2(n-1)(5-1)})$ e, assim, por exemplo,

$$3 + 2(n-1)(5-1) = 139$$
$$2(n-1) \cdot 4 = 139 - 3$$
$$8(n-1) = 136$$
$$n - 1 = \frac{136}{8}$$
$$n - 1 = 17$$
$$n = 18$$

Então, escolhendo $n = 18$, tem-se $\left(b_n^{5,139}\right) = \left(b_n^{5,3}\right)$.

3.2 DISCUSSÃO SOBRE ALGUNS PROBLEMAS EM ABERTO

Todos os problemas abaixo encontram-se em (Alisson, 2023) como problemas em aberto. Aqui, trazemos algumas respostas e breves discussões sobre eles.

Problema 1: Dados $d, l \geq 3$ números inteiros, em que condições os termos da sequência 2E $(b_n^{d,l})$ contém todos os valores $\{1, 2, 3, \dots, d-1, d\}$?

$$\rho = \Pi \rightarrow mdc(l, \Pi) = 1 \rightarrow$$

Discussão: Uma das condições para que todos os termos de (a_n^d) também apareçam na subsequência $(b_n^{d,l})$ é que $l = \Pi \pm 1$. Conjecturamos que uma condição suficiente (e talvez necessária) seja que $\rho = \Pi$, que é equivalente a $mdc(l, \Pi) = 1$.

Problema 2: Dada uma sequência (c_n), em que condições ela é uma sequência 2E associada a inteiros $d, l \geq 2$?

Discussão: Descobrir os critérios que uma sequência (c_n) precisa satisfazer para coincidir com uma subsequência 2E, isto é:

$$c_n = b_n^{d,l} = a_{n \cdot l}^d,$$

onde (a_n^d) é a sequência construída pelo parâmetro d, e l é o salto usado para gerar a sequência 2E. Então, para que uma sequência genérica (c_n) seja uma sequência 2E, ela precisa, minimamente:

a) Ser periódica com algum período ρ;

b) Ter seus termos contidos no conjunto $(1,2, \ldots, d)$;

d) Ser possível encontrar inteiros $d, l \geq 2$ tais que:

$$c_n = b_n^{d,l} = a_{n \cdot l}^d \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Problema 3: Como generalizar e definir as sequências kE, com $k \geq 3$ um inteiro, e provar todos os respectivos resultados?

\+ Esse problema permanece em aberto. Como esta questão ainda não foi resolvida, encorajamos a comunidade de leitores a contribuir com possíveis soluções.

Problema 4: Dados $d, l, k \geq 2$ números inteiros, como construir uma sequência 2E cujos termos contém todos os valores de $\{1, 2, \ldots, d\}$ exceto os múltiplos de k?

\+ Esse problema ainda não foi solucionado, e os leitores são desafiados a resolvê-lo.

Problema 5: Dados $d, l \geq 2$, em que condições a sequência 2E $\left(b_n^{d,l}\right)$ é igual a sequência (a_n^d) ?

Discussão: A sequência $(b_n^{d,l})$ será igual à sequência (a_n^d) se, e somente se,

$$l = 1 + 2k(d-1), \text{ onde } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

4 PROPOSTAS DIDÁTICAS E SOFTWARE PARA CÁLCULO DO MMC

Resolução de Problemas de (MMC) e (MDC) com apoio de software educativo da Sequência 2E.

4.1 UTILIZANDO O SOFTWARE

Este software foi desenvolvido integralmente pelo autor, com suporte de ferramentas de inteligência artificial, e implementado em linguagem HTML. O código-fonte completo está disponível no Apêndice desta obra, licenciado para modificações e adaptações conforme a necessidade do usuário.

A seguir, são apresentadas as interfaces do sistema e um exemplo prático de sua aplicação. O objetivo principal do software é calcular o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre dois números inteiros, utilizando um algoritmo baseado em sequências numéricas específicas (2E).

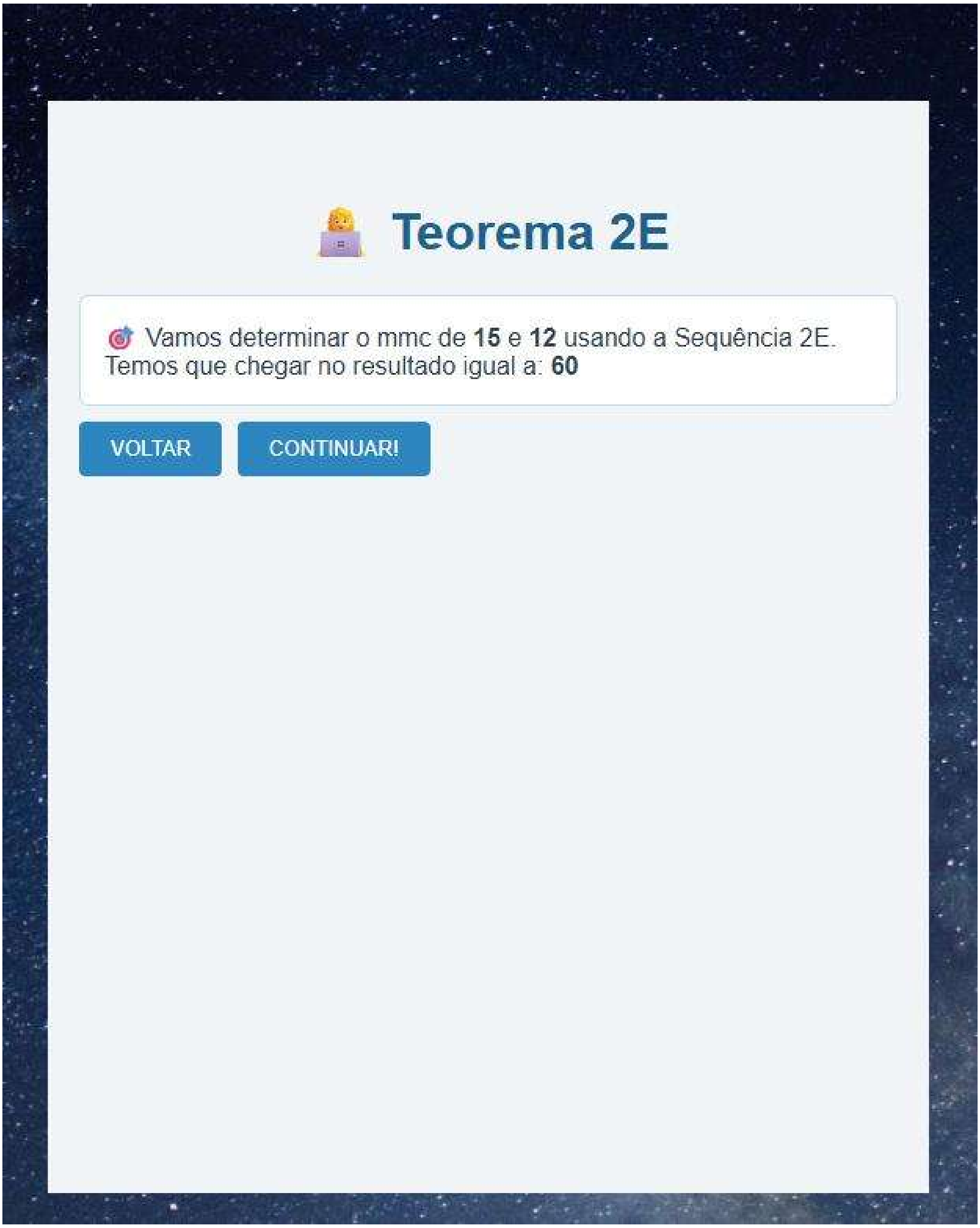
Figura 4: QR Code para acessar o software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5: Tela Inicial do software

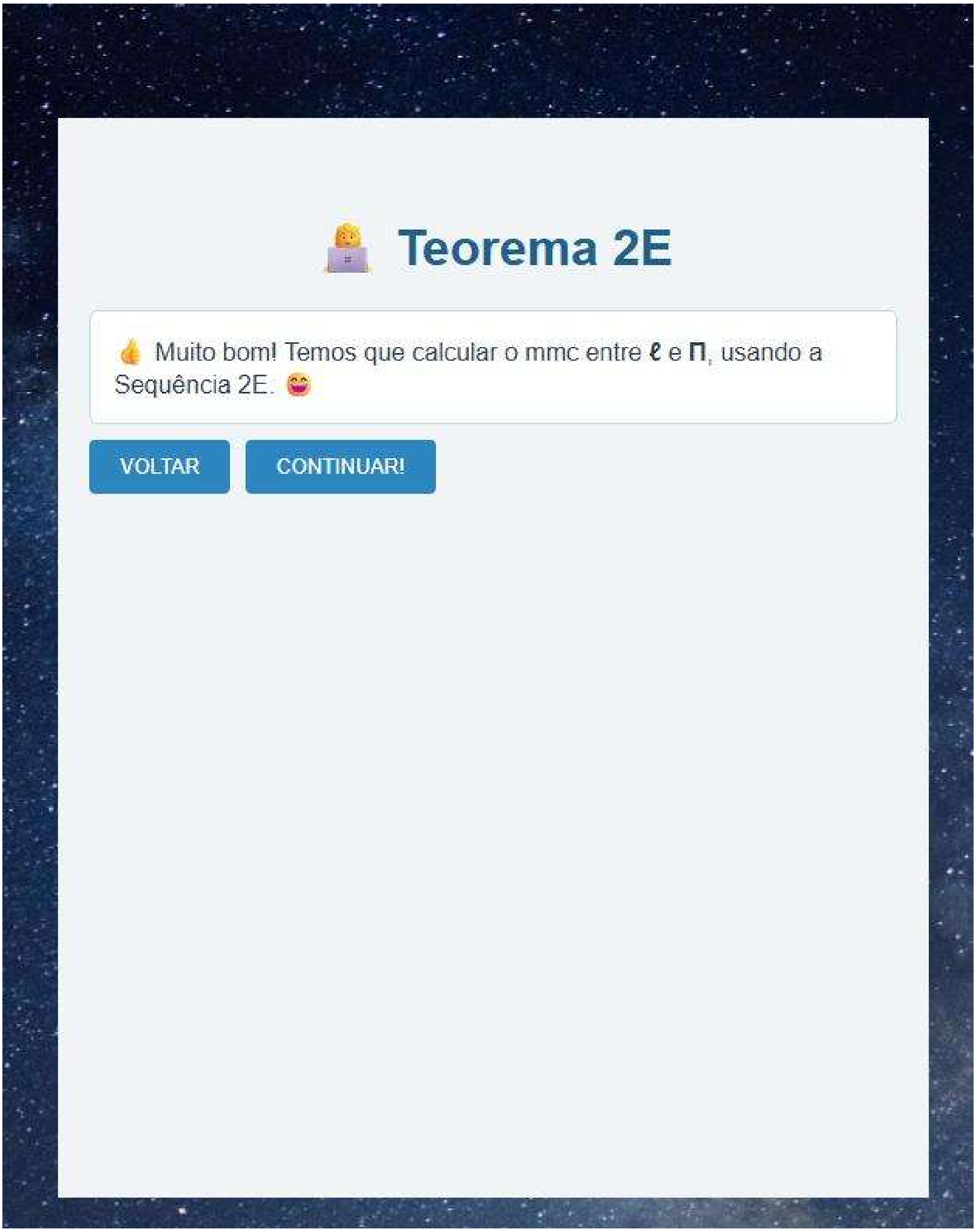
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6: Tela 2 do software



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7: Tela 3 do software

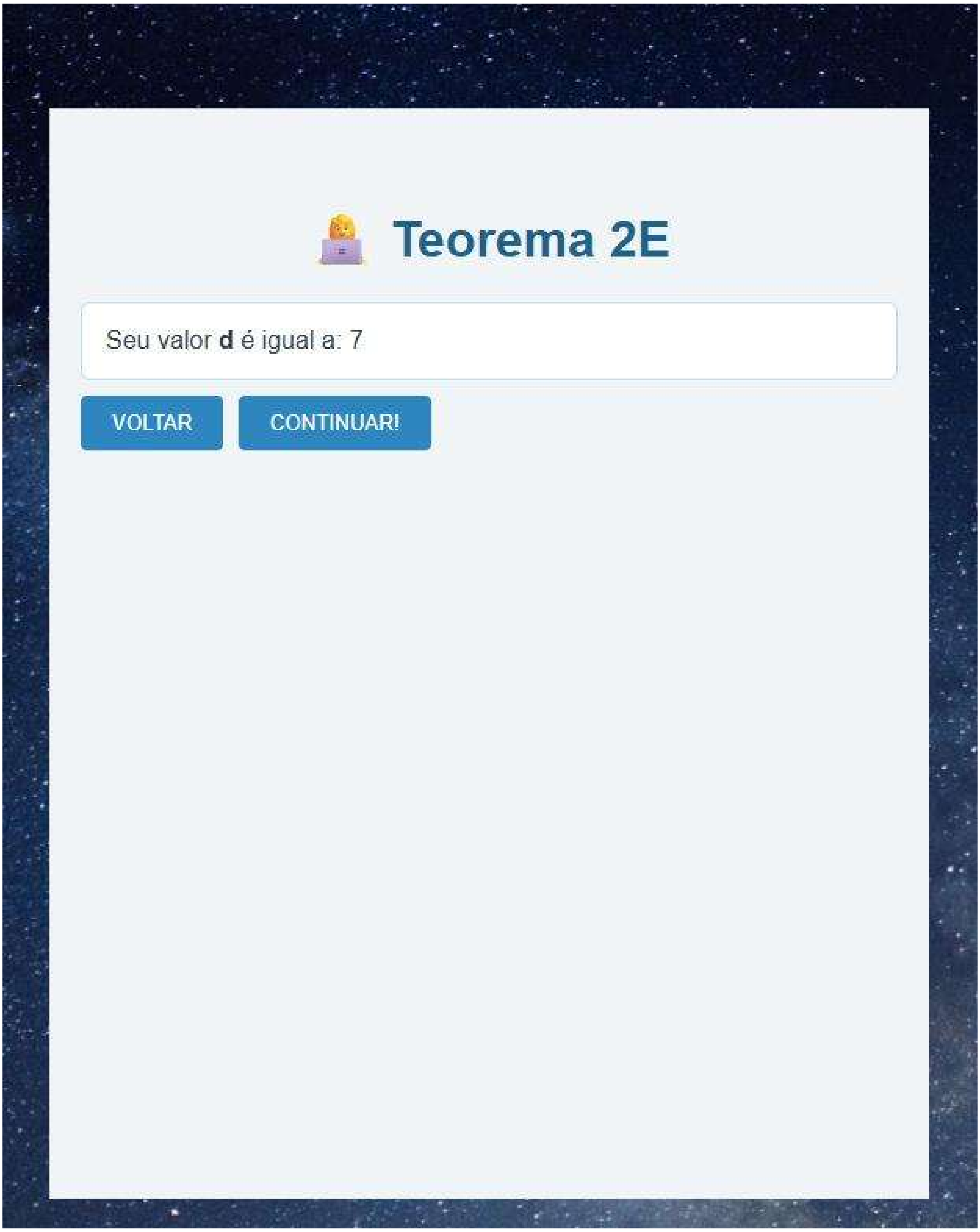


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8: Tela 4 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9: Tela 5 do software



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10: Tela 6 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

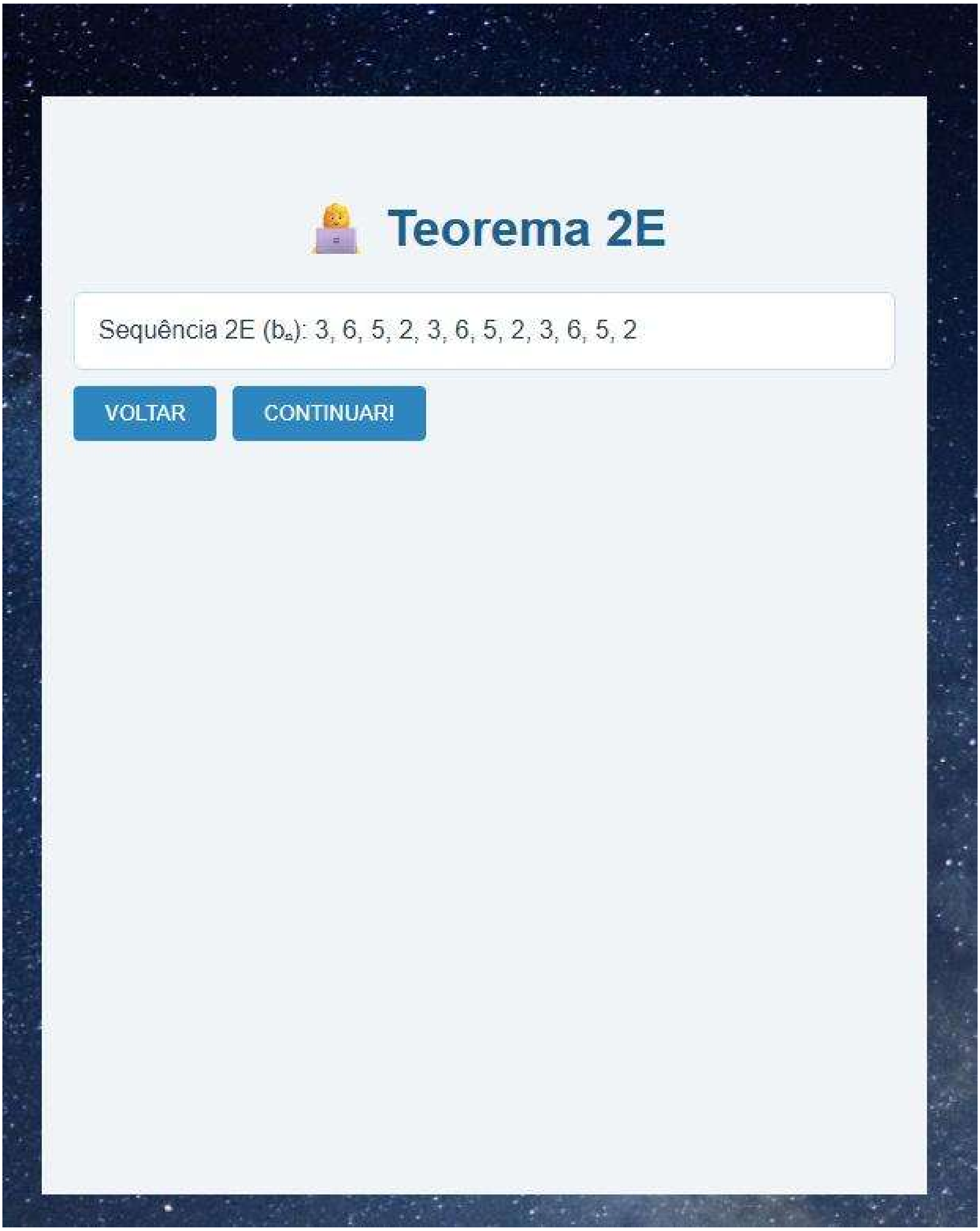
Figura 11: Tela 7 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12: Tela 8 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13: Tela 9 do software



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14: Tela 10 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15: Tela 11 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16: Tela 12 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17: Tela 13 do software

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 PROPOSTAS DIDÁTICAS

Tema: Resolução de Problemas de MMC e MDC pela Sequência 2E via Software

Etapa de ensino: Ensino Fundamental II (8º ano ou 9º ano) ou 1ª série do Ensino Médio

Carga horária: 10 aulas de 50 minutos (aproximadamente 2 semanas).

Objetivos Gerais:

- Compreender e aplicar os conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC).
- Desenvolver estratégias de resolução com base na Sequência 2E (Exploração e Explicitação).
- Estimular o raciocínio lógico e argumentação matemática.
- Relacionar os conteúdos com situações reais e significativas.

Objetivos Específicos:

- Compreender as definições e aplicações do MMC e do MDC.
- Resolver problemas práticos que envolvem situações do cotidiano.
- Utilizar um software educativo para testar hipóteses e validar cálculos.
- Estimular a autonomia e o raciocínio lógico-matemático.
- Incentivar o trabalho colaborativo entre os alunos.

Justificativa:

A aplicação desta sequência didática propõe uma abordagem ativa da Matemática, em que o aluno explora problemas, identifica padrões e constrói significados. Ao trabalhar MMC e MDC com essa metodologia, a aprendizagem se torna mais significativa e próxima da realidade dos alunos.

Desenvolvimento das 10 aulas.

Metodologia:

Aulas expositivas: Introdução teórica dos conceitos de MMC e MDC.

Atividades em grupo: Resolução de problemas contextualizados.

Uso do software: Apresentação do software e orientação prática de uso.

Prática guiada: Alunos resolvem exercícios no computador, testando diferentes estratégias.

Debates e socialização: Discussão em sala sobre os resultados e aplicação prática dos conceitos.

Avaliação formativa: Acompanhamento contínuo, dúvidas e feedback individual.

Recursos Didáticos:

- Software da Sequência 2E
- Quadro e datashow
- Recursos digitais
- Fichas com problemas impressos
- Materiais manipuláveis

Avaliação:

- Formativa: observação durante as aulas.
- Diagnóstica: conhecimentos prévios.
- Somativa: avaliação final escrita.
- Autoavaliação: escrita ou oral.

Habilidades da BNCC

-EF06MA04: Resolver e elaborar problemas de múltiplos e divisores.
-EF07MA05: Resolver e elaborar problemas envolvendo MMC e MDC.
-EM13MAT101 (EM): Utilizar estratégias diversas na resolução de problemas.
-EF03MA10 - Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas por um mesmo número.

Aula 1 – Situação-Problema Inicial

Introdução

Este material visa facilitar o aprendizado dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC) utilizando a Sequência 2E, uma ferramenta intuitiva que reduz a necessidade de cálculos complexos. Com essa abordagem, os alunos poderão determinar MMC e MDC por meio da análise de períodos em sequências numéricas, transformando problemas abstratos em contagens simples e visualizações concretas.

Problema:

Resolva:

a) MMC(12, 18)
b) MMC(8, 14)
c) MMC(9, 15, 45)

Aula 2 – Socialização e Organização

Discussão coletiva das estratégias. Introdução à ideia de múltiplos.

Resolução de problemas em dupla (sem software)

Nesta etapa da proposta didática, os alunos serão organizados em duplas e participarão de uma socialização inicial para discutir, de forma coletiva, as estratégias de resolução de problemas envolvendo múltiplos. A atividade tem como objetivo introduzir a ideia de múltiplos de forma contextualizada, estimulando o raciocínio lógico e a troca de conhecimentos entre os colegas.

A resolução de problemas será realizada em dupla, sem o uso do software neste momento, para que os alunos desenvolvam estratégias próprias, compartilhem métodos de cálculo e comparem diferentes soluções, fortalecendo a aprendizagem colaborativa e preparando o grupo para, posteriormente, aplicar os conceitos de forma digital com o apoio do recurso tecnológico.

Problema 1:

Dois trens partem de uma estação a cada 6min e 10min. Usando a Sequência 2E, determine:

a) O período de cada sequência.

b) O próximo horário de partida simultânea.

Solução:

a) Vamos escolher uma sequência na qual $\Pi = 10$. Como $d = \frac{\Pi}{2} + 1$, então, $d = 6$. Assim, $(a_n^6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, \dots)$ e logicamente o período (a_n^6) é dado por $\Pi = 10$. Como $l = 6$, então, temos $(b_n^{6,6}) = (6, 2, 4, 4, 2, \dots) \rightarrow \rho = 5$.

b) Como $mmc(l, \Pi) = l \cdot \rho$, então $mmc(6,10) = 6 \cdot 5 = 30$, ou seja, 30 minutos.

Usando o mesmo raciocínio, resolva:

Você e seu amigo estão jogando um jogo. Você marca ponto a cada 4 jogadas e ele a cada 6 jogadas. Em qual jogada ambos marcarão ponto ao mesmo tempo?

Problema 2:

Dois faróis piscam em tempos diferentes. Um pisca a cada 15 segundos e outro a cada 20 segundos. Se ambos piscam juntos agora, em quanto tempo voltarão a piscar juntos?

Aula 3 – Formalização: Conceito de MMC, Sistematização do conceito e resolução de exercícios.

Introdução ao uso do software

O uso de recursos tecnológicos na educação tem se mostrado cada vez mais necessário para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, interativo e significativo. Nesse contexto, o software desenvolvido será utilizado como ferramenta de apoio para facilitar a compreensão e a aplicação prática dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC). Por meio do software, os alunos poderão resolver problemas contextualizados, testar hipóteses, visualizar cálculos passo a passo e verificar resultados de forma imediata, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e do interesse pelos conteúdos trabalhados. Além disso, a utilização dessa ferramenta possibilita ao professor acompanhar o desempenho dos estudantes, propor desafios diferenciados e promover atividades colaborativas, enriquecendo ainda mais a prática pedagógica.

Utilizando o software do QR code acima (ou pelo link abaixo) para calcular o MMC e MDC dos problemas:

Problema 1:

Use o software abaixa para encontrar o mmc de:

a) mmc(8, 9)

b) mmc(16, 12)

c) mmc(24, 18)

Explique como utilizou o software para chegar ao resultado e registre o cálculo obtido na tela.

https://sites.google.com/view/teorema2e/in%C3%ADcio

Aula 4 – Problemas Aplicados com MMC

Resolução de problemas reais e sistematização do uso do MMC.

Nesta aula, os alunos terão a oportunidade de aplicar o conceito de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) na resolução de problemas reais e contextualizados. A atividade visa sistematizar o uso do MMC, mostrando sua utilidade prática em situações do cotidiano, como organização de horários, eventos simultâneos e planejamento de tarefas. Por meio da análise e resolução de diferentes situações-problema, os estudantes poderão reforçar os conceitos trabalhados anteriormente, desenvolver autonomia na escolha das estratégias de cálculo e aprimorar o raciocínio lógico-matemático, utilizando o software como apoio para verificar resultados e validar procedimentos.

Problema 1:

Três ônibus partem juntos da rodoviária. Um retorna a cada 30 minutos, outro a cada 45 minutos e o terceiro a cada 60 minutos. Em quanto tempo eles voltarão a partir juntos?

Aula 5 – Análise e Estratégias

Discussão das soluções e introdução à ideia de divisor comum.

Resolução de problemas mais complexos em grupo

Na Aula 5, os alunos irão aprofundar a análise de problemas envolvendo múltiplos e divisores, por meio da discussão coletiva das soluções obtidas nas atividades anteriores. A proposta é revisar estratégias de resolução, comparar métodos e introduzir de forma mais detalhada a ideia de divisor comum, preparando o grupo para compreender de forma integrada os conceitos de MMC e MDC. Durante a atividade, serão apresentados problemas mais complexos, a serem resolvidos em grupos, incentivando a cooperação, o debate de hipóteses e a troca de saberes entre os participantes. Essa etapa contribui para o fortalecimento do raciocínio lógico e para o desenvolvimento de habilidades de argumentação matemática.

Problema 1:

Você tem 36 bombons e 60 balas. Deseja montar o maior número de sacolas com a mesma quantidade de bombons e balas. Quantas sacolas podem ser montadas?

Aula 6 – Formalização: Conceito de MDC

Nesta aula, os alunos serão conduzidos à formalização do conceito de Máximo Divisor Comum (MDC), aprofundando a compreensão teórica e prática do tema. O objetivo é apresentar de forma clara as definições, propriedades e métodos de cálculo do MDC, relacionando-os a situações do cotidiano e a problemas já conhecidos pelos alunos. Serão explorados exemplos práticos, discutidas diferentes estratégias de determinação do MDC e realizada a comparação entre as abordagens manuais e o uso do software, consolidando o conhecimento adquirido e preparando os alunos para aplicá-lo de forma autônoma em problemas mais complexos.

Problema 1:

Resolva:

a) MDC(36, 60)

b) MDC(45, 75)

c) MDC(84, 120)

Aula 7 – Situação-Problema MDC

Sistematização do conceito e exercícios de fixação.

Problemas de divisão igualitária. Trabalho em grupos.

Nesta aula, os alunos irão sistematizar o conceito de Máximo Divisor Comum (MDC) por meio de situações-problema que envolvem a divisão igualitária de quantidades. O objetivo é fixar o conteúdo de forma prática, contextualizada e significativa, destacando aplicações do MDC em situações reais, como organização de grupos, divisão de recursos ou distribuição de materiais de forma justa.

A atividade será realizada em grupos, incentivando a colaboração, o debate de estratégias e a construção conjunta de soluções, fortalecendo o raciocínio lógico, a autonomia e a capacidade de argumentação dos alunos.

Problema 1:

Uma escola possui 48 lápis e 60 canetas. Eles querem montar kits iguais sem sobras. Qual o maior número de kits que podem ser montados?

Aula 8 – Problemas Aplicados com MDC

Problemas reais e diferenciação entre MMC e MDC.

Discussão dos resultados obtidos no software

Nesta aula, vamos explorar a aplicação prática do conceito de Máximo Divisor Comum (MDC) em situações do cotidiano, entendendo como ele pode ser utilizado para resolver problemas reais relacionados à divisão e agrupamento. Além disso, faremos uma importante distinção entre o MDC e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC), conceitos frequentemente confundidos, mas que possuem usos específicos e diferentes no dia a dia e nas ciências exatas. Para consolidar o aprendizado, utilizaremos ferramentas computacionais para calcular o MDC e o MMC, permitindo analisar os resultados obtidos e compreender como o uso do software pode facilitar a resolução de problemas matemáticos, garantindo maior agilidade e precisão. Ao final da aula, você estará apto a identificar corretamente quando aplicar o MDC ou o MMC, resolver problemas práticos com esses conceitos e utilizar recursos tecnológicos para validar suas soluções.

Problema 1:

Duas turmas de alunos vão para uma excursão. Uma tem 24 alunos e a outra 36. Deseja-se formar grupos com o maior número possível de alunos em cada grupo, sem misturar as turmas. Quantos alunos terá cada grupo?

Aula 9 – Desafio Integrado

Problemas com uso combinado de MMC e MDC. Apresentações.

Revisão geral e resolução de dúvidas

Nesta aula, vamos colocar em prática todo o conhecimento adquirido sobre MMC e MDC por meio de desafios que exigem o uso combinado desses dois conceitos. Será uma oportunidade para aprofundar o raciocínio matemático e desenvolver estratégias para resolver problemas mais complexos e integrados. Além disso, teremos apresentações dos trabalhos realizados, promovendo a troca de ideias e a discussão das diferentes abordagens utilizadas para solucionar os desafios.

Para garantir que todos estejam confortáveis com os conteúdos, faremos uma revisão geral dos principais tópicos abordados ao longo das aulas, esclarecendo dúvidas e consolidando o aprendizado para que você se sinta preparado para aplicar esses conceitos em situações diversas.

Problema 1:

Uma loja possui 120 caixas de lápis e 180 borrachas. Querem montar o maior número de kits iguais, com todos os materiais usados. Quantos kits podem ser montados? Quantos lápis e borrachas em cada kit?

Aula 10 – Avaliação Final

Avaliação escrita e autoavaliação dos alunos.

Avaliação final prática e autoavaliação

Nesta última aula do módulo, realizaremos a avaliação final para consolidar todo o aprendizado adquirido sobre MMC e MDC. A avaliação será dividida em duas partes: uma prova escrita, que permitirá testar os conhecimentos teóricos e a capacidade de resolver problemas, e uma avaliação prática, focada na aplicação dos conceitos em situações reais ou simuladas. Além disso, haverá um momento dedicado à autoavaliação, em que cada aluno poderá refletir sobre seu desempenho, identificar suas fortalezas e pontos a melhorar, fortalecendo o processo de aprendizagem autônoma e o desenvolvimento pessoal. Este é um momento importante para demonstrar seu progresso e garantir que está preparado para aplicar MMC e MDC com segurança e eficiência em diversos contextos.

Problemas:

1) MMC(10, 15)

2) MDC(40, 60)

3) Um farol pisca a cada 24 segundos, e outro a cada 36 segundos. Quando piscarão juntos?

4) Uma escola tem 72 cadernos e 96 canetas. Qual o maior número de kits que podem ser feitos sem sobras?

Exercícios Propostos:

Esta lista de exercícios que contempla MMC, MDC e a Sequência 2E foi organizada em três níveis, com o objetivo de atender diferentes etapas do seu aprendizado. Você encontrará exercícios introdutórios, para se familiarizar com o padrão da sequência e entender sua estrutura; exercícios de desenvolvimento, que aprofundam as propriedades e aplicações; e desafios, que exigem maior reflexão, análise crítica e criatividade. Resolva cada etapa com dedicação, observe os padrões e busque justificar suas respostas, fortalecendo assim sua compreensão e domínio dos conteúdos da BNCC quanto da Sequência 2E. Bom estudo e bons desafios!

Problemas de MMC

Nível Fácil

Questão 01

Calcule o MMC de 4 e 6.

Questão 02

Dois semáforos piscam juntos. Um pisca a cada 8 segundos e outro a cada 12 segundos. De quantos em quantos segundos eles piscarão juntos novamente?

Nível Médio

Questão 03

Três amigos vão correr em uma pista circular. O primeiro completa a volta em 10 min, o segundo em 15 min e o terceiro em 20 min. Depois de quanto tempo eles se encontrarão novamente no ponto de partida?

Questão 04

Determine o menor número que é múltiplo de 5, 6 e 8.

Nível Difícil

Questão 05

Em uma fábrica, uma máquina produz uma peça a cada 9 minutos, outra a cada 12 minutos e outra a cada 18 minutos. Se todas começam juntas, depois de quantos minutos produzirão uma peça ao mesmo tempo novamente?

Questão 06

Encontre o menor número que, dividido por 4, 6, 9 e 12, deixa resto zero.

Problemas de MDC:

Nível Fácil

Questão 01

Calcule o MDC de 12 e 18.

Questão 02

João tem 20 balas de morango e 30 de uva. Ele quer formar saquinhos com a mesma quantidade de balas, sem misturar sabores. Qual o maior número de saquinhos iguais que ele pode formar?

Nível Médio

Questão 03

Encontre o maior número que divide 84 e 120 ao mesmo tempo.

Questão 04

Um jardineiro quer dividir 45 mudas de roseira e 75 mudas de girassol em canteiros iguais, sem misturar espécies. Qual o maior número de canteiros iguais que ele pode fazer?

Nível Difícil

Questão 05

Determine o maior número que divide 210, 315 e 525 sem deixar resto.

Questão 06

Um comerciante quer embalar 252 latas de refrigerante e 378 garrafas de suco em caixas de mesmo tamanho, sem sobra. Qual é o maior número de caixas que ele poderá usar?

Problemas Mistos (MMC + MDC)

Nível Fácil

Questão 01

Calcule o MMC e o MDC de 8 e 12.

Questão 02

Verifique o MMC e o MDC de 14 e 35.

Nível Médio

Questão 03

Dois ônibus partem de uma rodoviária: um a cada 30 min, outro a cada 45 min. Qual o intervalo em que voltarão a sair juntos? Qual o MDC dos intervalos?

Questão 04

Dois números têm MMC igual a 60 e MDC igual a 6. Sabendo que um deles é 12, qual é o outro?

Nível Difícil

Questão 05

Um fazendeiro quer dividir 90 kg de ração de milho e 150 kg de ração de soja em sacos de mesmo peso, sem misturar. Qual o maior peso de cada saco? E quantos sacos serão usados de cada tipo?

Questão 06

O MDC de dois números é 4, e seu MMC é 60. Sabendo que um dos números é 20, encontre o outro.

Dicas de uso:

Você pode inserir esses problemas no software para que o aluno resolva passo a passo.

Pode usar em atividade impressa ou online.

Para os mistos, incentive o aluno a verificar a relação entre os fatores.

5 NOVOS PROBLEMAS EM ABERTO SOBRE AS SEQUÊNCIAS 2E

Problema 1: Dados os inteiros $d, l \geq 2$, mostre que se 1 aparece na sequência $2E$, todos os termos aparecem também.

Problema 2: Dados os inteiros $d, l \geq 2$, mostre que todos os termos da sequência $2E$ são ímpares quando l é ímpar.

Problema 3: Mostre que em toda sequência 2E, se l é par, então $b_n^{d,l}$ é par para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4: Mostre que, em toda sequência (a_n^d) de período Π, quando extraímos uma sequência 2E $(b_n^{d,l})$ de período ρ e $l = \Pi - 1$, então, necessariamente, $\Pi = \rho$.

Problema 5: Dados $d, l \geq 2$, sob quais condições a sequência 2E $(b_n^{d,l})$ possui apenas termos distintos em seu período?

Problema 6: É possível que $mdc(b_n^{d,l}, l) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

Problema 7: Considerando a subsequência 2E $(b_n^{d,l})$, é possível encontrar d e l tais que os termos dessa subsequência sejam todos primos?

Problema 8: Considere a soma parcial $S_n = b_1^{d,l} + b_2^{d,l} + b_3^{d,l} + \cdots + b_{n-1}^{d,l} + b_n^{d,l}$. É possível modelar o crescimento dessa soma?

Problema 9: Dada sequência (a_n^d) de período Π, mostre que, quando $l = \Pi - 1$, então

$$b_1^{d,l} + b_l^{d,l} = 5, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo investigar o potencial da sequência 2E como instrumento didático para o desenvolvimento da aprendizagem em matemática, com ênfase na resolução de problemas envolvendo Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC). A pesquisa partiu de um Trabalho de Conclusão de Curso da graduação, mas também com necessidade de se repensar estratégias pedagógicas que aproximem os estudantes da matemática de forma eficaz, promovendo compreensão e não apenas memorização de regras.

Ao longo do estudo, foi possível constatar que a sequência 2E, por sua estrutura simétrica e lógica, constitui-se uma ferramenta propícia para o desenvolvimento do raciocínio matemático, favorecendo conexões entre conceitos e estimulando a autonomia do estudante na construção de soluções. Como defende Lorenzato (2006), o ensino da matemática deve proporcionar aos alunos experiências que lhes permitam "pensar, investigar e resolver problemas", o que vai ao encontro da proposta metodológica adotada neste trabalho.

É importante destacar que, embora a sequência 2E seja um recurso acessível, sua eficácia depende diretamente da mediação pedagógica e da intencionalidade docente. Não se trata de uma fórmula mágica, mas de um método que, se bem utilizado, pode transformar a forma como os alunos se relacionam com conteúdos tradicionalmente considerados abstratos. Nesse sentido, a formação docente, contínua e reflexiva, se mostra indispensável para o sucesso de propostas inovadoras no ensino de matemática (Ponte, 2012).

Os resultados alcançados nesta pesquisa sugerem que a sequência 2E pode ser incorporada de maneira sistemática ao planejamento pedagógico, não apenas para abordar conteúdos como MMC, MDC, somas de termos, dentre outros problemas do cotidiano como foi mostrado nesta dissertação, mas também como ponto de partida para o estudo de progressões, simetrias, funções e outras estruturas matemáticas.

Finalizando, espera-se que esta pesquisa contribua para ampliar o repertório de recursos didáticos disponíveis aos professores de matemática e que inspire novas formas de ensinar que valorizem o pensamento crítico, a curiosidade e o prazer em aprender. A matemática, quando ensinada com sentido, deixa de ser um obstáculo e passa a ser uma linguagem poderosa de interpretação do mundo.

REFERÊNCIAS:

LORENZATO, Sérgio. O ensino de Matemática: o que dizem os professores experientes. Campinas: Autores Associados, 2006.

PONTE, João Pedro da. Estudos em Educação Matemática: práticas e reflexões. São Paulo: Editora Cortez, 2012.

VYGOTSKY, Lev S. A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

GRIMM, R. E. (1973). *The Autobiography of Leonardo Pisano*. Fibonacci Association. Livio, M. (2002). *The Golden Ratio: The Story of Phi*. Broadway Books.

SINGH, P. (2018). *The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India*. Historia Mathematica.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BÜHLER, W. K. Gauss: A Biographical Study. Springer, 1981.

DUNHAM, W. Euler: The Master of Us All. MAA, 1999.

HARDY, G. H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work. Cambridge University Press, 1940.

KLINE, M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford, 1972.

LIVIO, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. Broadway Books, 2002.

SILVA, Alisson Sousa Santos da. Um estudo sobre as 2-sequências. 2023. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Câmpus Universitário de Araguaína, Araguaína, 2023.

APÊNDICES

APÊNDICE A – A FÓRMULA

A fórmula que usei para modelar a iluminação da Lua ao longo dos dias do ciclo lunar é uma aproximação matemática baseada no comportamento periódico da iluminação lunar, e não uma fórmula oficial de uma agência como a NASA.

Fórmula usada:

$$\text{Iluminação}(t) = 50\left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t-1)}{14}\right)\right)$$

Origem e justificativa da fórmula:

Baseada no fato de que a variação da iluminação lunar é aproximadamente senoidal, já que o ângulo entre Sol, Terra e Lua muda de forma cíclica.

Inspirada por fontes como:

- **Funções trigonométricas padrão** para modelagem de ciclos naturais (como dia/noite, estações, marés, etc.).
- **Modelos educacionais** usados por professores e autores de livros didáticos para representar a iluminação ao longo da lunação.
- Softwares astronômicos e simulações computacionais.

Mas atenção:

Essa não é uma fórmula oficial da NASA nem derivada diretamente da mecânica celeste precisa.

A iluminação real da Lua pode ser obtida com mais precisão usando efemérides astronômicas como as fornecidas por:

- NASA's SKYCAL: https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SKYCAL/SKYCAL.html
- US Naval Observatory: https://aa.usno.navy.mil
- APIs como a USGS Moon Phase Calculator: https://aa.usno.navy.mil/data/MoonFraction
- Softwares como Stellarium ou PyEphem (bibliotecas astronômicas)

Essa fórmula é didática e aproxima bem a iluminação da Lua durante um ciclo completo, com:

- 0% no início (Lua Nova)
- 100% no meio (Lua Cheia)
- Simetria entre crescimento e diminuição

Ela é suficiente para fins educacionais, gráficos e tabelas, mas não substitui cálculos astronômicos reais baseados em posições orbitais.

Curiosidade

A NASA não usa uma "fórmula oficial simples" para calcular a iluminação da Lua. Em vez disso, ela usa efemérides astronômicas — cálculos baseados na posição real da Lua, do Sol e da Terra no espaço com alta precisão, considerando:

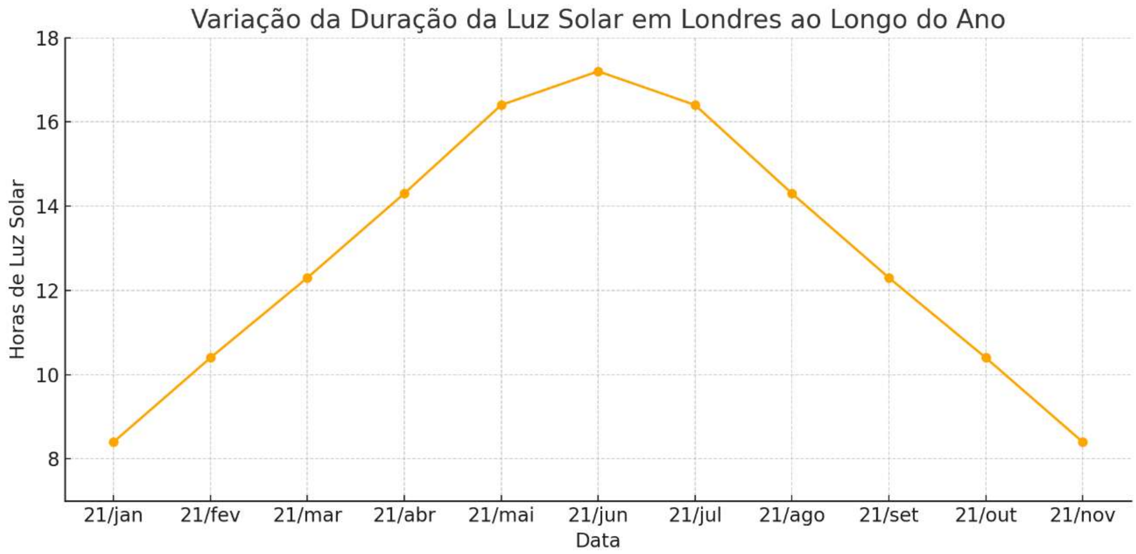
- Órbitas elípticas
- Inclinação orbital
- Perturbações gravitacionais
- Efeitos de paralaxe e libração

Esses cálculos são feitos com algoritmos avançados, como os do **JPL (Jet Propulsion Laboratory)**.

APÊNDICE B – DADOS SOBRE A DURAÇÃO DA LUZ SOLAR EM LONDRES

Este apêndice apresenta dados reais sobre a variação da duração da luz solar ao longo do ano na cidade de Londres, utilizados como base para o problema contextualizado apresentado na proposta didática com a Sequência 2E.

Duração Média de Luz Solar por Dia – Londres (em horas e minutos)



Fonte: Met Office (UK) e Time and Date – London
(Acesso em julho de 2025)

Fonte dos Dados:

Os dados foram obtidos a partir do site oficial de meteorologia do Reino Unido (Met Office) e do portal Time and Date (https://www.timeanddate.com/sun/uk/london), acessados em julho de 2025.

Observação:

Esses dados foram utilizados como base para a construção de atividades contextualizadas com foco em análise e resolução de problemas, conforme os princípios da metodologia da Sequência 2E. A proposta visa explorar habilidades matemáticas como interpretação de dados, conversão de unidades de tempo, e raciocínio lógico sobre variações temporais.

APÊNDICE C – O CÓDIGO-FONTE EM HTML DO SOFTWARE

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="pt-BR">
<head>
  <meta charset="UTF-8">
  <title>Wizard - Teorema 2E</title>
  <style>
    body {font-family: Arial, sans-serif; background-color: #f0f4f7; color: #2c3e50; max-width: 600px; margin: 40px auto; padding: 20px;}
    h1 {text-align: center; color: #1f618d;}
    .step {display: none; margin-top: 20px;}
    .step.active {display: block;}
    label {display: block; margin: 10px 0 5px; font-weight: bold;}
    input {padding: 8px; width: 100%; box-sizing: border-box; border: 1px solid #ccc; border-radius: 4px;}
    button {margin: 10px 5px 0 0; padding: 10px 20px; background-color: #2e86c1; color: #fff; border: none; border-radius: 4px; cursor: pointer;}
    button:hover {background-color: #1b4f72;}
    .output {background: #fff; padding: 15px; border: 1px solid #bcdff1; border-radius: 6px;}
  </style>
</head>
<body>
  <h1>👩‍💻 Teorema 2E</h1>

  <!-- Etapa 1 -->
  <div id="step-1" class="step active">
    <label>Digite ℓ (≥ 4):</label>
```

```
  <input type="number" id="input-p" min="4" value="4" autocomplete="off">

  <label>Digite Π (par ≥ 4):</label>

  <input type="number" id="input-J" min="4" step="2" value="4" autocomplete="off">

  <button onclick="nextStep(1)" type="button">CONTINUAR!</button>

 </div>


 <!-- Etapa 2 -->

 <div id="step-2" class="step">

  <div class="output">🎯 Vamos determinar o mmc de <strong><span id="disp-p-new"></span></strong> e <strong><span id="disp-J-new"></span></strong> usando a Sequência 2E.<br>Temos que chegar no resultado igual a: <strong><span id="disp-lcm-new"></span></strong></div>

  <button onclick="prevStep(2)" type="button">VOLTAR</button>

  <button onclick="nextStep(2)" type="button">CONTINUAR!</button>

 </div>


 <!-- Etapa 3 -->

 <div id="step-3" class="step">

  <div class="output">👍 Muito bom! Temos que calcular o mmc entre <strong>ℓ</strong> e <strong>Π</strong>, usando a Sequência 2E. 😄</div>

  <button onclick="prevStep(3)" type="button">VOLTAR</button>

  <button onclick="nextStep(3)" type="button">CONTINUAR!</button>

 </div>


 <!-- Etapa 4 -->

 <div id="step-4" class="step">

  <div class="output">Determine <strong>d</strong> fazendo <em>d = Π / 2 + 1</em>.</div>

  <button onclick="prevStep(4)" type="button">VOLTAR</button>
```

```
    <button onclick="nextStep(4)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>

  <!-- Etapa 5 -->
  <div id="step-5" class="step">
    <div class="output">Seu valor <strong>d</strong> é igual a: <span id="out-m"></span></div>
    <button onclick="prevStep(5)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(5)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>

  <!-- Etapa 6 -->
  <div id="step-6" class="step">
    <div class="output">Agora, vamos determinar a sequência <em>(a_n)</em> com esse valor <strong>d</strong> acima.</div>
    <button onclick="prevStep(6)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(6)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>

  <!-- Etapa 7 -->
  <div id="step-7" class="step">
    <div class="output" id="out-a"></div>
    <button onclick="prevStep(7)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(7)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>

  <!-- Etapa 8 -->
  <div id="step-8" class="step">
```

```
    <div class="output">Agora, vamos determinar a sequência 2E <em>(b_n)</em>, utilizando a sequência anterior <em>(a_n)</em> e o número <strong>ℓ</strong>.</div>
    <button onclick="prevStep(8)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(8)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>


  <!-- Etapa 9 -->
  <div id="step-9" class="step">
    <div class="output" id="out-b"></div>
    <button onclick="prevStep(9)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(9)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>


  <!-- Etapa 10 -->
  <div id="step-10" class="step">
    <div class="output">Determine o período da Sequência 2E <em>(b_n)</em> acima.</div>
    <button onclick="prevStep(10)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(10)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>


  <!-- Etapa 11 -->
  <div id="step-11" class="step">
    <div class="output">O período de <em>(b_n)</em> é igual a: <span id="out-period-b"></span></div>
    <button onclick="prevStep(11)" type="button">VOLTAR</button>
    <button onclick="nextStep(11)" type="button">CONTINUAR!</button>
  </div>
```

```
<!-- Etapa 12 -->

<div id="step-12" class="step">

  <div class="output">

    🗐 Pelo Teorema 2E, temos que o mmc(<span id="disp-p"></span>, <span id="disp-J"></span>) = <span id="out-lcm-formula"></span><br>

    <strong>O número mmc(<span id="disp-p2"></span>, <span id="disp-J2"></span>) = <span id="out-lcm-value"></span></strong>

  </div>

  <button onclick="prevStep(12)" type="button">VOLTAR</button>

  <button onclick="nextStep(12)" type="button">CONTINUAR!</button>

</div>


<!-- Etapa 13 -->

<div id="step-13" class="step">

  <div class="output">🎉 Parabéns! Você aplicou o Teorema 2E com sucesso! 🎉</div>

  <button onclick="prevStep(13)" type="button">VOLTAR</button>

  <button onclick="restart()" type="button">REINICIAR!</button>

</div>


<script>

  function gcd(a, b) { return b ? gcd(b, a % b) : a; }


  function nextStep(i) {

    document.getElementById('step-' + i).classList.remove('active');

    const next = i + 1;


    if (i === 1) {

      window.p = parseInt(document.getElementById('input-p').value);
```

```
  window.J = parseInt(document.getElementById('input-J').value);
  if (!window.p || window.p < 4 || !window.J || window.J < 4 || window.J % 2 !== 0) {
    alert('ℓ ≥ 4 e Π deve ser par ≥ 4');
    document.getElementById('step-1').classList.add('active');
    return;
  }
  const g = gcd(window.J, window.p);
  window.lcmPJ = window.p * (window.J / g);
  document.getElementById('disp-p-new').innerText = window.p;
  document.getElementById('disp-J-new').innerText = window.J;
  document.getElementById('disp-lcm-new').innerText = window.lcmPJ;
  window.m = window.J / 2 + 1;
}

if (i === 3) document.getElementById('out-m').innerText = window.m;

if (i === 5) {
  const periodoA = [];
  for (let k = 1; k <= window.m; k++) periodoA.push(k);
  for (let k = window.m - 1; k >= 2; k--) periodoA.push(k);
  window.periodoA = periodoA;
  document.getElementById('out-a').innerText = 'Sequência (aₙ): ' + periodoA.join(', ');
}

if (i === 7) {
  const L = window.periodoA.length;
  const g = gcd(L, window.p);
```

```
      const T = L / g;
      const periodoB = [];
      for (let n = 1; n <= 3 * T; n++) {
        const idx = (n * window.p - 1) % L;
        periodoB.push(window.periodoA[idx]);
      }
      window.periodoB = periodoB.slice(0, T);
      document.getElementById('out-b').innerText = 'Sequência 2E (b_n): ' + periodoB.join(', ');
    }

    if (i === 9) document.getElementById('out-period-b').innerText =
window.periodoB.length;

    if (i === 11) {
      document.getElementById('disp-p').innerText = window.p;
      document.getElementById('disp-J').innerText = window.J;
      document.getElementById('disp-p2').innerText = window.p;
      document.getElementById('disp-J2').innerText = window.J;
      const g = gcd(window.J, window.p);
      const T = window.J / g;
      document.getElementById('out-lcm-formula').innerHTML =
        `${window.p} × <strong style="font-size:1.4em;">${T}</strong>`;
      document.getElementById('out-lcm-value').innerText = window.lcmPJ;
    }

    if (next <= 13) document.getElementById('step-' + next).classList.add('active');
    window.scrollTo({ top: 0, behavior: 'smooth' });
  }
```

```
function prevStep(i) {
  document.getElementById('step-' + i).classList.remove('active');
  document.getElementById('step-' + (i - 1)).classList.add('active');
  window.scrollTo({ top: 0, behavior: 'smooth' });
}

// Reinício suave (sem recarregar a página)
function restart() {
  // 1) Desativar todas as etapas
  document.querySelectorAll('.step').forEach(el => el.classList.remove('active'));
  // 2) Voltar para a etapa 1
  document.getElementById('step-1').classList.add('active');

  // 3) Resetar inputs para os valores padrão
  const inputP = document.getElementById('input-p');
  const inputJ = document.getElementById('input-J');
  inputP.value = 4;
  inputJ.value = 4;

  // 4) Limpar todas as saídas
  const idsToClear = [
    'disp-p-new','disp-J-new','disp-lcm-new',
    'out-m','out-a','out-b','out-period-b',
    'disp-p','disp-J','disp-p2','disp-J2',
    'out-lcm-formula','out-lcm-value'
  ];
```

```
      idsToClear.forEach(id => {
        const el = document.getElementById(id);
        if (el) el.innerText = '';
      });
      // out-lcm-formula é innerHTML
      const outFormula = document.getElementById('out-lcm-formula');
      if (outFormula) outFormula.innerHTML = '';

      // 5) Remover variáveis globais
      delete window.p;
      delete window.J;
      delete window.m;
      delete window.periodoA;
      delete window.periodoB;
      delete window.lcmPJ;

      // 6) Subir para o topo
      window.scrollTo({ top: 0, behavior: 'smooth' });
    }
  </script>
</body>
</html>
```