



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS  
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL – PROFMAT

JONATAS WESLEY PEDRICO

O USO DO GEOGEBRA COMO PROPOSTA DE ENSINO SOBRE EQUAÇÕES DAS  
RETAS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

ARAGUAÍNA – TO

2025

JONATAS WESLEY PEDRICO

O USO DO GEOGEBRA COMO PROPOSTA DE ENSINO SOBRE EQUAÇÕES DAS  
RETAS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional – PROFMAT da Universidade  
Federal do norte do Tocantins como requisito  
parcial para a obtenção do título de Mestre –  
Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Samara Leandro Matos  
da Silva

ARAGUAÍNA – TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT  
**Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

P372u Pedrico, Jonatas Wesley.

O uso do geogebra como proposta de ensino sobre equações das retas no ensino médio: uma proposta didática / Jonatas Wesley Pedrico. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.  
76 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática - ProfMat) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: Samara Leandro Matos da Silva.

1. Geogebra. 2. Geometria Analítica. 3. Equações das Retas.

**CDD 510**

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.


JONATAS WESLEY PEDRICO

O USO DO GEOGEBRA COMO PROPOSTA DE ENSINO SOBRE EQUAÇÕES DAS  
RETAS NO ENINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA

Trabalho de dissertação apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do norte do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Samara Leandro Matos da Silva


Aprovado em 28/05/2025.

Documento assinado digitalmente  
 SAMARA LEANDRO MATOS DA SILVA  
Data: 12/06/2025 16:33:37-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---


Prof.<sup>a</sup> Dra. Samara Leandro Matos da Silva (UFNT)

Orientadora

Documento assinado digitalmente  
 ALANA NUNES PEREIRA DE OLIVEIRA  
Data: 09/06/2025 14:28:14-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Alana Nunes Pereira (UFES)

Documento assinado digitalmente  
 RAIMUNDO CAVALCANTE MARANHÃO NETO  
Data: 10/06/2025 17:32:42-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Raimundo Cavalcante Maranhão Neto (UFNT)  
Examinador Interno

Documento assinado digitalmente  
 RENATA ALVES DA SILVA  
Data: 10/06/2025 16:27:38-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Renata Alvez da Silva (UFNT)  
Examinador Interno

*Dedico este trabalho a todos os professores que, de forma constante, buscam se atualizar e adotar as melhores estratégias para nos proporcionar uma educação de qualidade.*

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho. Obrigado aos meus professores pelas aulas enriquecedoras e, em especial, à minha orientadora pelo apoio constante ao longo de todo o processo. Aos meus colegas de estudo, que se tornaram amigos valiosos e companheiros de jornada. Aos meus familiares, meus filhos e minha esposa, que sempre estiveram ao meu lado, oferecendo amor, apoio e compreensão. A vocês, que me conhecem como ninguém e que, com personalidade e dedicação, estiveram presentes nos momentos de desafio e de celebração.

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdades, mas também suprema beleza”*

*Bertrand Russell*

## RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta didática voltada para o ensino de geometria analítica, no tocante, as equações das retas. Através de atividades que foram elaboradas e refinadas ao longo dos anos, traz definições, propriedades e resultados relevantes, buscou-se fornecer estratégias que permitam ao professor de matemática do 3º ano do ensino médio incorporar recursos inovadores ao seu plano de ensino, de modo a enriquecer a compreensão dos alunos sobre esse conteúdo. Uma proposta de natureza qualitativa que procura extrair o conhecimento dos conceitos e propriedades das retas em suas diferentes formas. Portanto, ao adotar o GeoGebra como recurso pedagógico, espera-se que os professores consigam facilitar o aprendizado dos alunos, incentivando a exploração, a análise e a construção de soluções para problemas matemáticos de forma mais colaborativa e eficaz. Assim, as atividades propostas neste trabalho têm o potencial de enriquecer as práticas pedagógicas e apoiar o desenvolvimento de habilidades críticas dos estudantes, promovendo uma aprendizagem significativa e duradoura.

**Palavras-chave:** GeoGebra, Geometria Analítica, Equações da retas.

## ABSTRACT

This paper aims to present a didactic proposal focused on teaching analytical geometry, regarding the equations of straight lines. Through activities that have been developed and refined over the years, it brings relevant definitions, properties and results. It sought to provide strategies that allow the 3rd year high school mathematics teacher to incorporate innovative resources into their teaching plan, in order to enrich students' understanding of this content. A qualitative proposal that seeks to extract knowledge of the concepts and properties of straight lines in their different forms. Therefore, by adopting GeoGebra as a pedagogical resource, it is expected that teachers will be able to facilitate student learning, encouraging exploration, analysis and the construction of solutions to mathematical problems in a more collaborative and effective way. Thus, the activities proposed in this paper have the potential to enrich pedagogical practices and support the development of students' critical skills, promoting meaningful and lasting learning.

**Keywords:** GeoGebra, Analytical Geometry, Line equations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Interface Inicial do Geogebra.....	22
Figura 2 – Menu Seleccionável.....	23
Figura 3 – Barra de Menus.....	23
Figura 4 – Ícone de Álgebra.....	25
Figura 5 – Campo de Entrada (Circunferência).....	25
Figura 6 – Campo de Entrada (Função Polinomial).....	26
Figura 7 – Ferramentas Básicas.....	27
Figura 8 – Controle Deslizante.....	28
Figura 9 – Medições.....	29
Figura 10 – Construções.....	30
Figura 11 – Retas.....	31
Figura 12 – Semelhança de Triângulos.....	35
Figura 13 – Equação Geral da reta (Expressão).....	37
Figura 14 – Equação Geral da reta.....	38
Figura 15 – Reta $r$ .....	40
Figura 16 – Reta $s$ .....	41
Figura 17 – Reta $t$ .....	41
Figura 18 – Coeficiente $a = 0$ .....	42
Figura 19 – Coeficiente $b = 0$ .....	43
Figura 20 – Reta Crescente.....	45
Figura 21 – Reta Decrescente.....	45
Figura 22 – Mapa Mental (Equações da reta).....	46
Figura 23 – Inclinação $\theta$ da Reta.....	48
Figura 24 – Inclinação da Reta.....	49
Figura 25 – $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$ .....	51
Figura 26 – $-m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$ .....	52
Figura 27 – Relações entre Retas Coplanares.....	53
Figura 28 – Criando “controle deslizante”.....	58
Figura 29 – Criando pontos pelo campo de entrada.....	58
Figura 30 – Criando retas a partir de dois pontos.....	59
Figura 31 – Coeficientes da equação geral da reta.....	60

Figura 32 – $ax + by + c = 0$ .....	60
Figura 33 – Coeficientes a, b e c .....	61
Figura 34 – Coeficientes a, b e c .....	62
Figura 35 – Forma geral da reta .....	62
Figura 36 – Ponto de intersecção com os eixos Ox e Oy. ....	63
Figura 37 – Coeficientes a, b e c .....	64
Figura 38 – Coeficientes m e q.....	65
Figura 39 – Equação geral da reta. ....	65
Figura 40 – Equação geral da reta. ....	66
Figura 41 – Inclinação da reta .....	67
Figura 42 – Coeficiente Linear .....	67
Figura 43 – Teclado do Geogebra .....	68
Figura 44 – Equação Reduzida da reta .....	68
Figura 45 – Criando pontos .....	69
Figura 46 – O ângulo de inclinação da reta .....	69
Figura 47 – Expressão geral na janela algébrica .....	70
Figura 48 – Coeficientes das retas r e t .....	71
Figura 49 – Equação reduzida da reta r .....	71
Figura 50 – Equação reduzida da reta t .....	72

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

TDIC – Tecnologia Digital, Informação e Comunicação.

TD – Tecnologia Digital.

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1 Tecnologias Digitais .....</b>	<b>19</b>
<b>2.2 Geogebra: um breve tutorial.....</b>	<b>21</b>
2.2.1 – Menu Seleccionável.....	22
2.2.2 – Barra de Menus.....	23
2.2.3 – Janela de Visualização .....	24
2.2.4 – Janela de Álgebra.....	24
2.2.5 – Menu de Ícones.....	24
<b>2.3 Geometria Analítica: Equações das Retas no Ensino Básico.....</b>	<b>32</b>
2.3.1 – Equação Geral da Reta.....	33
2.3.2 – Equação Segmentária da Reta .....	39
2.3.3 – Equação Reduzida da Reta .....	43
2.3.4 – Coeficiente Angular .....	47
2.3.5 – Posições Relativas entre Retas Coplanares.....	50
<b>3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....</b>	<b>55</b>
<b>4. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES .....</b>	<b>57</b>
<b>4.1 Atividade 1: Equação Geral da Reta.....</b>	<b>57</b>
<b>4.2 Atividade 2: Equação Segmentária da Reta.....</b>	<b>61</b>
<b>4.3 Atividade 3: Equação Reduzida da Reta .....</b>	<b>63</b>
<b>4.4 Atividade 4: Coeficiente Angular .....</b>	<b>66</b>
<b>4.5 Atividade 5: Posições Relativas entre Retas Coplanares.....</b>	<b>70</b>
<b>5. CONSIDERAÇÃO FINAIS .....</b>	<b>73</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>75</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A busca por estratégias que promovam um aprendizado significativo entre os estudantes é um desafio constante aos educadores, no que se refere a educação matemática, as tecnologias digitais se apresentam como forte ferramenta de ensino. Nesse viés, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere que os professores utilizem ferramentas matemáticas, inclusive tecnológicas digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos. Uma das competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio é explorar e formular conjecturas sobre diversos conceitos e propriedades matemáticas, fazendo o uso de estratégias e recursos variados como a observação de padrões, experimentações e o uso das tecnologias digitais.

Dessa forma, a utilização das tecnologias digitais no ensino de matemática tem um potencial significativo, podendo contribuir a elaboração do plano de ensino do professor. Essas tecnologias proporciona uma variedade de ferramentas que podem tornar o processo de ensino e aprendizagem mais interativos, visual e palpável aos estudantes.

Para Lima e Rocha (2022) no ensino de Matemática, em temas como geometria, funções, aritmética, entre outros, o uso de tecnologias digitais pode favorecer e enriquecer a compreensão dos conteúdos, isso por proporcionar aplicações significativas para aos alunos, permitindo que eles visualizem de forma concreta os conceitos abordados pelo professor.

Este trabalho tem por objetivo explorar o potencial do *software* Geogebra como ferramenta de ensino de geometria analítica, no tocante, estudo das retas. Uma proposta didática que permitirá aos alunos e educadores construir e explorar os conceitos de retas por meio do *software* Geogebra, estabelecendo conexões entre a álgebra e geometria. O Geogebra é uma ferramenta que fornece a visualização dinâmica de equações, este *software* se apresenta como uma solução frente os métodos tradicionais.

O processo de ensino e aprendizagem de matemática, pode apresentar dificuldade em demonstrar a relevância dos conteúdos para o cotidiano dos alunos, este é um problema frequentemente que resulta em desinteresse na compreensão da matemática. São muitos os trabalhos e pesquisas relacionadas ao uso do Geogebra como recurso didático. Trabalhos como o de Pereira (2015), Nascimento (2012), Ganeto et al (2018) e Leivas et al (2017), apontam que este *software* pode favorecer de forma mais autônoma a aprendizagem dos alunos, além de melhorar e/ou modificar a metodologias aplicada pelo professor.

Ao abordar esse tema de forma expositiva em sala de aula, percebia que os alunos se mostravam desinteressados e distantes do conteúdo. A partir do momento que passei a utilizar

a proposta didática presente neste trabalho, foi evidente a evolução no aprendizado e o aumento da participação dos estudantes durante as aulas. Este trabalho se justifica pela dificuldade observada em sala de aula em trabalhar o tema estudo das retas. Por se tratar de um conteúdo que por muitas vezes é apresentado de forma abstrata e distante da realidade, torna-se um desafio promover uma aprendizagem significativa. Assim, acredita-se que o uso do software GeoGebra possa possibilitar uma interação prática, visual e dinâmica entre o aluno e o objeto de estudo em questão. Essa ferramenta tecnológica contribui para tornar o aprendizado mais concreto, ao permitir que o estudante manipule objetos geométricos, observe propriedades e compreenda relações de forma mais intuitiva e envolvente.

Neste trabalho apresento uma proposta didática composta por cinco atividades com o software Geogebra, que proporcionará um aprendizado não apenas com a construção geométrica realizada, mas também, com a manipulação, dinâmica, e experimentação do objeto de estudo construído. Assim, a matemática que é por muitas vezes vista como uma disciplina teórica e abstrata, ganha um novo significado tornando os alunos investigadores. Com o Geogebra, eles têm a oportunidade de construir o conhecimento de forma mais ativa, conectando conceitos, observando padrões e analisando situações de diversas perspectivas.

De acordo com Pires (2015), as tarefas que fogem da rotina dos estudantes, como as investigações matemáticas, desempenham um papel fundamental para uma aprendizagem mais ativa e significativa. Ao envolver os alunos em desafios que estimulam a exploração, a formulação de hipóteses, a análise de padrões e construção do conhecimento, esses tipos de tarefas vão além da simples repetição de procedimentos, elas desenvolvem o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia, permitindo que os estudantes se envolvam de forma mais profunda com os conteúdos. Assim, esse tipo de atividade favorece a construção do conhecimento de maneira ainda mais relevante, aproximando a matemática do cotidiano e das vivências dos alunos.

A geometria analítica é uma área que muitas vezes apresenta desafios para os alunos, devido à sua abordagem abstrata ou teórica. Buscando superar essas dificuldades, a proposta é utilizar essa ferramenta tecnológica para proporcionar uma aprendizagem mais interativa e dinâmica. Com a visualização gráfica dos conceitos, os alunos têm a oportunidade de explorar de forma prática e intuitiva temas como as equações de retas.

Este trabalho está organizado em capítulos, os quais contemplam as seguintes estruturas.

Capítulo 1: Introdução - Inicialmente, é feita a exposição do tema central, seguida da problematização, que consiste na delimitação da questão principal que motivou a investigação. Em seguida, são apresentados os objetivos da proposta didática, e a justificativa que é discutida

com base na importância teórica e prática do tema, mostrando as contribuições que a proposta pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem. Por fim, apresenta-se uma visão geral da estrutura da pesquisa, indicando como o conteúdo será organizado nos capítulos seguintes, a fim de orientar o leitor ao longo da leitura.

Capítulo 2: Fundamentação Teórica – Neste capítulo, são apresentados os conceitos fundamentais que constituem a base teórica necessária para a compreensão do desenvolvimento da proposta didática aqui elaborada. Inicialmente, abordaremos o tema “tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem”, enfatizando sua relevância no ensino da matemática. Em seguida, é apresentado um tutorial sobre o Geogebra, ferramenta central para a execução das atividades propostas, o tutorial concentra-se nas ferramentas essenciais para a realização das atividades que compõem a proposta didática deste trabalho, garantindo que o leitor, ou o professor que venha a aplicar a proposta tenha o domínio sobre o uso do software. Por fim, são detalhados os conteúdos matemáticos que se fazem presente na proposta didática, essa apresentação será feita de maneira expositiva, com definições e acompanhadas de exemplos que visam facilitar a compreensão dos conceitos abordados.

Desta forma, o capítulo oferece ao leitor, fundamentos teóricos, e os recursos práticos necessários para a plena compreensão e execução a proposta didática deste trabalho.

Capítulo 3: Procedimentos Metodológicos – Este capítulo detalha os procedimentos empregados. A proposta didática será desenvolvida por meio de atividades práticas e exploratórias, com foco na resolução de problemas e no uso de tecnologias digitais como ferramenta de apoio ao ensino de matemática.

Capítulo 4: Descrição das Atividades – Neste capítulo, é apresentado ao leitor a proposta didática desenvolvida para o ensino do conteúdo “retas”, estruturada em cinco atividades sequenciais, cada uma das atividades foi cuidadosamente elaborada com o objetivo de promover uma aprendizagem significativa, envolvendo os estudantes em um processo de ensino e aprendizagem ativo de construção do conhecimento. Através da utilização do Geogebra, o estudante poderá explorar conceitos relacionados a equação geral da reta, equação segmentária da reta, equação reduzida da reta, coeficiente angular, posições relativas entre retas coplanares. Busca-se não apenas facilitar o entendimento dos aspectos teóricos do estudo das retas, mas também, despertar o interesse dos alunos pela matemática ao aproximar os conceitos da matemática com a realidade digital em que estão inseridos. Este capítulo, detalha a organização das atividades, seus objetivos e orientações metodológicas para sua aplicação.

Capítulo 5: Considerações Finais – Neste capítulo, compartilho um relato sobre minha experiência profissional ao aplicar a proposta didática apresentada ao longo deste trabalho.

Descrevo como foi desenvolver e implementar essa metodologia de ensino no contexto real de sala de aula, evidenciando os resultados observados e os benefícios alcançados. Essa vivência permitiu perceber seu grande potencial de transformar o modo como esse conteúdo é ensinado. Ao longo da aplicação, ficou evidente que esse método favorece uma aprendizagem mais significativa, despertando o interesse do aluno, pois a possibilidade de apresentar as equações das retas de maneira visual e interativa contribui para que os estudantes compreendam com mais clareza os conceitos matemáticos envolvidos.

Dessa forma, com o objetivo de não apenas documentar minha trajetória, espero que esta proposta didática possa inspirar outros educadores a explorá-la em suas práticas pedagógicas.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 – Tecnologias Digitais.

O uso das Tecnologias Digitais (TD) é essencial no contexto educacional. Essas ferramentas, que incluem computadores, internet, softwares educacionais, plataformas de aprendizagem online e dispositivos móveis, oferecem uma nova perspectiva do que está sendo trabalhado, e com isso, proporciona diversos benefícios que podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

O processo de ensino-aprendizagem da matemática se torna um grande desafio para os professores e estudantes. Dependendo do assunto a ser trabalhado, a construção do conhecimento em questão não se relaciona facilmente com o dia-a-dia, e isso, dificulta a compreensão do mesmo. Isso acontece em diversos momentos, os conceitos matemáticos são ensinados de forma pouco concreta, ou mesmo sem considerar a sua aplicação fora da escola.

As TD são mencionadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como ferramenta pedagógica que deve ser utilizado para enriquecer a experiência educacional dos alunos. Utilizando os recursos digitais, podemos tornar alguns assuntos na matemática mais palpáveis e atraentes aos olhos dos alunos, transformando o processo de ensino-aprendizagem.

É fundamental que ambiente educacional transforme os pensamentos dos alunos, proporcionando que os mesmos desenvolvam atividades criativas, compreendam conceitos, reflitam sobre eles e em seguida, crie novos significados. As TD agregam ao meio educacional como uma ótima ferramenta que permite o educando a construir, explorar, reconstruir, interagir para compreender, para criar novos significados a partir das situações que se apresentam, e assim, desenvolver no aluno, a observação, o questionamento e a criatividade. Deste modo, cabe aos órgãos competentes oferecer novas oportunidades de formações, para manter o educador atualizado, buscando fornecer ao professor o conhecimento de diversas ferramentas de ensino e recursos digitais. Assim, munido de diversas formas de ensinar, poderá optar por quais metodologias utilizar, de que forma e em que momento.

Diante dessas colocações, reforçamos a necessidade de proporcionar aos professores de matemática oportunidades de conhecer e de se apropriar do uso das tecnologias digitais dentro de suas práticas pedagógica.

Perceber que as potencialidades das tecnologias que podem ser mobilizadas para contextos formativos e identificar modos de usar de forma produtiva na formação inicial e contínua, tanto com os professores que já usam com muita destreza estas tecnologias,

como com professores que mantém com elas uma relação incipiente. (Ponte, 2014, p. 354)

Borba e Penteadó (2010) abordam o tema dificuldades que alguns professores têm de sair da zona de conforto. Segundo eles, esse termo ‘zona de conforto’ é atribuído aos professores que realizam sua prática didática de forma que não lhe cause insegurança ou risco, procuram trabalhar de forma onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável.

[...] ao caminhar em direção à zona de risco, o professor pode usufruir o potencial que a tecnologia informática tem a oferecer para aperfeiçoar sua prática profissional. Aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem. (Borba, Penteadó, 2010, p. 66)

Se isso estiver ao seu alcance, considerando as duras condições de trabalho, ele se torna um agente de transformação na educação e na vida de seus alunos. Permanecer do mesmo jeito, é aceitar um ambiente educacional que pode limitar o potencial de inovação e o desenvolvimento. Ao se desafiar e aceitar novas metodologias pedagógicas, o professor promove aos seus alunos um aprendizado mais significativo.

Em um mundo de constante mudanças, é importante que o professor acompanhe e se atualize. Quando o docente abandona a zona de conforto ele se permite crescer, aprender com seus erros, e assim proporcionar um ambiente de aprendizado mais dinâmico e inspirador.

Além disso, o professor mostra aos alunos a importância de se desafiar e a valorizar os erros como parte do processo de aprendizado. Isso fortalece a autonomia e a criatividade dos estudantes, incentivando-os a buscar soluções e a desenvolver habilidades que permitam a ele construir o conhecimento sobre determinados assuntos, sendo ativos e comprometidos com seu próprio desenvolvimento.

Santana e Medeiros (2014) afirma que “[...]o papel do mediador é fundamental para criar situações nas quais o aluno é levado a refletir”. Por outro viés, as tecnologias digitais demandam diversos conhecimentos os quais são necessários para que o professor de matemática consiga pensar, criar, planejar e ensinar. Se aprimorar destas ferramentas de ensino não é algo simples e fácil, é um processo gradativo, onde o professor está em constante construção e reconstrução de conhecimento. Está diretamente ligado a como o educador se predispõe a aprender e a reconstruir os seus conhecimentos para o uso da tecnologia na sua prática, explorando adequadamente seus potenciais no processo de ensino e aprendizagem. Assim como as condições de trabalho, de oportunidades de formação continuada, de como foi sua formação profissional.

Assim, sair da zona de conforto não é tarefa fácil, mas cabe ao corpo docente trabalhar em unidade, compartilhando experiências e conhecimentos para que todos possam crescer juntos, e, assim, proporcionar aos estudantes uma nova perspectiva, uma maneira diferente de aprender. É uma atitude que trará crescimento pessoal e profissional, trazendo melhorias a qualidade da educação fornecida. Essa atitude não só beneficia a trajetória do educador, mas também contribui para a construção de uma sociedade mais preparada e capaz de lidar com os desafios futuros.

Neste contexto, o Geogebra é um *software* de matemática que se destaca dentre as muitas possibilidades de TD. O Geogebra vem sendo utilizado principalmente no ensino da geometria, e da álgebra. Sua versatilidade o torna uma opção para ser integrado ao processo de ensino-aprendizagem, oferecendo recursos para facilitar a compreensão de conceitos abstratos e promover a exploração ativa pelos alunos.

Neste cenário, o Geogebra se destaca por ser um software facilitador, por atender a diversos estilos de aprendizagem, oferecendo uma alternativa mais envolvente. De acordo com Farias (2021), muitas são as vantagens de utilizar o Geogebra, o estudante percebe de modo mais claro como ocorre a relação da geometria com a álgebra, tornando o conhecimento mais leve e facilitado, de forma a não causar espanto como outrora.

Assim, considerando as potencialidades de trabalhar com as TD, no tocante, o Geogebra, entendemos que esse *software* pode somar com o processo de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, no que se refere a equações das retas.

## **2.2 – Geogebra: um breve tutorial.**

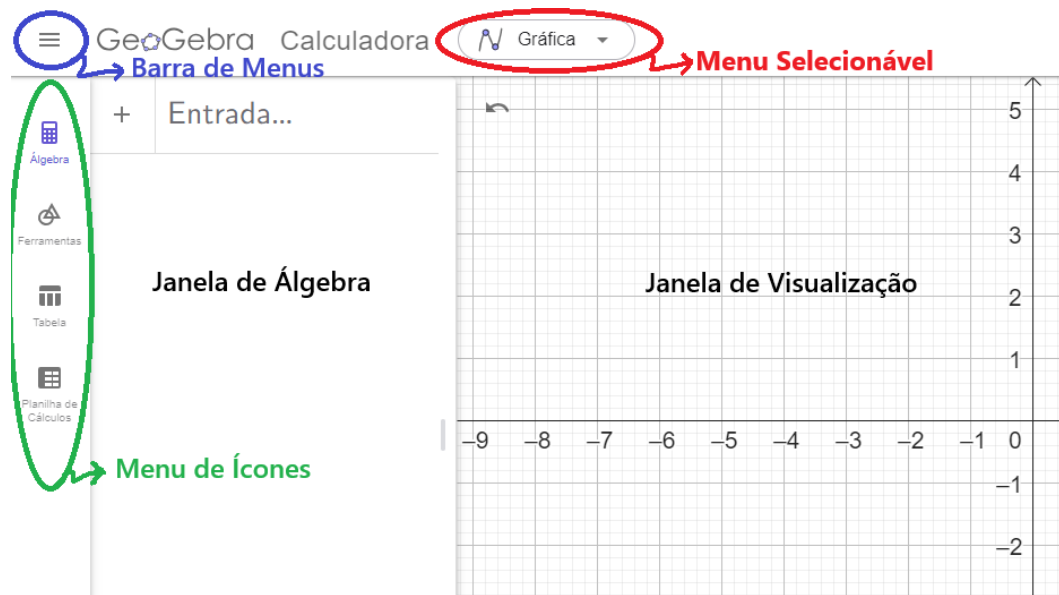
O geogebra foi criado em 2001 pelo matemático Markus Hohenwarter, é um *software* dinâmico que auxilia o processo de ensino e aprendizagem de matemática em todos os níveis de educação. De acordo com Caliani (2021) trata-se do *software* mais conhecido e utilizado nos dias atuais. O programa possibilita aos alunos uma interação com os conceitos matemáticos, possibilitando que cada um possa explorar, investigar e construir o conhecimento. Gratuito e acessível por meio do site disponível em [www.geogebra.com](http://www.geogebra.com), o geogebra pode ser utilizado tanto online quanto em sua versão offline.

Como todo *software*, é necessário conhecer os principais comandos para executar adequadamente as funções que compõem o programa. Assim, conhecer suas ferramentas, teclas de atalhos e comandos devem ser entendido e explorado pelo usuário.

A Interface do Geogebra é bem simples e de fácil manuseio. A versão utilizada neste trabalho 6.0.866.0. O Geogebra contém vários comandos que podem ser executados, sendo suas principais aplicações relacionadas aos conteúdos de geometria e álgebra.

Abaixo, na Figura 1, você poderá entender quais os componentes da interface inicial do Geogebra.

Figura 1: Interface Inicial Geogebra.



Fonte: Autor.

### 2.2.1 - Menu Seleccionável

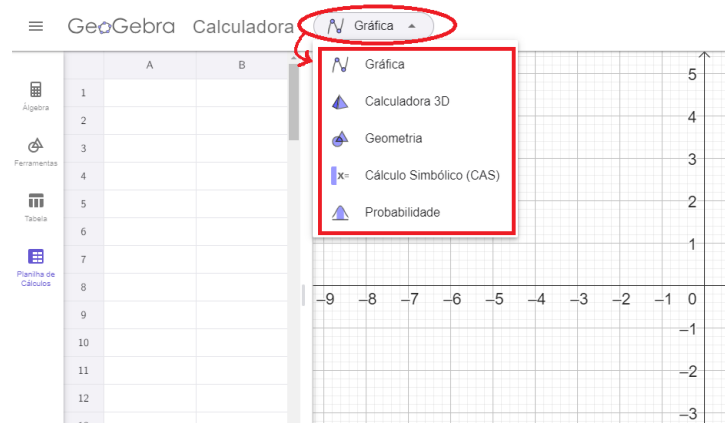
Trata-se de um menu com diferentes ambientes de trabalho, que permite escolher vários tipos de ferramentas, de acordo com os objetos desejado. As opções disponíveis são: Gráfica, Calculadora 3D, Geometria, Cálculo Simbólico e Probabilidade. Cada uma dessas versões oferece funcionalidades que atendem diferentes áreas da matemática.

A opção “Calculadora 3D” permite a criação, visualização e manipulação de figuras geométricas espaciais. Suas ferramentas possibilitam a rotação do espaço gráfico, proporcionando o controle da perspectiva, tornando-se uma ferramenta enriquecedora ao processo de ensino e aprendizagem.

A proposta didática deste trabalho está voltada para o ambiente “Gráfica”, por ser o mais adequado aos estudos da reta. Dessa forma, o breve tutorial apresentado a seguir estará focado exclusivamente no ambiente “gráfica” do Geogebra, onde estaremos vendo apenas as

ferramentas necessárias para a realização das atividades da proposta. Por esse motivo, nosso breve tutorial apenas nesse ambiente de trabalho. Observe a Figura 2.

Figura 2: Menu Seleccionável.



Fonte: Autor.

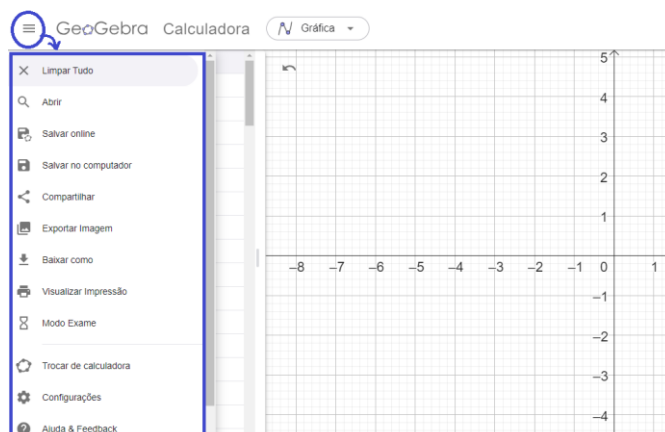
### 2.2.2 - Barra de Menus

A barra de menus é uma parte fundamental do software, pois organiza os principais comandos e recursos disponíveis para o usuário. Na Figura 3 podemos visualizar as opções oferecidas por essa barra de menu. Dentre elas, destacam-se:

**Configurações** - permite ajustar elementos como a cor do plano cartesiano, a forma como os objetos são exibidos, unidades de medidas, aspectos visuais, etc.

**Ajuda** - direciona o usuário para um material de apoio, tutoriais e vídeos com informações sobre o software.

Figura 3: Barra de Menus.



Fonte: Autor.

### 2.2.3 - Janela de Visualização

A Área de visualização é um ambiente no Geogebra onde podem ser representadas figuras geométricas desenhadas com o mouse, por meio dos ícones da barra de ferramentas, e também podem ser representados gráficos de funções polinomiais, utilizando comandos digitados no campo de entrada. Por meio da janela de visualização, podemos observar em tempo real as alterações provocadas por mudanças em variáveis, controles deslizantes ou expressões algébricas. Qualquer modificação feita por meio de comandos ou equações se refletem imediatamente na área gráfica, promovendo uma aprendizagem mais interativa e visual dos conceitos matemáticos.

### 2.2.4 - Janela de Álgebra

Trata-se da área responsável por exibir, de forma organizada, as expressões algébricas correspondentes aos objetos criados na janela de visualização. Ela permite ao estudante relacionar as representações geométricas de cada objeto, com sua representação algébrica, constituindo uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

### 2.2.5 - Menu de Ícones

Neste menu os ícones: Álgebra, Ferramentas, Tabela, e Planilhas de Cálculos. A “Janela de Álgebra” é totalmente dependente do ícone escolhido.

É possível observar as diferentes possibilidades do Geogebra por meio dos ícones disponíveis na interface, especialmente os ícones “Álgebra” e “Ferramentas”, que oferecem recursos para a construção e exploração de objetos matemáticos. Neste tutorial, não abordaremos os ícones “Tabela” e “Planilha de Cálculo”, pois suas funcionalidades não serão utilizadas nas atividades propostas nesta proposta didática.

Na Figura 4, podemos observar as funcionalidades da janela de álgebra quando clicamos no ícone “Álgebra”. Observamos o campo de entrada, local onde podemos inserir pares ordenados, equações de retas, equações de circunferências, diferentes funções, e etc. Caso exista alguma dificuldade em escrever algumas letras gregas ou símbolos matemáticos, o teclado do Geogebra pode nos ajudar neste momento.

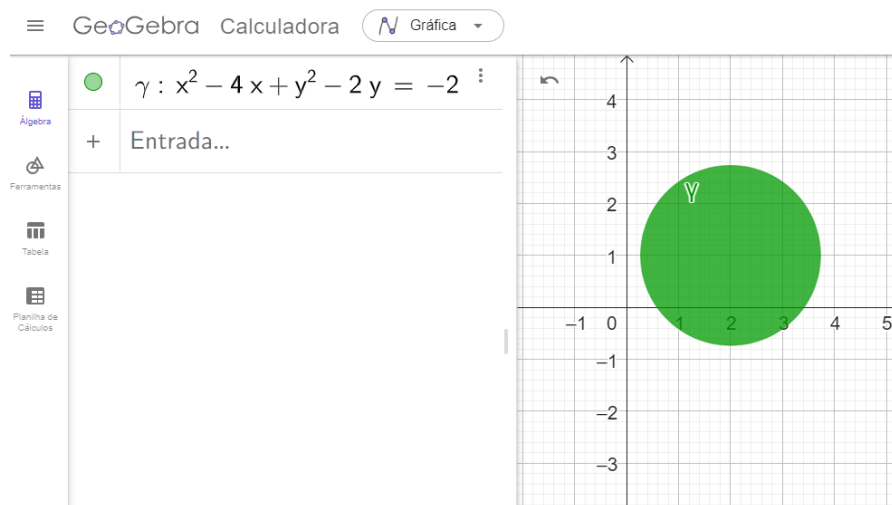
Figura 4: Ícone de Álgebra.



Fonte: Autor.

Como exemplo, podemos inserir diretamente a equação de uma circunferência no campo de entrada do Geogebra. Suponha que desejamos representar a circunferência  $\gamma$ , definida pela equação  $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 2 = 0$ . Para isso, ao digitar “ $\gamma: x^2 - 4x + y^2 - 2y = -2$ ” no campo de entrada e pressionar “Enter”. O Geogebra processará a equação e exibirá automaticamente a circunferência na Janela de Visualização, veja Figura 5.

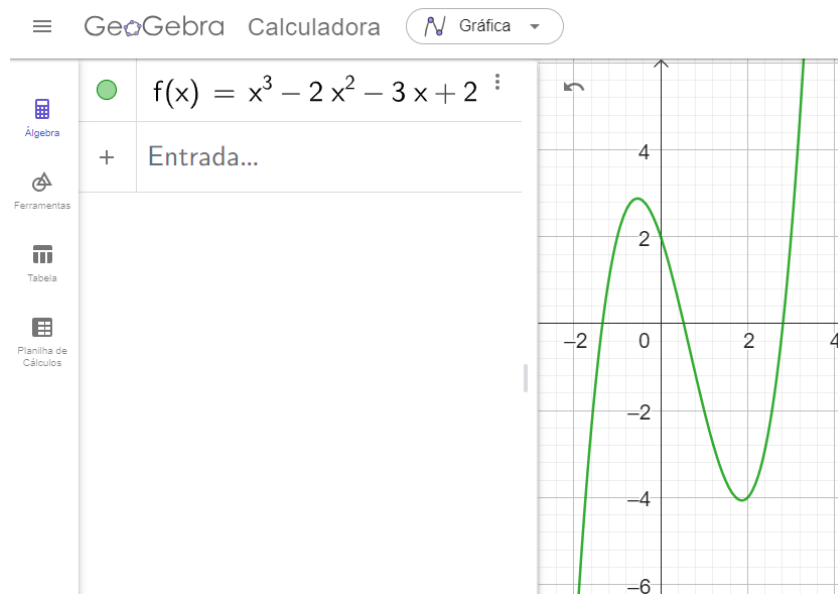
Figura 5: Campo de Entrada (Circunferência).



Fonte: Autor.

Outro exemplo de uso do campo de entrada do Geogebra é a construção do gráfico de uma função polinomial. Suponha que desejamos representar graficamente a função  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ . Para isso, basta digitar a expressão da função no campo de entrada. Assim que a equação for inserida e confirmada, o Geogebra ira gerar automaticamente o gráfico correspondente, como na Figura 6.

Figura 6: Campo de Entrada (Função Polinomial).



Fonte: Autor.

Esse recurso é útil para realizar investigações matemáticas e comparar diferentes formas de representações, algébrica, geométrica e gráfica, facilitando a análise visual da figura e permitindo a interação com outros elementos.

No ícone “Ferramentas”, encontramos algumas opções para construções geométricas. Para usar uma ferramenta, basta selecioná-la e, em seguida, criar o objeto desejado clicando na Janela de visualização. Após sua utilização, ela continua selecionada até que uma outra seja escolhida. As ferramentas padrão do Geogebra são divididas em grupos, são eles: ferramentas básicas, editar, mídia, medições, pontos, construções, retas, polígonos, círculos, cônicas, transformar, dentre outras. Visando o objetivo deste trabalho, abordaremos aqui os grupos ferramentas básicas (Figura 7), medições (Figura 9), construções (Figura 10) e retas (Figura 11), uma vez que é nesses grupos que se encontram os recursos essenciais para a realização das atividades propostas.

Figura 7: Ferramentas Básicas.



Fonte: Autor.

A seguir, apresentamos os significados de cada item em ferramentas básicas.

**Mover** – move um objeto ao longo da janela de visualização. Para isso, basta selecionar o objeto e arrastá-lo até a posição desejada.

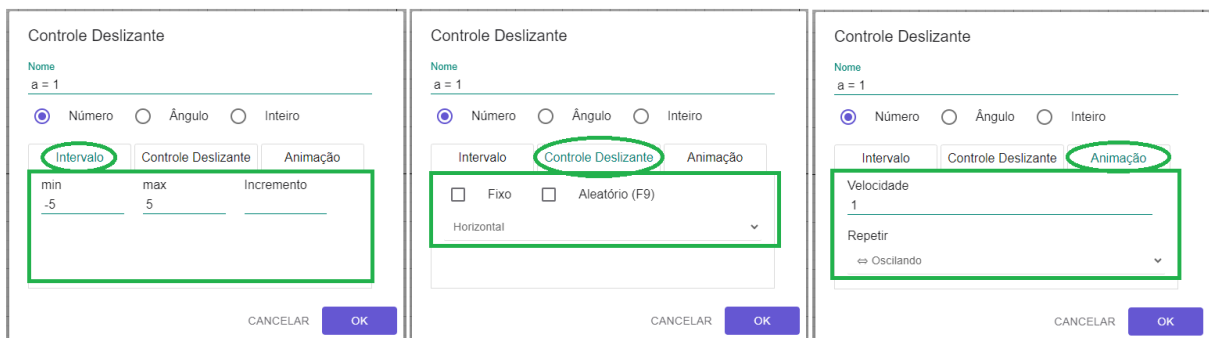
**Ponto** – cria um ponto na janela de visualização. Para isso, basta selecionar a posição desejada na janela de visualização.

No Geogebra, existem três tipos de pontos, diferenciados principalmente por sua cor e mobilidade. Na cor azul, temos o ponto livre, este pode ser movimentado livremente por toda a janela de visualização. Na cor azul claro, temos o ponto móvel com restrição, este é criado sobre um objeto, como uma reta ou circunferência e só pode se mover ao longo desse objeto. Finalmente, na cor preta, temos o ponto fixo, este é gerado automaticamente em posições definidas, como intersecção entre objetos, e não pode ser movido.

**Controle deslizante** – permite, ao clicar na Janela de Visualização, a criação de um botão rolante, usado para determinar o valor do objeto em si. Ele pode ser configurado da seguinte forma: inicialmente, é necessário marcar se o valor do objeto corresponde a um número real, ângulo, ou número inteiro. Em seguida, configuramos em “intervalo” o valor máximo, valor mínimo, e o incremento. Assim, podemos escolher qual o intervalo número que queremos e também a forma que queremos essa variação. Por exemplo, ao colocarmos, valor máximo 12, valor mínimo 2 e incremento 2, a variação do intervalo será entre os números  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ , se alterarmos o incremento para 3, a variação do intervalo será entre os números  $\{2, 5, 8, 11\}$ .

Observe na Figura 8, que podemos escolher em “controle deslizante” se queremos ele fixa ou aleatório em um lugar na janela de visualização, como também podemos colocá-lo na horizontal ou na vertical. Em “Animação”, configuramos a velocidade e a forma que o mesmo irá se mover, podendo se mover de forma crescente, oscilante, decrescente, ou crescente apenas uma vez.

Figura 8: Controle Deslizante.



Fonte: Autor.

**Interseção de dois objetos** – cria um ponto fixo que pertence aos dois objetos ao mesmo tempo. Nos casos em que a interseção é um conjunto que contém mais de um ponto, apenas um ponto será criado.

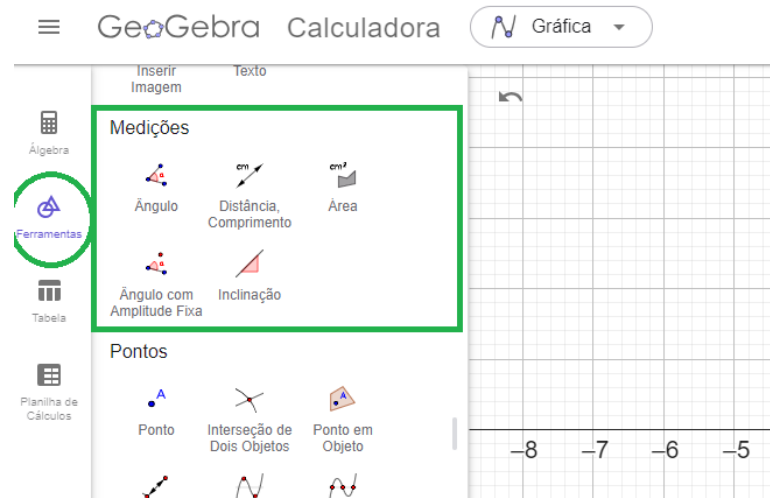
**Otimização** – exibe todos os extremos com coordenadas  $(x, y)$ , que representa o ponto  $Z$ , que é da forma  $z = x + yi$ , sendo  $i^2 = -1$ . Para utilizá-lo basta selecionar as coordenadas do ponto desejado na janela de visualização.

**Raízes** – funciona seguindo a mesma lógica da ferramenta “otimização”, entretanto, exibe as raízes das funções escolhida.

**Reta de regressão** – determina a reta que mais se adequa a uma sequência de pontos. Ela determina o que seria a reta ideal para aquela situação. Para utilizá-la, basta selecionar a sequência de pontos que gerará a reta desejada.

Das ferramentas citadas neste primeiro grupo destacam-se, “mover”, “ponto”, e “controle deslizante”, isto por serem ferramentas fundamentais para o desenvolvimento das atividades presente na proposta didática deste trabalho. O uso conjunto destas ferramentas proporciona uma experiência mais rica e interativa, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos abordados nas atividades.

Figura 9: Medições.



Fonte: Autor.

**Ângulo** – determina o ângulo entre dois segmentos. Para utilizá-la basta selecionar os segmentos, o ângulo gerado será construído sempre no sentido anti-horário.

**Distância, Comprimento** – exibe uma caixa de texto com informações sobre um ou mais objetos, como distancia entre eles, comprimento de um segmento, ou perímetro de uma figura.

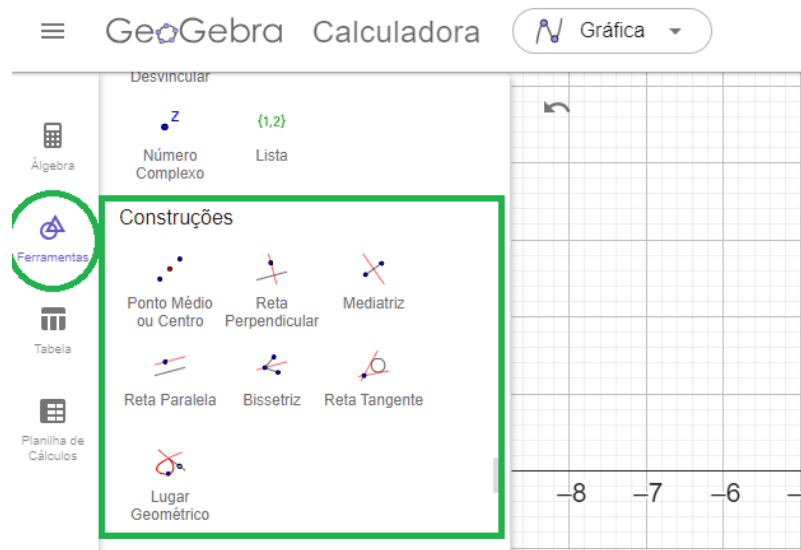
**Área** – exibe uma caixa de texto com a área do objeto selecionado.

**Ângulo com Amplitude Fixa** – determina um ângulo a partir de um segmento e sua amplitude. Será determinado a medida em graus do ângulo desejado, existindo a possibilidade de escolher o sentido horário ou anti-horário.

**Inclinação** – apresenta coeficientes de inclinação de uma reta. Para isso, basta selecionar o objeto cujo coeficiente deseja-se descobrir.

Entre as ferramentas disponíveis neste grupo, destaca-se a opção ângulo, por sua relevância nas atividades propostas. Durante o desenvolvimento da proposta didática, será necessário calcular o ângulo de inclinação entre retas, e essa ferramenta se mostra perfeitamente adequada para esse propósito.

Figura 10: Construções.



Fonte: Autor.

**Ponto médio ou centro** – basta selecionar os dois pontos extremos de um segmento de reta, ou clicar sobre o segmento, em seguida o ponto que tem por característica a mesma distância entre os extremos aparecerá.

**Reta Perpendicular** – ao selecionar ou criar um ponto e, em seguida escolher uma reta já criada, a ferramenta gera uma nova reta perpendicular a escolhida, passando pelo ponto desejado.

**Mediatriz** – cria uma reta perpendicular a um segmento de reta passando pelo ponto médio deste segmento.

**Reta Paralela** – assim como na opção retas perpendiculares, essa ferramenta gera uma reta paralela a outra reta já criada passando por um ponto desejado.

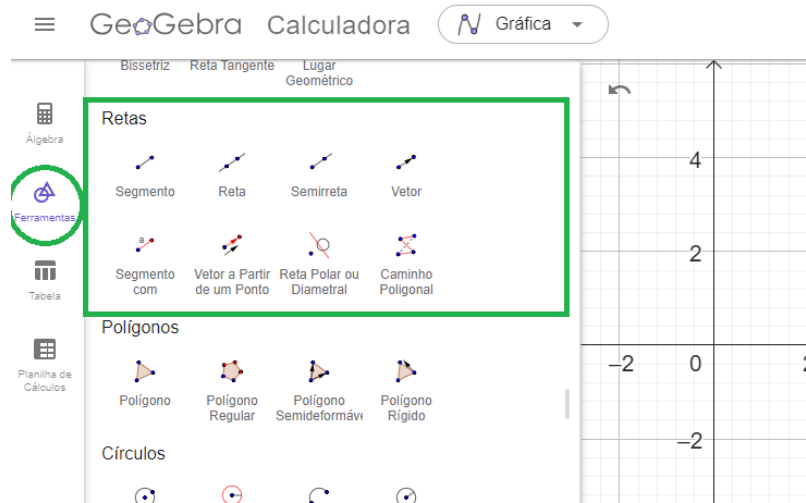
**Bissetriz** – para utilizar essa ferramenta, basta selecionar duas retas concorrentes ou segmentos de reta que se interceptam, também é possível selecioná-la por meio de três pontos não colineares. O Geogebra traçará automaticamente a bissetriz do ângulo formado, dividindo-o em dois ângulos congruentes.

**Reta Tangente** – essa ferramenta permite definir uma reta tangente a uma função, cônica ou circunferência selecionada. Quando houver mais de uma possibilidade de tangente, o Geogebra exibirá automaticamente todas as opções.

**Lugar Geométrico** – cria um lugar geométrico com base na relação de dependência entre dois pontos, ou entre um ponto e um controle deslizante.

Ao longo das atividades desta proposta didática, exploraremos as relações entre retas no plano, como retas paralelas e perpendiculares. Com esse objetivo, as ferramentas “retas paralelas” e “retas perpendiculares” são fundamentais. Essas construções são essenciais para a visualização e compreensão dos conceitos geométricos, além de favorecem a argumentação matemática por meio da manipulação dinâmica dos elementos na janela de visualização.

Figura 11: Retas.



Fonte: Autor.

Dentre as ferramentas do grupo “Retas”, abordaremos apenas as opções, Segmentos, Reta, Semirreta e Segmento com comprimento fixo, por serem as mais relevantes para o desenvolvimento das atividades propostas.

**Segmento** – selecionando essa opção, basta clicar em dois lugares quaisquer da janela de visualização.

**Reta** – basta criar ou selecionar dois pontos na janela algébrica e logo teremos uma reta definida por dois pontos.

**Semirreta** – pode ser criada a partir de dois pontos, previamente definidos ou inseridos no momento da construção. O primeiro ponto determinará a origem da semirreta, enquanto o segundo indicará a direção, funcionando como referência para o vetor diretor.

**Segmento com Comprimento fixo** – é criado ao selecionar ou criar um ponto livre que dará origem ao segmento, pedindo o comprimento desejado. Automaticamente, será criado um segundo ponto, móvel com restrição, para determinar o segundo ponto.

### 2.3 – Geometria Analítica: Equações das Retas

Estudar Geometria Analítica no Ensino Básico é fundamental, nesta área da matemática podemos perceber, a relação existente entre a álgebra e a geometria. Trata-se de representar figuras geométricas planas no plano cartesiano, através de equações e coordenadas. O que nos possibilita uma visão mais clara das propriedades e atributos dos conceitos mais abstratos.

Segundo Peres (1995), a geometria é descrita como um corpo de conhecimento fundamental para a compreensão do mundo e participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual. A importância do ensino e aprendizagem da geometria no ensino básico está fundamentada nos documentos que regem a Educação. Como por exemplo os PCNs (Brasil, 1998), que destacam a importância desse ramo da matemática, que também serve de instrumento para outras áreas do conhecimento.

A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. PCN (BRASIL 2018, p. 269).

Nesse viés, o estudo da geometria é essencial para desenvolver no indivíduo o pensamento geométrico. Para Tortora e Pirola (2016) “[...] possibilita aos sujeitos o desenvolvimento de uma série de habilidades, como orientação espacial, percepção geométrica, abstração, representação mental de imagens, entre outras [...]”

Com isso, além da geometria analítica trazer uma interação entre álgebra e geometria, este estudo também desenvolve o pensamento lógico e crítico, e aprimora a visão espacial. Lorenzato (1995) afirma que para justificar a necessidade de ter geometria na escola bastaria o falar que sem estudá-la as pessoas não obteriam um razoável desenvolvimento do pensamento geométrico ou raciocínio visual. E sem essa habilidade, elas dificilmente conseguiriam resolver as situações de vida que fossem geométricas.

Nessa perspectiva, optamos em trabalhar com a geometria analítica, no intuito de despertar a curiosidade e a percepção do estudo das retas escritas nas diferentes formas algébricas, e suas representações no plano cartesiano. Isso para que o aluno possa interpretar e analisar o mundo físico entendendo que a matemática, no tocante, geometria analítica, está presente no dia-a-dia, relacionando a geometria com a álgebra.

Os conteúdos abordados nas atividades desta proposta didática estão organizados de forma pontual, permitindo ao leitor relacionar cada atividade aos respectivos objetos de estudo.

Assim, por exemplo, a atividade 4.1 trata do tema “Equação geral da reta”, corresponde ao conteúdo apresentado na subseção seguinte 2.3.1. O mesmo padrão de correspondência se aplica às demais atividades.

### 2.3.1 Equação Geral da Reta.

De acordo com João Lucas (1995), um dos axiomas de incidência e ordem no estudo de geometria euclidiana plana, é “dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém esses pontos”. Trazendo este conceito para a geometria analítica, vemos que a reta é determinada por quaisquer dois pontos que pertençam a ela. Deste modo, se é conhecido dois pontos distintos pertencentes a uma reta, logo se faz conhecida sua equação. Iremos determinar aqui a equação geral da reta a partir de dois pontos.

Para tanto, começaremos com o teorema de condição de alinhamento entre três pontos. Assim, se conhecemos as coordenadas de dois pontos A e B quaisquer da reta, o terceiro ponto C de coordenadas  $(x, y)$  necessariamente irá pertencer a reta. A condição de alinhamento entre os pontos A, B e C apresentará uma expressão que relaciona as coordenadas  $x$  e  $y$  de qualquer ponto C que pertença a reta.

Segundo Gelson Iezzi (2013). Apresenta o seguinte teorema:

Três pontos  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x, y)$  são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:  $(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$ .

#### ***Demonstração:***

##### 1º Parte

*Hipótese*

*Tese*

$A, B, C$  colineares  $\Rightarrow (x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$ .

*Para essa parte temos que uma das três opções a seguir podem acontecer.*

*i) Dois dos pontos coincidem ( $A = B$ , por exemplo).*

*Neste caso  $x_A = x_B$  e  $y_A = y_B$  e daí:*

$$(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$$

$$0 \cdot (y - y_B) = (x - x_B) \cdot 0$$

$$0 = 0$$

*ii) Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos.*

*Caso seja paralela ao eixo  $Ox$ , temos que:  $y_A = y_B = y$  e daí:*

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)(y - y_B) &= (x - x_B)(y_B - y_A) \\ (x_B - x_A) \cdot 0 &= (x - x_B) \cdot 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Caso seja paralelo ao eixo  $Oy$ , temos que:  $x_A = x_B = x$  e daí:

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)(y - y_B) &= (x - x_B)(y_B - y_A) \\ 0 \cdot (y - y_B) &= 0 \cdot (y_B - y_A) \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

iii) Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela a  $Ox$  nem a  $Oy$ .

Neste caso, seja  $r$  a razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ . Temos:

$$r = \frac{x_B - x_A}{x - x_B} \text{ e } r = \frac{y_B - y_A}{y - y_B}$$

Segue que  $\frac{x_B - x_A}{x - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y - y_B}$  e decorre que:

$$(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$$

## 2ª Parte

*Hipótese*

*Tese*

$$(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A) \Rightarrow A, B, C \text{ colineares}$$

Para essa parte da demonstração também existe três situações possíveis.

i)  $x - x_B = 0$  (ou seja,  $x_B = x$ )

Neste caso, a hipótese fica sendo  $(x_B - x_A)(y - y_B) = 0$  e então:

$$x_B - x_A = 0 \text{ ou } y - y_B = 0$$

Se  $x_B - x_A = 0$ , resulta  $x_A = x_B = x$ , e então  $A, B, C$  ficam colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao  $Oy$ .

Se  $y - y_B = 0$ , resulta  $y_B = y$  ou  $x_B = x$ , e então  $A, B, C$  ficam colineares porque  $B$  e  $C$  coincidem.

ii)  $y_B - y_A = 0$  (ou seja,  $y_A = y_B$ )

Neste caso, a hipótese fica sendo  $(x_B - x_A)(y - y_B) = 0$  e então:

$$x_B - x_A = 0 \text{ ou } y - y_B = 0$$

Se  $x_B - x_A = 0$ , resulta  $x_A = x_B$  e  $y_A = y_B$ , e então  $A, B, C$  ficam colineares porque  $A$  e  $C$  coincidem.

Se  $y - y_B = 0$ , resulta  $y_A = y_B = y$ , e então  $A, B, C$  ficam colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo  $Ox$ .

iii)  $x - x_B \neq 0$  e  $y_B - y_A \neq 0$

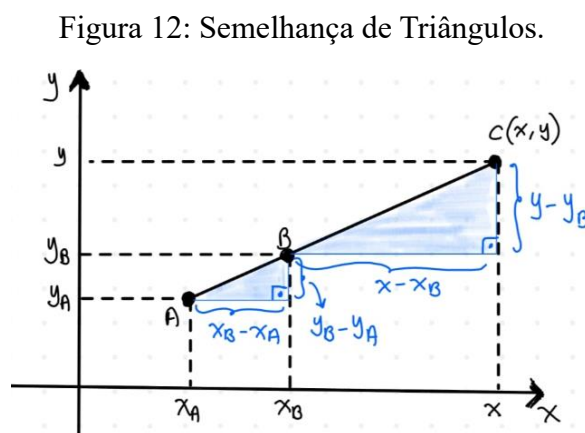
Neste caso, resulta da hipótese que:

$$(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A) \neq 0$$

E daí vem:

$$\frac{x_B - x_A}{x - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y - y_B}$$

Assim os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais (Figura 12), logo são semelhantes.



Fonte: Autor.

Portanto três pontos  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x, y)$  são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:  $(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$ . ■

Quando desenvolvendo a expressão da condição de alinhamento de três pontos  $(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$ , obtemos:

$$(x_B - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y_B - y_A)$$

$$y \cdot x_B - x_B \cdot y_B - y \cdot x_A + x_A \cdot y_B = x \cdot y_B - x \cdot y_A - x_B \cdot y_B + x_B \cdot y_B$$

$$y \cdot (x_B - x_A) + x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_B = x \cdot (y_B - y_A) + x_B \cdot y_A - x_B y_B$$

$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Agora perceba que quando calculamos o determinante da matriz abaixo, iremos obter a mesma expressão.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot y_A + y \cdot x_B + x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A - y \cdot x_A - x \cdot y_B = 0$$

$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_A y_B - x_B y_A = 0 \quad (1)$$

Sendo assim, uma maneira de conferirmos o alinhamento entre três pontos é calcular o determinante de uma matriz de ordem três, colocando na primeira coluna as coordenadas  $x$  dos pontos A, B e C, na segunda coluna as coordenadas  $y$  dos pontos A, B e C, e na terceira e última coluna completá-la com o número 1. Se o determinante for igual a zero, então os três pontos estão alinhados. Não há a necessidade de colocarmos sempre na ordem A, B, e C, mas sim, existe a necessidade de obedecer a ordem entre as coordenadas, de forma que, se as coordenadas  $x$  estão na sequência A, C, B, então as coordenadas  $y$  também terão que obedecer a ordem A, C, B. Isso acontece devido a uma das propriedades de determinante de matrizes, denominada “troca de filas paralelas”, segundo Iezzi (2013, vol.7, p. 97) “Seja  $M$  uma matriz de ordem  $n \geq 2$ . Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), obteremos uma nova matriz  $M'$  tal que  $\det M' = -\det M$ ”.

Como exemplo, vamos conferir se os pontos  $A(-2, 5)$ ,  $B(3, 0)$  e  $C(2, 1)$  estão alinhados. No intuito de mostrar que a ordem entre os pontos não irá dificultar nossa verificação quanto ao alinhamento dos três pontos, iremos resolver este exemplo de duas maneiras.

Seja a ordem dos pontos na matriz, A, C e B, segue que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 15 + 0 - 3 - 10 - 0 = 15 - 15 = 0$$

Seja agora, a ordem dos pontos na matriz, A, B e C, teremos que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 10 + 3 - 0 - 15 + 2 = -15 + 15 = 0$$

Dessa forma como o determinante da matriz é igual a zero, os pontos A, B e C estão alinhados.

Agora que conseguimos conferir o alinhamento entre três pontos, podemos enfim encontrarmos a equação geral da reta. Essa equação estabelece uma relação entre as coordenadas  $x$  e  $y$  de qualquer ponto pertencente a uma reta definida por dois pontos dados.

Utilizando os pontos A e B do exemplo citado acima, considere agora um ponto qualquer  $C(x, y)$ , dado que C pertence a reta determinada por A e B. Segue que:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$5x + 3y + 0 - 15 + 2y - 0 = 0$$

$$5x + 5y - 15 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

A expressão  $x + y - 3 = 0$  é o que chamamos de equação geral da reta, que foi determinada pelos pontos A e B. Denotamos a reta por  $r$ .

A equação geral da reta pode nos ajudar a encontrar infinitos pontos que pertencem a reta  $r$ .

Perceba que, se colocarmos:

$$x = 2 \rightarrow 2 + y - 3 = 0 \rightarrow y = 1, \text{ logo, } (2, 1) \in r$$

$$x = 3 \rightarrow 3 + y - 3 = 0 \rightarrow y = 0, \text{ logo, } (3, 0) \in r$$

$$x = 4 \rightarrow 4 + y - 3 = 0 \rightarrow y = -1, \text{ logo, } (4, -1) \in r$$

⋮

Podemos agora, formalizar um método para encontrar a “equação geral da reta”. Fazendo  $y_A - y_B = a$ ,  $x_B - x_A = b$ , e  $x_A y_B - x_B y_A = c$ , (veja a equação (1)) decorre que todo ponto  $P \in r$  deve verificar a equação  $ax + by + c = 0$ , chamada equação geral da reta.

Essas fórmulas decorrem da condição de alinhamento, veja na Figura 13, como se dá a relação entre a condição de alinhamento e a equação geral da reta.

Figura 13: Equação geral da reta (Expressão).

$$\begin{array}{c} x \underbrace{(y_A - y_B)} + y \underbrace{(x_B - x_A)} + \underbrace{x_A y_B - x_B y_A} = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x( a ) + y( b ) + ( c ) = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{array}$$

Fonte: Autor.

Chamamos  $a$  de coeficiente de  $x$ ,  $b$  de coeficiente de  $y$ , e  $c$  é o termo independente da expressão.

Como exemplo, vamos encontrar a equação geral da reta que passa pelos pontos  $A(-2, 5)$  e  $B(3, 0)$ . Embora tínhamos determinado essa equação anteriormente, nosso objetivo

agora é deduzir a equação através das fórmulas, tomando  $a = y_A - y_B$ ,  $b = x_B - x_A$ , e  $c = x_A y_B - x_B y_A$ .

Segue que:

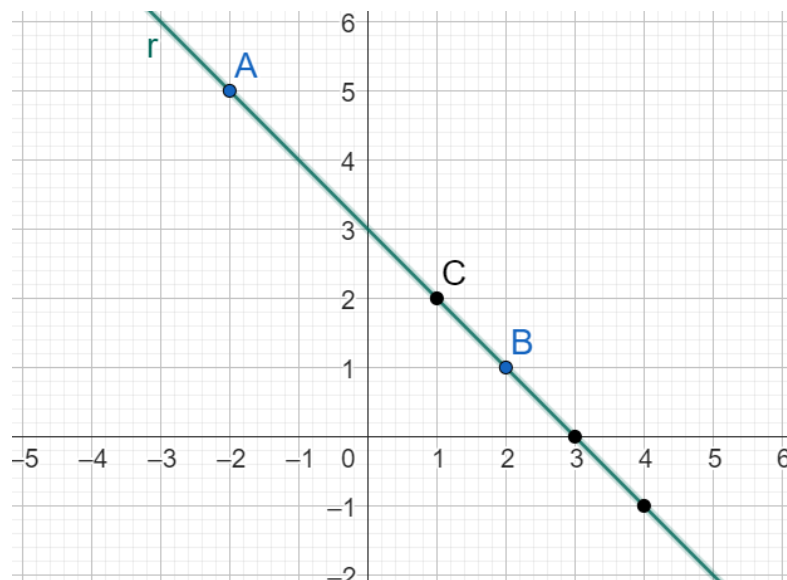
$$\begin{aligned} a &= 5 - 0 = 5 \\ b &= 3 - (-2) = 5 \\ c &= (-2) \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15 \\ 5x + 5y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Simplificando a expressão por 5, obtemos:  $x + y - 3 = 0$ .

Podemos observar que chegamos à mesma equação geral da reta, obtida anteriormente por meio da condição de alinhamento. Portanto, para determinar a equação geral da reta a partir de dois pontos, basta aplicar as fórmulas correspondentes aos coeficientes  $a$ ,  $b$ , e  $c$ .

Na Figura 14, é possível visualizar de forma integrada todas as construções desenvolvidas ao longo deste tópico. Essa representação gráfica tem como objetivo oferecer uma visão mais clara e concreta dos conceitos abordados, facilitando a compreensão do conteúdo teórico apresentado. Por meio da figura abaixo, o leitor pode retomar cada etapa discutida, observando como os elementos se relacionam e contribuem para a construção do raciocínio proposto.

Figura 14: Equação Geral da Reta.



Fonte: Autor.

### 2.3.2 Equação Segmentária da Reta.

A equação segmentária da reta é expressa na forma  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ , e possui grande importância no estudo da geometria analítica, especialmente por apresentar os pontos em que a reta intersecta os eixos  $x$  e  $y$ . Ao conhecer esses pontos de intersecção com os eixos é possível traçar a reta no plano cartesiano com facilidade e precisão, sem a necessidade de encontrar outros pontos.

Considere uma reta  $r$  que intercepta os eixos nos pontos  $Q(0, q)$  e  $P(p, 0)$ , distintos.

Partindo da equação geral da reta, temos que:

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = \frac{-c}{-c}$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

Agora, partindo da equação (1) e definindo a reta que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ , temos:

$$x(y_Q - y_P) + y(x_P - x_Q) + x_Q y_P - x_P y_Q = 0$$

$$x(q - 0) + y(p - 0) + 0 \cdot 0 - p \cdot q = 0$$

$$qx + py = pq$$

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Considerando uma reta  $r$  de equação  $ax + by + c = 0$  com  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$  para que a reta corte os eixos em pontos distintos  $P(p, 0)$  e  $Q(0, q)$ . Determinemos  $p$  e  $q$ , de forma que  $p$  é o lugar onde a reta toca o eixo  $x$ , e  $q$  o lugar onde a reta toca o eixo  $y$ , “ $q$  é definido como o coeficiente linear da reta”.

$$p = -\frac{c}{a}, \quad q = -\frac{c}{b}$$

Para este caso, com  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , veremos alguns exemplos.

1º) Como encontramos a equação segmentária, conhecendo sua equação geral.

Seja  $r: x - 4y + 2 = 0$  (equação geral da reta).

Podemos encontrar sua forma segmentária, segue que:

$$p = -\frac{2}{1} = -2$$

$$q = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ (coeficiente linear)}$$

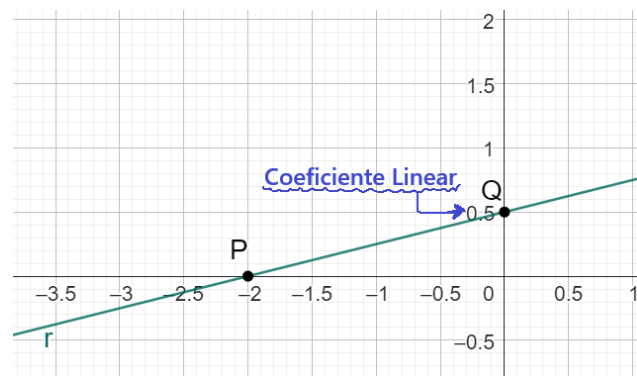
A equação segmentária da reta  $r$  é dada por:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$$

Essa equação indica que a reta intercepta o eixo  $x$  no ponto  $P(-2, 0)$  e o eixo  $y$  no ponto  $Q(0, \frac{1}{2})$ . Esse tipo de equação é bastante útil por permitir uma leitura rápida dos pontos de intersecção, tornando a construção gráfica e leitura da equação exibida mais intuitiva e direta.

Na Figura 15, podemos observar a representação da reta  $r$ .

Figura 15: Reta  $r$ .



Fonte: Autor.

2º) Vamos agora analisar outro exemplo, que mostra como determinar os pontos de intersecção de uma reta qualquer  $s$ , a partir do conhecimento de dois pontos pertencentes a essa reta.

Sejam os pontos  $A(-3, 5)$  e  $B(3, -1)$  tais que,  $A \in s$  e  $B \in s$ , queremos encontrar os pontos de intersecção da reta  $s$  com os eixos coordenados.

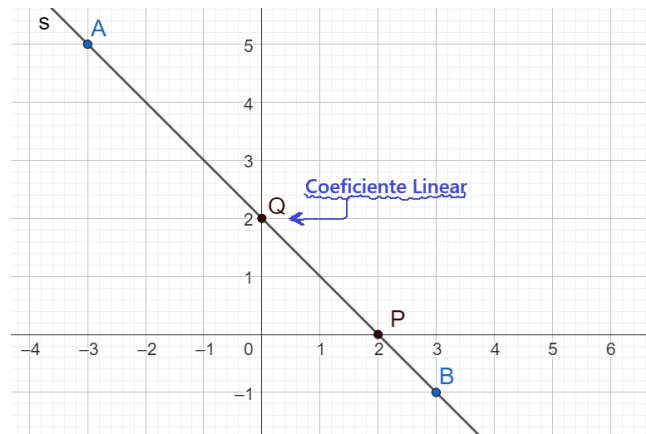
Segue que:

$$p = -\frac{c}{a} = -\frac{x_A y_B - x_B y_A}{y_A - y_B} = -\frac{(-3) \cdot (-1) - 3 \cdot 5}{5 - (-1)} = -\frac{3 - 15}{6} = -\frac{-12}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$q = -\frac{c}{b} = -\frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_B - x_A} = -\frac{(-3) \cdot (-1) - 3 \cdot 5}{3 - (-3)} = -\frac{3 - 15}{6} = -\frac{-12}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Na Figura 16, podemos observar a representação da construção obtido no exemplo diretamente acima.

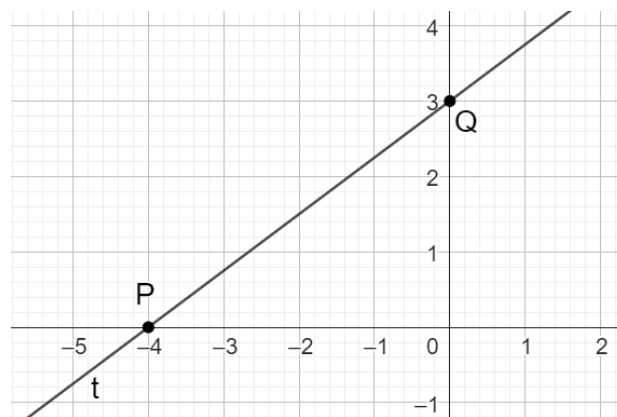
Figura 16: Reta s.



Fonte: Autor.

3º) Neste exemplo, veremos como determinar a equação geral da reta a partir de sua representação gráfica, considerando que são conhecidos os pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados. Para tanto, vejamos a Figura 17.

Figura 17: Reta t.



Fonte: Autor.

De fato, a equação segmentária da reta  $t$  é  $t: \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ .

Somando as frações do primeiro membro da expressão, temos que:

$$\frac{3x - 4y}{-12} = 1$$

$$3x - 4y = -12$$

$$3x - 4y + 12 = 0$$

Desta forma, encontramos a equação  $3x - 4y + 12 = 0$  (equação geral da reta).

Vejam agora o caso onde  $a = 0$ .

Se o coeficiente  $a$  na equação geral da reta for igual a zero, isso significa que a variável  $x$  não aparece na equação, assim, a expressão é da forma  $by + c = 0$ , o que define uma reta horizontal. O que acontece na equação segmentária é que o coeficiente  $p$  é indeterminado quando  $c = 0$  (existindo infinitos valores para  $p$ ) ou não existe caso  $c \neq 0$ . Perceba que:

$$\text{Caso } c = 0 \text{ e } b \neq 0 \rightarrow p = -\frac{c}{a} = -\frac{0}{0} \text{ (Indeterminado)}$$

$$by + c = 0$$

$$by = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{Caso } c \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \rightarrow p = -\frac{c}{a} = -\frac{c}{0} \text{ (Não existe solução)}$$

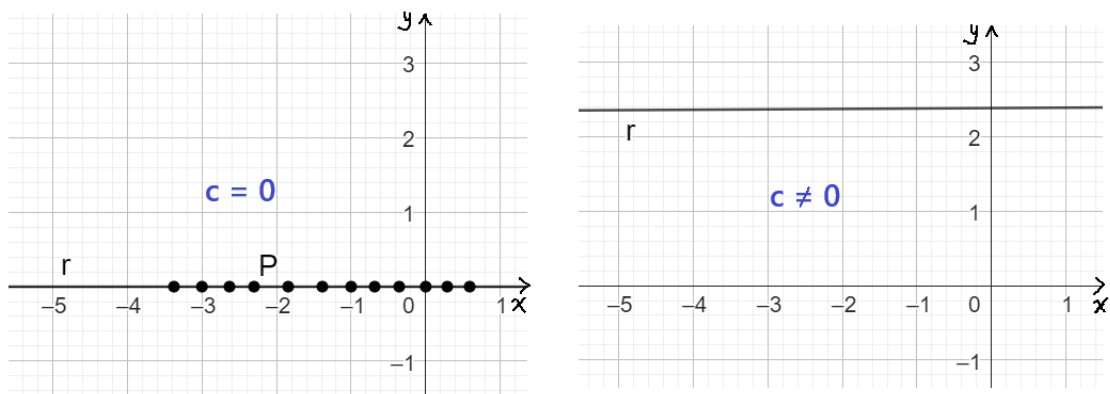
$$by + c = 0$$

$$by = -c$$

$$y = -\frac{c}{b}$$

Veja na Figura 18 a representação de uma reta onde  $a = 0$ .

Figura 18: Coeficiente  $a = 0$ .



Fonte: Autor.

Vejam agora o caso onde  $b = 0$ .

Se o coeficiente  $b$ , na equação geral da reta for igual a zero, isso significa que a variável  $y$  não aparece na equação, assim, a expressão é da forma  $ax + c = 0$ , o que define uma reta vertical. O que acontece na equação segmentária é que o coeficiente linear  $q$  é indeterminado quando  $c = 0$  (existindo infinitos valores para  $q$ ) ou não existe caso  $c \neq 0$ . Perceba que:

Caso  $c = 0 \rightarrow q = -\frac{c}{b} = -\frac{0}{0}$  (Indeterminado)

$$ax + c = 0$$

$$ax = 0$$

$$x = 0$$

Caso  $c \neq 0 \rightarrow q = -\frac{c}{b} = -\frac{c}{0}$  (Não existe solução)

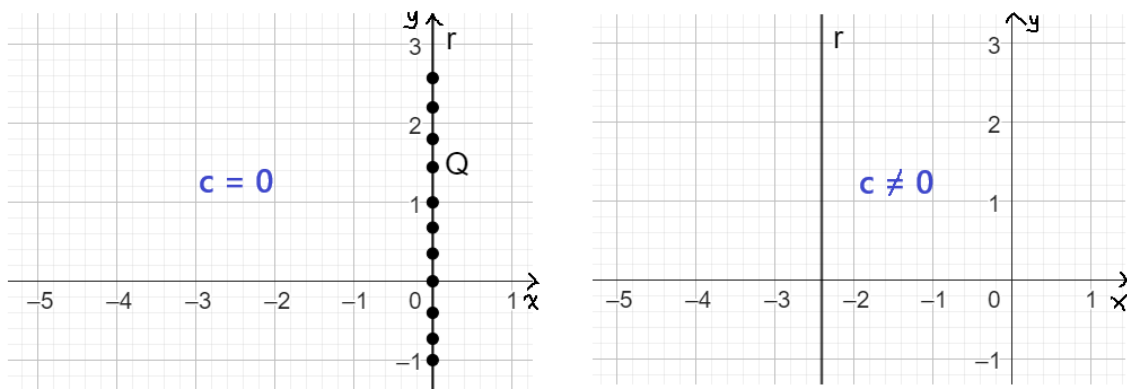
$$ax + c = 0$$

$$ax = -c$$

$$x = -\frac{c}{a}$$

Veja na Figura 19 a representação de uma reta onde  $b = 0$ .

Figura 19: Coeficiente  $b = 0$ .



Fonte: Autor.

### 2.3.3 Equação Reduzida da Reta.

A expressão matemática que apresenta a forma reduzida da reta, é  $y = mx + q$ , onde  $m$  é denominado coeficiente angular, e  $q$  o mesmo coeficiente linear estudado no tópico anterior.

Dada a equação geral da reta  $r$ ,  $ax + by + c = 0$ , se  $b \neq 0$ , temos:

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$y = mx + q$$

Desta forma, estamos formalizando que  $m = -\frac{a}{b}$  e  $q = -\frac{c}{b}$ . Temos por definição que  $m$  é o coeficiente angular da reta.

Essa forma é especialmente útil porque permite identificar rapidamente o comportamento da reta, se ela é crescente, decrescente ou constante, apenas observando o sinal do coeficiente angular  $m$ . Além disso, a forma reduzida facilita a interpretação entre as posições relativas entre retas no plano.

Vejam agora dois exemplos onde estaremos encontrando a forma reduzida da reta, e classificando-as como crescente, decrescente ou constante.

1º) Inicialmente, encontraremos a equação reduzida a partir da equação geral da reta.

Seja  $r$ :  $2x - 4y + 12 = 0$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{c}{b} = -\frac{12}{-4} = 3$$

Logo, a equação reduzida da reta  $r$  será:  $y = \frac{1}{2}x + 3$ .

Podemos também encontrar a equação reduzida de  $r$ , apenas isolando o valor de  $y$  da equação geral da reta. Assim, temos que:

$$2x - 4y + 12 = 0$$

$$2x + 12 = 4y$$

$$\frac{2x + 12}{4} = y$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = y$$

Para representarmos a reta  $r$  no plano cartesiano, basta encontrarmos dois pontos que pertençam a  $r$ , atribuindo valores quaisquer para uma variável e assim, encontrando o valor correspondente a outra variável.

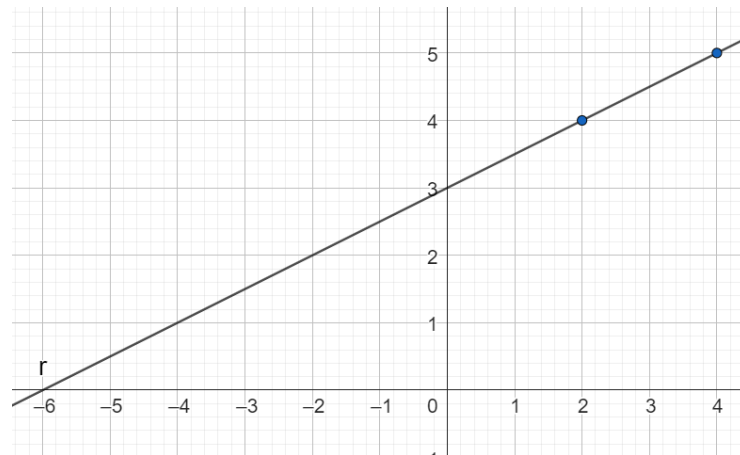
Escolhido os valores 2 e 4 para a variável  $x$ , temos que:

$$y = \frac{1}{2}(2) + 3 = 1 + 3 = 4, \text{ isso significa que o ponto } (2, 4) \in r$$

$$y = \frac{1}{2}(4) + 3 = 2 + 3 = 5, \text{ isso significa que o ponto } (4, 5) \in r$$

O mesmo poderia ser feito em qualquer forma escrita das equações da reta. Veja na Figura 20 a representação da reta  $r$ , e perceba que a mesma é classificada como crescente, pois quanto maior a coordenada  $x$ , maior também será a coordenada  $y$ , isso ocorre quando o coeficiente angular é “positivo”.

Figura 20: Reta Crescente.



Fonte: Autor.

2º) Podemos encontrar a equação reduzida da reta a partir de dois pontos quaisquer.

Seja  $A(-4, 3)$  e  $B(2, -1)$  tais que  $A \in s$  e  $B \in s$ . Qual a equação reduzida da reta  $s$ ?

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = -\frac{3 - (-1)}{2 - (-4)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

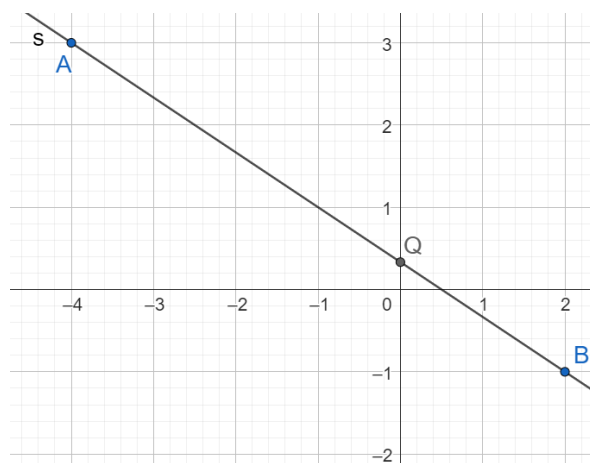
$$q = -\frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_B - x_A} = -\frac{(-4) \cdot (-1) - 2 \cdot 3}{2 - (-4)} = -\frac{4 - 6}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Lembrando q

$$\text{Portanto } s: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Na Figura 21, podemos observar a representação da reta  $s$ , esta é classificada como decrescente, pois quanto maior a coordenada  $x$ , menor será a coordenada  $y$ , isso ocorre quando o coeficiente angular é “negativo”.

Figura 21: Reta Decrescente.



Fonte: Autor.

Uma reta  $t$  qualquer é classificada como constante quando a reta é horizontal. No tópico anterior, vimos que isso ocorre quando o coeficiente  $a$  da equação geral da reta é nulo. Assim, segue que:

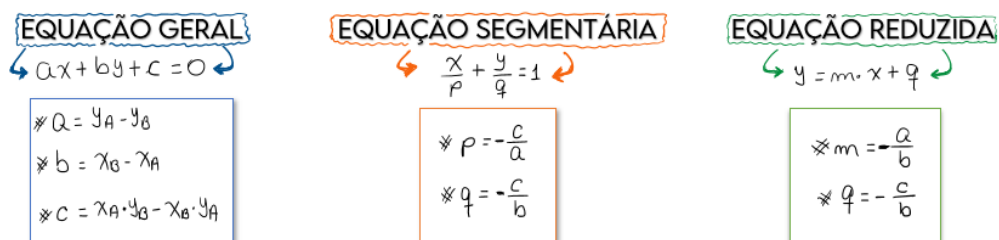
$$by + c = 0$$

$$y = -\frac{c}{b}$$

Relacionado a expressão acima com a forma reduzida da reta, percebemos que o coeficiente angular da equação reduzida é nulo. Desta forma, quando  $m = 0$ , temos uma reta classificada como constante.

Antes de avançarmos para o próximo tópico, é importante fazermos uma breve pausa para analisarmos as diferentes formas de representar uma reta no plano cartesiano. Nesse contexto, vamos expressar uma reta  $r$  na forma geral, segmentária e reduzida. Nosso objetivo é evidenciar que uma única reta pode ser expressa de maneiras diferentes, cada uma com sua utilidade em contextos variados, como vimos anteriormente. Na Figura 22, é apresentado um mapa mental que reúne todas as fórmulas abordadas nos tópicos anteriores. Com esse material em mãos, será possível utilizar essas fórmulas de maneira organizada para encontrar as expressões desejadas com mais facilidade e precisão.

Figura 22: Mapa Mental (Equações da reta).



Fonte: Autor.

Assim, seja  $r$  uma reta qualquer,  $A(-2, -4)$ , e  $B(1, 3)$  tal que  $A \in r$  e  $B \in r$ .

Temos que:

$$\begin{cases} a = -4 - 3 = -7 \\ b = 1 - (-2) = 3 \\ c = (-2) \cdot 3 - 1 \cdot (-4) = -6 + 4 = -2 \end{cases}$$

Portanto a equação geral da reta  $r$  é,  $r: -7x + 3y - 2 = 0$

Segue que:

$$\begin{cases} p = -\frac{-2}{-7} = -\frac{2}{7} \\ q = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, a equação segmentária da reta  $r$  é,  $r: \frac{x}{-\frac{2}{7}} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1$

Agora, para encontrar a equação reduzida, temos que:

$$\begin{cases} m = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, a equação reduzida da reta  $r$  é,  $r: y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ .

É importante perceber que a partir do momento que reconhecemos como são escritas as formas segmentária e reduzida, podemos encontrar suas equações a partir da equação geral. Neste contexto, ao modelarmos a equação geral de forma a obter uma expressão igual a número um, teremos a equação segmentária, e se modelarmos a equação geral de forma a isolar a variável  $y$ , teremos a equação reduzida. Veja abaixo como as seguintes modelagens na expressão da equação geral da reta  $r$ ,  $r: -7x + 3y - 2 = 0$ .

$$-7x + 3y - 2 = 0$$

$$-7x + 3y = 2$$

$$-\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{2}{2}$$

$$\frac{x}{-\frac{2}{7}} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1$$

Equação Segmentária da reta

$$-7x + 3y - 2 = 0$$

$$3y = 7x + 2$$

$$y = \frac{7x + 2}{3}$$

$$y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$

Equação Reduzida da reta

### 2.3.4 Coeficiente angular

Como vimos no tópico anterior, o coeficiente angular é um número que indica a inclinação de uma reta no plano cartesiano. Já conseguimos classificar a reta como crescente, decrescente ou constante quando estudamos a equação reduzida da reta. Nosso objetivo agora é compreender como encontrar o ângulo de inclinação da reta.

Partindo do fato de que  $m = -\frac{a}{b}$ , temos que:

$$m = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Em outras palavras, o coeficiente angular expressa a variação das coordenadas  $y$  em relação à variação das coordenadas  $x$ . Uma observação importante, é a forma fundamental da reta, que é uma expressão que nos ajuda a calcular o coeficiente angular a partir de dois pontos quaisquer. Definimos a equação fundamental da reta como  $(x_B - x_A) \cdot m = y_B - y_A$ .

Suponhamos que a reta  $r$ , contenha os pontos  $A(6, 4)$  e  $B(3, 1)$ .

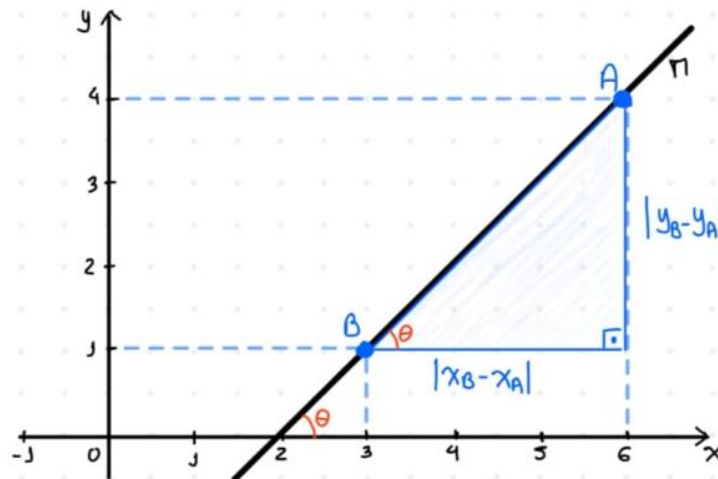
Segue que:

$$m = \frac{1 - 4}{3 - 6} = \frac{-3}{-3} = 1$$

A partir da forma fundamental da reta podemos encontrar que o coeficiente angular da reta  $r$  é igual a 1.

Observe na Figura 23, que a variação das coordenadas  $y$  e a variação das coordenadas  $x$  de dos pontos  $A$  e  $B$  podem ser representados como catetos de um triângulo retângulo, onde a reta  $r$  é a reta suporte da hipotenusa deste triângulo. Como o cateto cujo comprimento é  $|x_B - x_A|$  é paralelo ao eixo  $x$ , o ângulo de inclinação  $\theta$  corresponde ao ângulo formado pela hipotenusa e pelo cateto de comprimento igual a  $|x_B - x_A|$ .

Figura 23: Inclinação  $\theta$  da reta.



Fonte: Autor.

Como é conhecido uma maneira para encontrar a medida do ângulo  $\theta$  é por meio das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dessa forma, na reta  $r$  da Figura 23 acima,  $m = \operatorname{tg}\theta = 1$ , sendo assim, a inclinação  $\theta$  da reta é igual a  $45^\circ$ .

Ao fixarmos em uma reta  $s$  dois pontos distintos A e B, podemos obter as seguintes situações,

1º) Se  $y_A = y_B$ ,  $s$  é paralela ao eixo  $x$ ; nesse caso, adotaremos como sentido positivo da reta  $s$  o sentido positivo do eixo  $x$ .

2º) Se  $y_A \neq y_B$ , então  $y_A > y_B$  ou  $y_A < y_B$ ; nesse caso, adotaremos como sentido positivo da reta  $s$  aquele em que se parte do ponto de menor ordenada (A ou B) e se chega ao ponto de maior ordenada (B ou A, respectivamente).

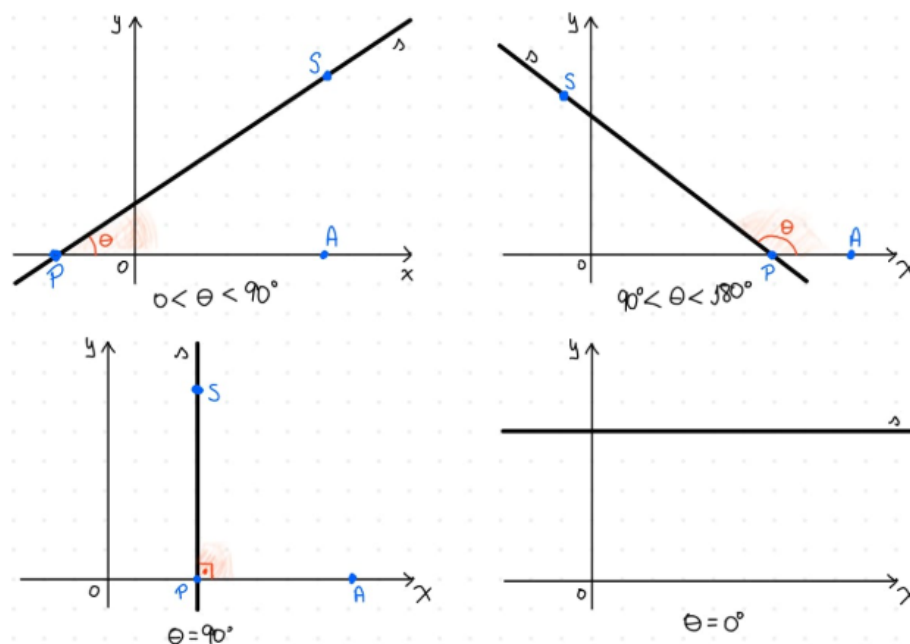
Dessa forma, o ângulo que uma reta  $s$  forma com o eixo  $x$  ( $\widehat{sx}$ ), pode ser definido como:

Se  $s$  e  $x$  são retas paralelas, então a inclinação  $\theta$  é nula.

Se  $s$  e  $x$  não são retas paralelas, logo elas se intersectam em  $P(p, 0)$ , assim, seja  $A(x_A, 0)$  tal que  $x_A > p$  e  $S \in s$ ,  $\widehat{r_x}$  é o menor ângulo formado entre as semirretas  $\overrightarrow{PA}$  e  $\overrightarrow{PS}$ .

Observe na Figura 24 as situações descritas anteriormente.

Figura 24: Inclinação da Reta.



Fonte: Autor.

Desta forma, para encontrarmos a inclinação da reta, se é necessário encontrarmos o coeficiente angular, pois  $m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ . É possível calcular o coeficiente angular de uma reta quando dela se conhece dois pontos distintos como no exemplo representado na Figura 22, quando se conhece a equação geral da reta, e quando se conhece direção (por exemplo, sabe-se que a reta é paralela a uma reta dada).

Como exemplo, podemos determinar o ângulo de inclinação das retas  $r$  e  $s$ , definidas como,  $r: x - \sqrt{3}y + 3 = 0$  e  $s: x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ .

Para encontrarmos o coeficiente angular da reta, a partir da equação geral, podemos partir das fórmulas da Figura 22, ou modelar a equação de geral de forma a isolar a variável  $y$ . Assim, temos que:

$$r: x - \sqrt{3}y + 3 = 0$$

$$x + 3 = \sqrt{3}y$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 = y$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Portando, } \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$s: \sqrt{3}x + y - 1 = 0$$

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Portando, } \operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = 120^\circ$$

### 2.3.5 Posições Relativas entre Retas Coplanares.

Sabemos que duas retas  $r$  e  $s$  no plano, podem ser:

- Coincidentes: quando ocupam a mesma posição no plano cartesiano. Isso ocorre porque as duas retas possuem o mesmo conjunto de pontos, ou seja, são a mesma reta.
- Paralelas Distintas: quando possuírem a mesma inclinação e não têm pontos em comum. Uma característica importante dessa relação é que elas mantêm sempre a mesma distância entre si.
- Concorrentes: são aquelas retas que apresentam apenas um ponto em comum.
- Perpendiculares: essa relação é um caso particular de retas concorrentes, ou seja, todas retas perpendiculares são também retas concorrentes, retas concorrentes que formam um ângulo de  $90^\circ$ .

Veremos agora como relacionar duas retas no plano a partir de suas equações reduzida, analisando seus respectivos coeficientes angular e linear. Assim, sejam duas retas  $r$  e  $s$  cujas equações são:

$$r: y = m_r x + q_r$$

$$s: y = m_s x + q_s$$

Elas podem ocupar apenas três posições relativas no plano cartesiano. Essas posições são definidas com base no número de pontos em comuns às retas, isto é:

$r$  e  $s$  concorrentes  $\Leftrightarrow$  um único ponto comum  
 $r$  e  $s$  paralelas distintas  $\Leftrightarrow$  nenhum ponto comum  
 $r$  e  $s$  coincidentes  $\Leftrightarrow$  infinitos pontos comuns

Com o símbolo  $r \times s$  indicaremos que  $r$  e  $s$  são concorrentes; com  $r \cap s = \emptyset$  indicaremos que  $r$  e  $s$  são paralelas distintas; com  $r = s$  indicaremos que  $r$  e  $s$  são coincidentes (ou paralelas coincidentes).

Notemos que se as retas  $r$  e  $s$  forem paralelas, então,  $r$  e  $s$  podem ser paralelas distintas, ou coincidentes. As retas paralelas possuem a mesma direção, com isso, seus coeficientes angulares sejam iguais, ou seja,  $m_r = m_s$ , caso seus coeficientes lineares sejam iguais  $q_r = q_s$ , são paralelas coincidentes, caso  $q_r \neq q_s$  são paralelas distintas. Já quando os coeficientes angulares  $m_r \neq m_s$ ,  $r$  e  $s$  irão possuir inclinações diferentes, então  $r$  e  $s$  são concorrentes, podendo ser além de concorrentes também perpendiculares.

Iezzi (2013) nos apresenta o seguinte teorema:

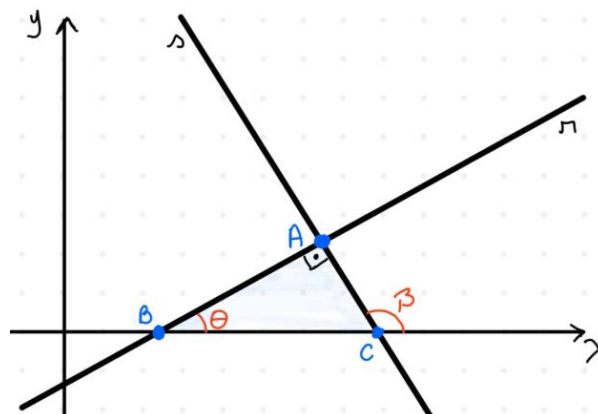
“Duas retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é  $-1$ .”

*Demonstração:*

$$(\Rightarrow) r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas perpendiculares, cujas as inclinações sejam respectivamente,  $\theta$  e  $\beta$ . Sejam também os pontos os pontos  $A = r \cap s$ ,  $B = r \cap O_x$  e  $C = s \cap O_x$ . Observe a Figura 25 abaixo onde estão representadas as construções realizadas.

Figura 25:  $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$ .



Fonte: Autor.

Seque que,  $\beta = 90^\circ + \theta$ , isso pelo teorema do ângulo externo do triângulo.

Assim, temos que:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\theta + 90^\circ)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}(-\theta)$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\beta = -1$$

$$m_r \cdot m_s = -1$$

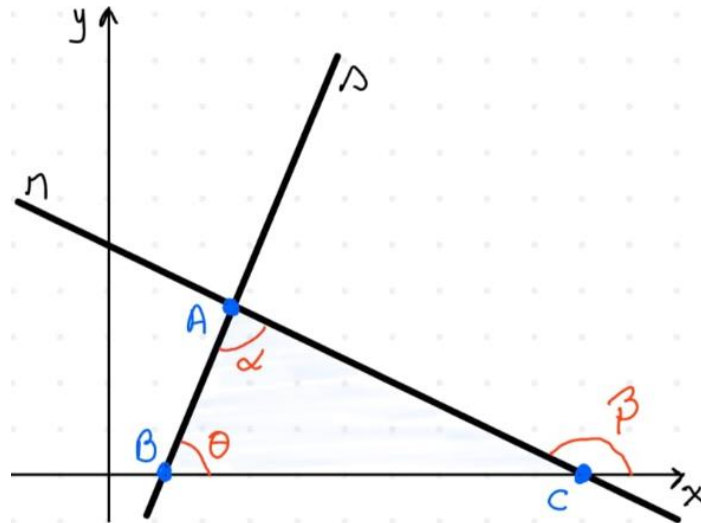
( $\Leftrightarrow$ )  $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$ .

i. Temos que  $m_r \cdot m_s = -1$ , ou seja,  $m_r = -\frac{1}{m_s}$ .

Assim,  $m_r \neq m_s$ , portanto as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes. Seja  $\alpha$  a medida do ângulo formado entre as retas  $r$  e  $s$ ,  $\theta$  a inclinação da reta  $s$  e  $\beta$  a inclinação da reta  $r$ . Sejam também os pontos os pontos  $A = r \cap s$ ,  $B = s \cap O_x$  e  $C = r \cap O_x$ .

Na Figura 26, podemos observar as construções citadas no parágrafo anterior.

Figura 26:  $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$ .



Fonte: Autor.

Dessa forma  $\beta = \alpha + \theta$ , isso pelo teorema do ângulo externo.

ii. Como  $m_r = -\frac{1}{m_s}$

Segue que:

$$tg\beta = -\frac{1}{tg\theta}$$

$$tg\beta = -cotg\theta$$

$$tg\beta = tg(90^\circ + \theta)$$

$$\beta = 90^\circ + \theta$$

Comparando, (i) e (ii), temos que:

$$90^\circ + \theta = \alpha + \theta$$

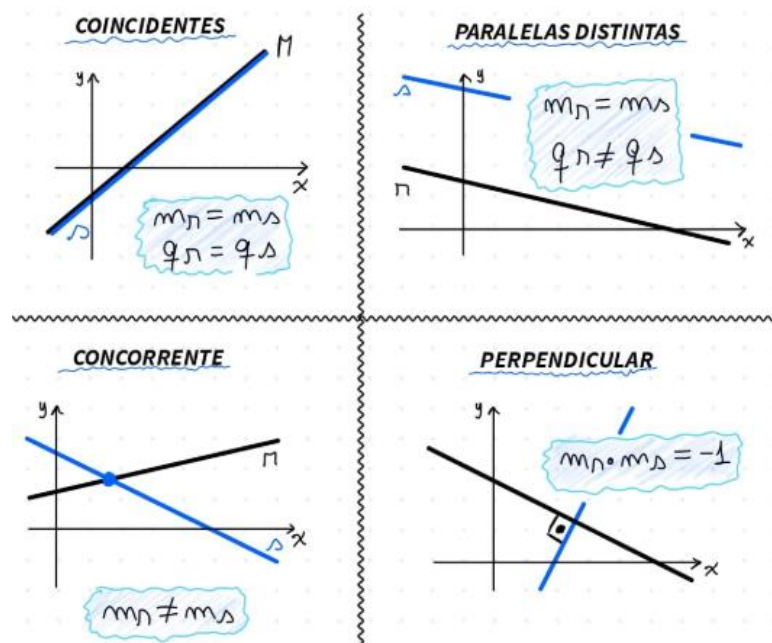
$$90^\circ = \alpha$$

Dessa forma, como  $\alpha = 90^\circ$ , as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares.

Portanto, duas retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é  $-1$ . ■

Na Figura 27, é possível observar, de maneira clara e organizada, um mapa mental que ilustra as relações possíveis entre duas retas no plano cartesiano. Esse mapa baseia-se na análise dos coeficientes angular e linear presente nas equações reduzida das retas  $r$  e  $s$ .

Figura 27: Relações entre retas coplanares.



Fonte: Autor.

Como exemplo, podemos descobrir qual a relação entre as retas  $r: 3x + 2y - 1 = 0$  e  $s: 4x - 6y + 3 = 0$ . Para isso, basta encontrarmos as equações reduzidas das retas  $r$  e  $s$  e em seguida analisar seus coeficientes, de acordo com a Figura 26.

$$r: 3x + 2y - 1 = 0$$

$$2y = -3x + 1$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$m_r = -\frac{3}{2} \text{ e } q_r = \frac{1}{2}$$

$$s: 4x - 6y + 3 = 0$$

$$4x + 3 = 6y$$

$$\frac{4}{6}x + \frac{3}{6} = y$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$m_s = \frac{2}{3} \text{ e } q_s = \frac{1}{2}$$

As retas  $r$  e  $s$  são além de concorrentes, perpendiculares, isso porque,  $m_r \neq m_s$ , de forma que  $m_r \cdot m_s = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ .

### 3. PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS

Esta proposta didática tem natureza qualitativa, visto que a intenção das atividades propostas é extrair o conhecimento dos conceitos e propriedades das retas em suas diferentes formas a partir do *software* Geogebra. Levando em consideração todo levantamento teórico de pesquisas relacionadas ao uso deste *software* em sala de aula, acredita-se que sua aplicação no ensino da geometria analítica facilita a compreensão do mesmo, visto que a representação gráfica das equações das retas tornará o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico, proporcionando maior clareza ao assunto trabalhado algebricamente.

O ensino da matemática está baseado na centralidade do conhecimento do professor, utilizando os livros didáticos como principal recurso didático. Embora os autores desses materiais busquem apresentar exercícios que relacionem o conteúdo com a vivência dos estudantes, frequentemente os contextos propostos estão distantes da realidade dos alunos.

Os métodos de ensino da matemática são, em sua maioria, baseados na prática constante de resolução de exercícios. Essa abordagem, acredita na repetição de procedimentos como estratégia principal para promover a compreensão dos conteúdos. A ideia é que ao repetir o mesmo tipo de resolução várias vezes, o estudante entenda o porque está fazendo daquela forma, e assim, compreenda o objeto de estudo em questão.

O método de ensino predominante é o expositivo, como destaca Libâneo (2012), ao atribuir ao professor um papel central no processo: é ele quem determina o conteúdo apresenta os procedimentos para a resolução e espera que o aluno os reproduza de forma mecânica ao realizar as tarefas.

No entanto, mesmo que eficiente em alguns aspectos, este método se mostra limitado, uma vez que a execução mecânica de fórmulas tende a reduzir o pensamento crítico, e a criatividade para formulação e criar estratégias para resolução de problemas. Este método pode levar a um aprendizado superficial, em que o conhecimento é memorizado, mas não compreendido de fato.

Segundo Skovsmose (2014) métodos de ensino que envolvem a investigação estão diretamente ligados a práticas matemática que vão além da repetição de procedimentos. Para o autor a abordagem investigativa no ensino da matemática está ligada aos princípios da matemática crítica. Neste contexto, a matemática deixa de ser apenas um conjunto de técnicas e fórmulas a serem decoradas, e valoriza o desenvolvimento da autonomia do estudante. Assim, a matemática torna-se um caminho para promover o engajamento dos alunos com o conteúdo de forma mais profunda e significativa.

Consideramos o Geogebra como alternativa para ensinar geometria analítica com uma abordagem investigativa, inclusive sendo uma ferramenta auxiliar para ser utilizada para ensinar outros conteúdos que se referem a matemática. As atividades da presente proposta didática foram planejadas de modo a possibilitar que os alunos realizem manipulações das retas no Geogebra, para que então possam identificar suas propriedades. Com isso, espera-se que os alunos sejam capazes de compreender as formas de representações das equações das retas no plano cartesiano, como também suas posições relativas. Mais do que apenas reconhecer essas representações, é importante que os estudantes possam com facilidade transitar de uma expressão para outra, entendendo suas características, aplicações e a utilidade em diferentes contextos da matemática.

Ao longo da minha trajetória profissional, encontrei diversas situações em que o conhecimento parecia ser algo distante e difícil de alcançar para os estudantes. No entanto, a utilização do software geogebra trouxe uma nova dinâmica para a sala de aula, modificando a forma como os alunos pensam, entendem e compreendem a matemática. A escolha do tema "retas" se deu pelas experiências positiva que tive ao trabalhar essa proposta didática em sala de aula, que tem se mostrado eficaz e tem resultados comprovados no engajamento e na compreensão.

As atividades propostas neste trabalho, são construções que venho trabalhando ao longo dos anos com turmas do 3º ano do Ensino Médio. É notório o quanto as TD transformam a forma como o conhecimento é transmitido e recebido pelo estudante, o aluno tem mais autonomia e personaliza o seu ritmo e estilo de aprendizado.

## 4. DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A proposta didática a seguir está organizada em cinco atividades, através de construções com o *software* Geogebra. O objetivo principal destas atividades que compõem esta proposta didática é apresentar o objeto de estudo relacionado a “equações da reta” de uma forma prática, onde seja possível a interação do estudante com os coeficientes das diferentes formas de expressar uma reta.

Inicialmente, partindo da construção da equação geral da reta a partir de dois pontos, e posteriormente, trilharemos um caminho dinâmico e investigativo, analisando assim conteúdos como a forma segmentária (atividade 2), a forma reduzida (atividade 3), a inclinação da reta (atividade 4) e também as relações entre as retas no plano cartesiano (atividade 5).

Em cada atividade será apresentado o passo a passo da construção, juntamente o objetivo específico. São cinco atividades, organizadas de modo com que o leitor possa experimentar um método diferente para aprender e ensinar geometria analítica, no tocante, equações da reta.

### 4.1 Atividade 1: Equação Geral da Reta

#### Planejamento da Atividade:

- Objetivo da Atividade:

Espera-se que o estudante seja capaz de interpretar quando a reta é crescente, decrescente, paralela ao eixo  $x$  e paralela ao eixo  $y$ , de acordo com os as coordenadas dos pontos que determinam a reta, relacionando essas informações com os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da forma geral da reta. Com a atividade já construída, o estudante poderá mover os controles deslizantes  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $X_q$  e  $Y_q$ , e com isso, perceberá que a reta irá se mover. Espera-se que a partir desta interação os conhecimentos matemáticos apresentado na Seção 2.3.1 sejam compreendidos de forma dinâmica e eficaz.

- Conteúdos abordados:

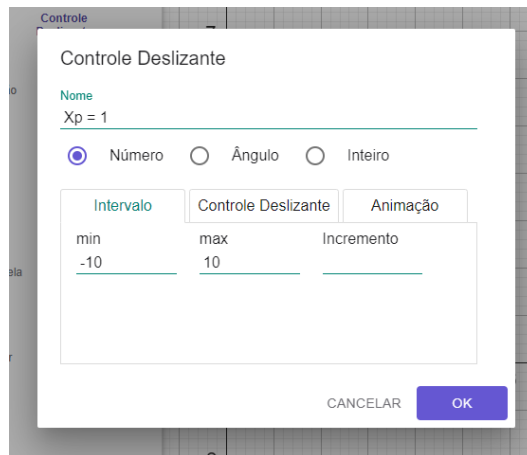
- Condição de alinhamento de três pontos.

- Equação Geral da Reta.

#### Desenvolvimento da Atividade.

1- No Geogebra, clique na ferramenta “Controle Deslizante” e construa quatro controles, renomeie de  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $X_q$  e  $Y_q$ , Coloque todos no intervalo de -10 a 10, marcando a opção número. Estes serão as coordenadas dos pontos P e Q.

Figura 28: Criando “controle deslizante”.

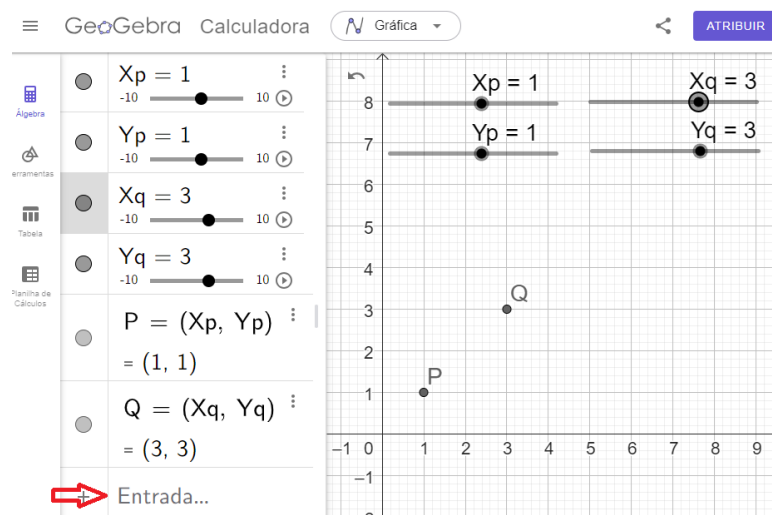


Fonte: Autor.

2- Agora, no menu de itens, crie os pontos P e Q, escrevendo no campo de entrada,  $P=(X_p, Y_p)$  aperte a tecla enter do teclado. E em seguida, digite  $Q=(X_q, Y_q)$  e pressione Enter novamente.

Dessa forma, dois pontos P e Q em função das coordenadas  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $X_q$  e  $Y_q$ . Neste momento você pode alterar os valores dos controles deslizante, e percebe que os pontos P e Q se movem na janela de visualização do Geogebra.

Figura 29: Criando pontos pelo campo de entrada.

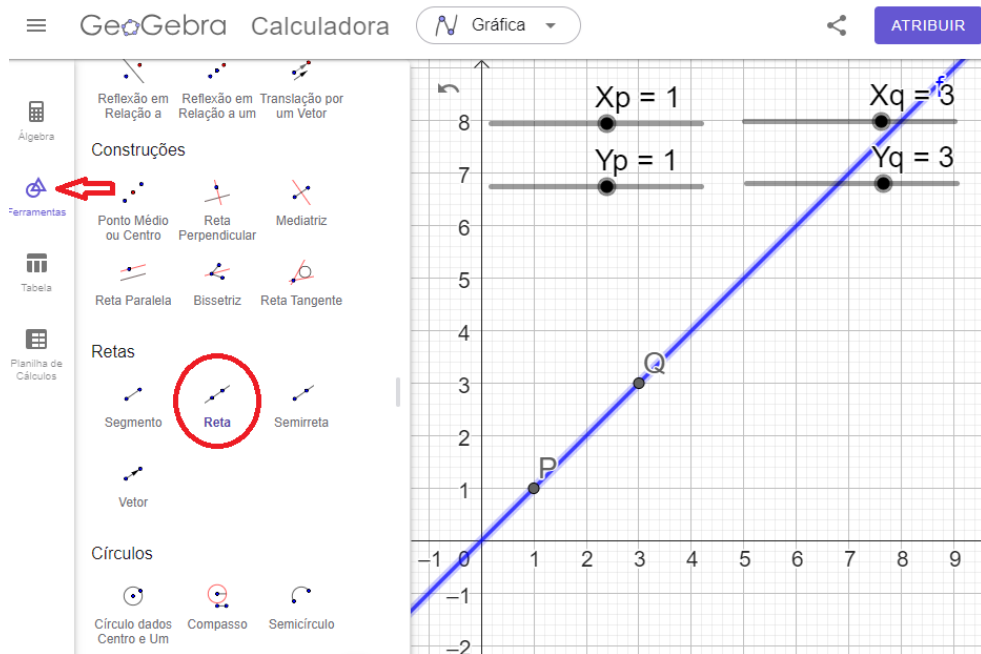


Fonte: Autor.

3- Agora no menu de itens, iremos criar uma reta definida pelos pontos P e Q, e clique em ferramenta, escolha a opção “retas” e em seguida clique sobre os pontos P e Q. Ao finalizar

este processo, altere os valores de  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $X_q$ , e  $Y_q$  através dos controles deslizantes, perceba que a reta é determinada pelos pontos. Quando alteramos as coordenadas dos pontos P e Q, alteramos também a reta.

Figura 30: Criando retas a partir de dois pontos.

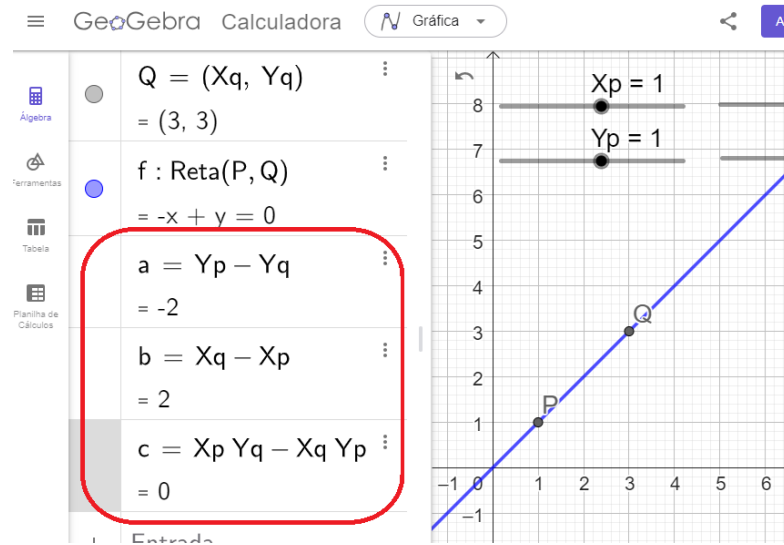


Fonte: Autor.

- 4- Neste passo, estaremos construindo os coeficientes da equação geral da reta. Sabemos que a equação na forma “geral” é igual a  $ax + by + c = 0$ , onde  $a, b$  e  $c$  são seus coeficientes. No campo de entrada do Geogebra, escreva  $a = Y_p - Y_q$ ,  $b = X_q - X_p$  e  $c = X_p * Y_q - X_q * Y_p$ . Na seção 2.3.1, tratamos o assunto equação geral da reta, mais precisamente na página 36, encontramos as formulas referente aos coeficientes  $a, b$ , e  $c$ .

Uma Observação, durante a abordagem teórica foi determinado uma reta  $r$  passando pelos pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$ , na presente atividade estamos utilizando os pontos  $P(x_P, y_P)$  e  $Q(x_Q, y_Q)$ , no intuito de não haver o risco de confundir ponto A com coeficiente  $a$ .

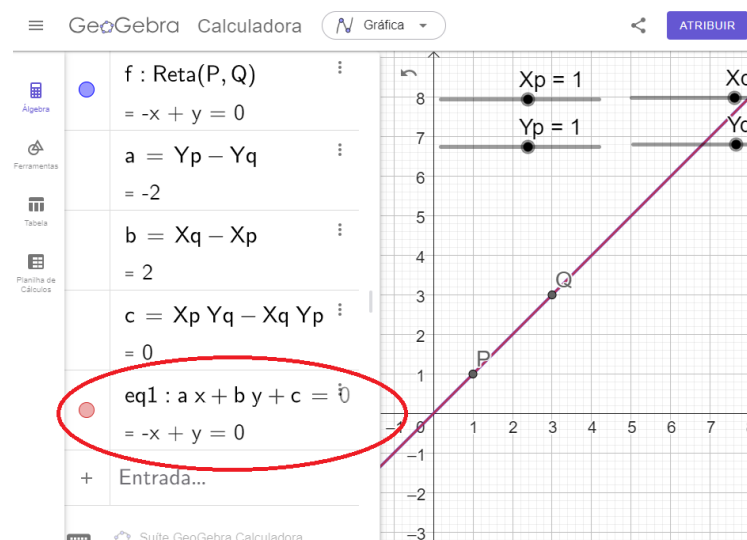
Figura 31: Coeficientes da equação geral da reta.



Fonte: Autor.

No próximo passo escreveremos no campo de entrada a equação geral da reta  $ax + by + c = 0$ . Desta forma, será construída uma outra reta que irá se sobrepor a reta determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$ . Agora, analise na janela de álgebra que os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e também a equação da reta construída. Perceba que os valores se correspondem, de forma que as retas são coincidentes, ou seja, a mesma reta.

Figura 32:  $ax + by + c = 0$ .



Fonte: Autor.

5- Agora, altere os valores das coordenadas  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $X_q$  e  $Y_q$ , e perceba que para quaisquer dois pontos no plano, teremos uma equação geral da reta escrita como  $ax + by + c = 0$ .

Agora, com toda a construção da equação geral da reta construída, procure alterar as coordenadas do ponto, procurando encontrar o que torna a reta vertical, horizontal, crescente, ou decrescente, tendo em vista também o que acontece com os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da reta.

## 4.2 Atividade 2: Equação Segmentária da Reta.

### Planejamento da Atividade

- Objetivo da Atividade:

Espera-se que ao desenvolver essa atividade, e analisar o objeto de estudo construído, o estudante possa através dos controles deslizantes atribuir significados aos coeficientes  $p$  e  $q$  da equação segmentária da reta, a partir dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação geral. Onde somado com as análises feitas na atividade anterior o aluno possa compreender como determinar uma reta a partir dos pontos de intersecção com os eixos coordenados, interpretando a expressão segmentar de uma reta, horizontal ou vertical.

- Conteúdos abordados:

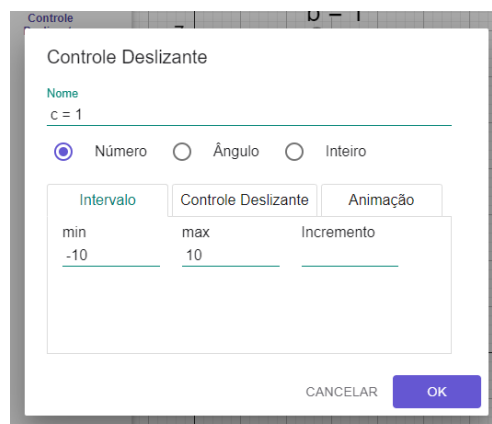
- Equação Geral da Reta.

- Equação Segmentária da Reta.

### Desenvolvimento da Atividade

1- Utilizando a ferramenta “controle deslizante”, construa 3 controles, do tipo ‘número’, com intervalo de -10 a 10, e nomeie-o  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Esses serão os coeficientes da equação geral da reta.

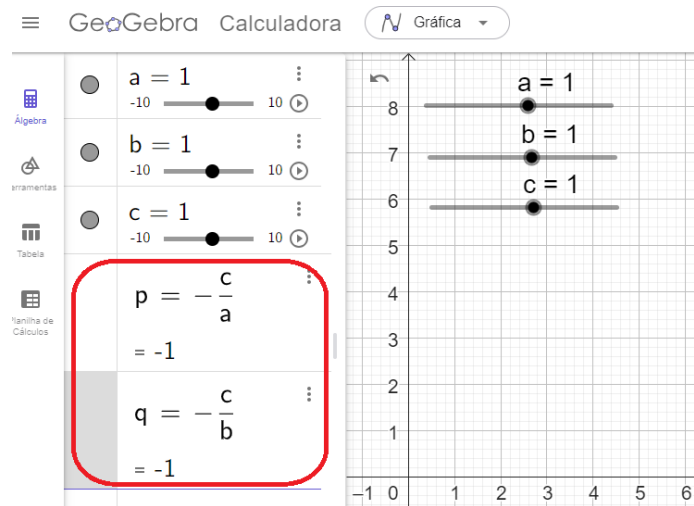
Figura 33: Coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



Fonte: Autor.

2- No campo de entrada, escreva  $p = -\frac{c}{a}$  e depois escreva  $q = -\frac{c}{b}$ .

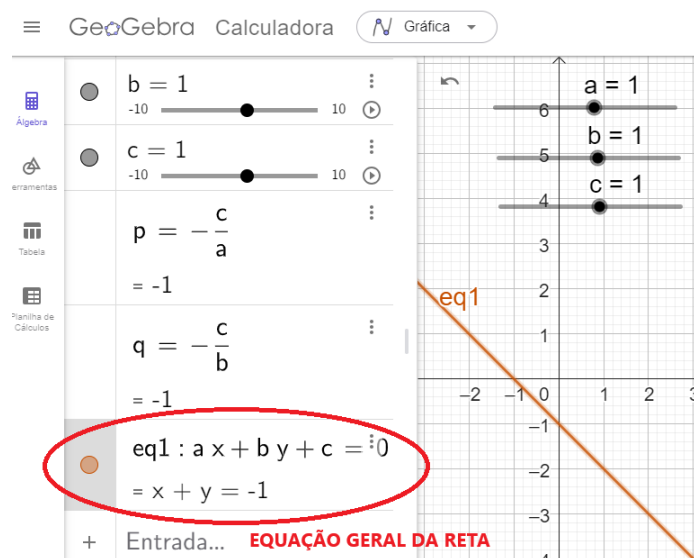
Figura 34: Coeficientes p e q.



Fonte: Autor.

3- No campo de entrada escreva a equação geral da reta " $ax + by + c = 0$ " e logo em seguida pressione "enter".

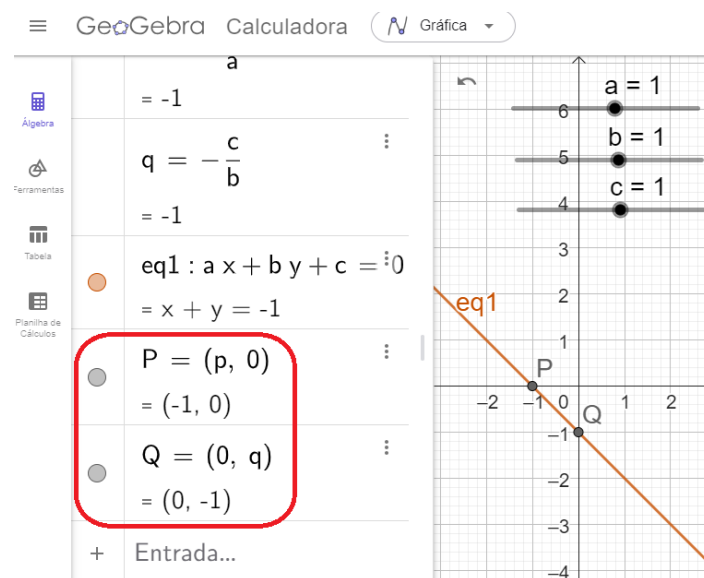
Figura 35: Forma geral da reta



Fonte: Autor.

- 4- Agora, no campo de entrada escreva o ponto  $P=(p,0)$  e depois o ponto  $Q(0,q)$ . É importante ressaltar que “p” será raiz da equação e “q” o coeficiente linear da reta, ambos pontos de intersecção da reta com os eixos Ox e Oy, respectivamente. Estes são os mesmos pontos que vimos no tópico 2.3.2 deste trabalho, mais precisamente na página 38.

Figura 36: Ponto de intersecção com os eixos Ox e Oy.



Fonte: Autor.

- 5- Agora, altere os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  e perceba na janela de visualização que os pontos  $P$  e  $Q$  são exatamente pontos de intersecção da reta com os eixos  $x$  e eixo  $y$ .

Neste momento, iremos analisar as coordenadas dos pontos  $P$  e  $Q$ , de acordo com os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação geral da reta. Assim, alterando os coeficientes da equação geral da reta, observe o que acontece com as coordenadas  $p$  e  $q$ . Procure encontrar as retas verticais e horizontais relacionando a representação na janela de visualização do Geogebra com os conteúdos abordados nas páginas 41 e 42.

### 4.3 Atividade 3: Equação Reduzida da Reta

#### Planejamento da Atividade

- Objetivo da Atividade:

Compreender as relações do coeficiente angular com a equação da reta, entender que o coeficiente angular está diretamente ligado a inclinação da reta, e assim, formar conceitos sobre como classificar a reta como crescente, decrescente ou constante, a partir do valor do coeficiente angular. Relacionar os coeficientes da forma geral da reta com os coeficientes da forma reduzida, de maneira que seja possível compreender o que as tornam horizontal ou vertical.

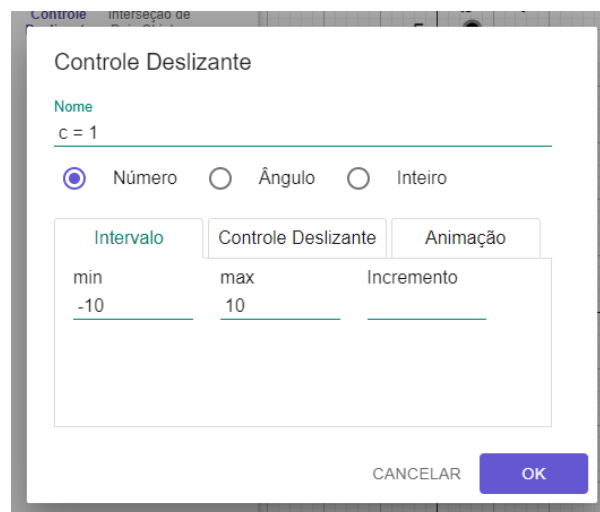
- Conteúdos abordados:

→ Equação Reduzida da Reta.

### Desenvolvimento da Atividade

- 1- Utilizando a ferramenta “controle deslizante”, construa 3 controles, do tipo ‘número’, com intervalo de -10 a 10, nomeie-os de a, b e c. Esses serão os coeficientes da equação geral da reta.

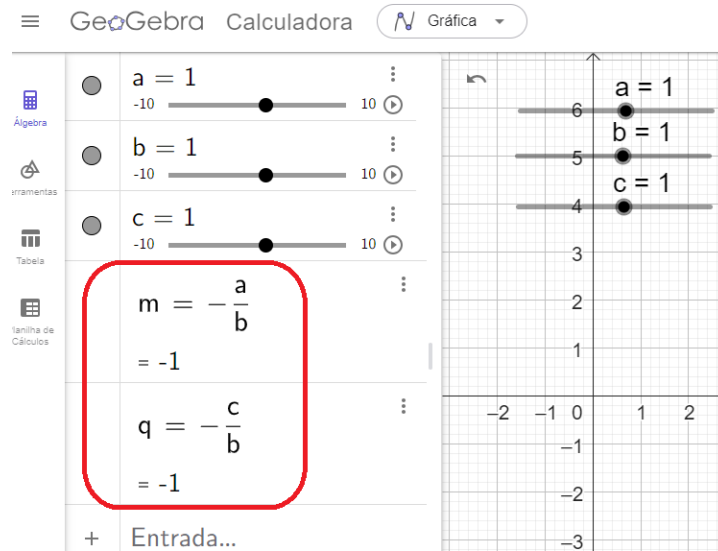
Figura 37: Coeficientes a, b e c.



Fonte: Autor.

- 2- Construiremos agora os coeficientes  $m$  e  $q$ , denominados de coeficiente angular e coeficiente linear, respectivamente. No campo de entrada escreva  $m = -\frac{a}{b}$  e depois escreva  $q = -\frac{c}{b}$ . Esses coeficientes podem ser encontrados no tópico 2.3.3 deste trabalho, onde é apresentado a relação entre a equação geral e equação reduzida da reta.

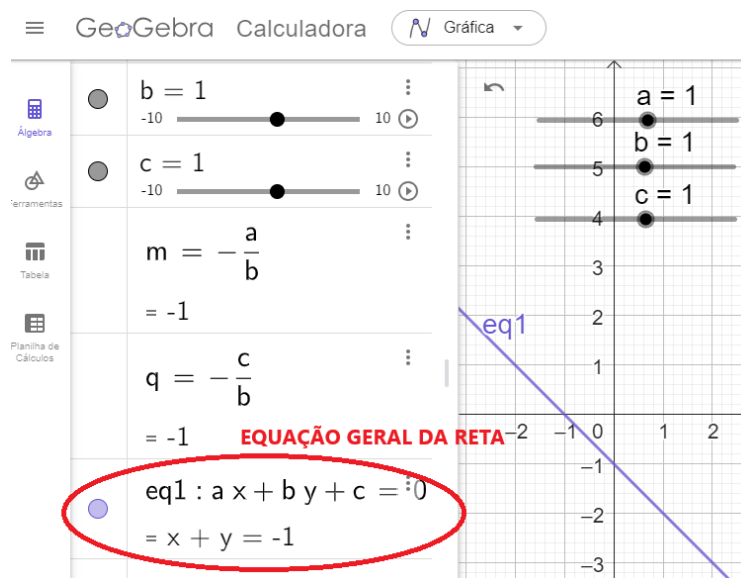
Figura 38: Coeficientes m e q.



Fonte: Autor.

- 3- No campo de entrada escreva a equação geral da reta “ $ax + by + c = 0$ ”, logo em seguida pressione “enter”.

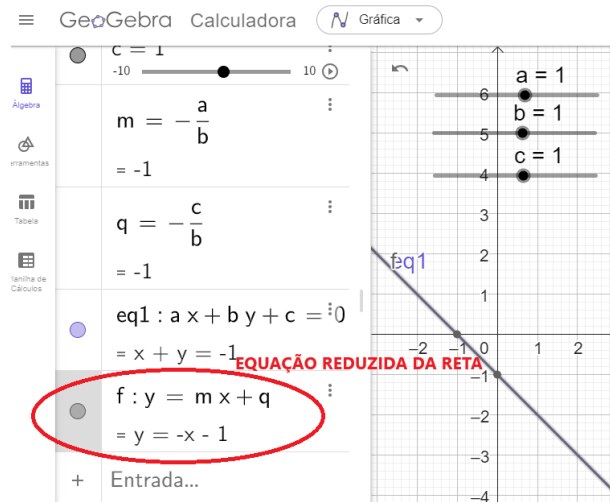
Figura 39: Equação geral da reta.



Fonte: Autor.

- 4- No campo de entrada escreva a equação geral da reta “ $y = mx + q$ ”, logo em seguida pressione “enter”.

Figura 40: Equação Reduzida da reta.



Fonte: Autor.

Agora, alterando os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  criado no primeiro passo desta atividade, procure determinar quando a reta será paralela ao eixo das ordenadas e quando será paralela ao eixo das abscissas. Faça uma análise observando os coeficientes da equação geral da reta relacionando com a expressão reduzida da reta. Procure as respostas para perguntas, como: O que acontece com os coeficientes da equação reduzida da reta quando são paralelas aos eixos coordenados? O que é necessário para que a reta seja crescente ou decrescente?

Uma observação importante é perceber que tanto a equação reduzida, como também a equação segmentária apresenta o coeficiente linear.

#### 4.4 Atividade 4: Coeficiente Angular

##### Planejamento da Atividade

- Objetivo da Atividade:

Compreender a relação existente entre o coeficiente angular e a inclinação da reta. Entender como encontrar a inclinação da reta, percebendo a relação  $m = -\frac{a}{b} = tg\alpha$ . Espera-se que o aluno compreenda por que a inclinação da reta se limita ao intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ ,

percebendo que quando o ângulo fora desse intervalo corresponde a uma direção já representada dentro do intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

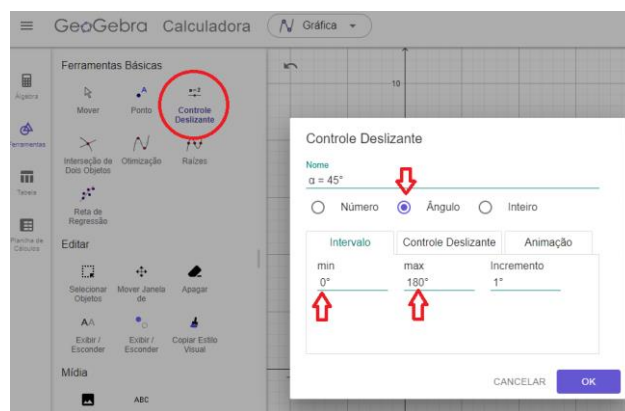
- Conteúdos abordados:

→ Coeficiente Angular.

### Desenvolvimento da Atividade

- 1- Utilizando a ferramenta “controle deslizante” crie um controle selecionando a opção ângulo, e o coloque no intervalo de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  graus, esta será a inclinação da reta.

Figura 41: Inclinação da reta.



Fonte: Autor.

- 2- Com a ferramenta “controle deslizante”, construa um controle, do tipo ‘número’, com intervalo de -10 a 10, e nomeie-o de q. Esse será o coeficiente linear da equação geral da reta.

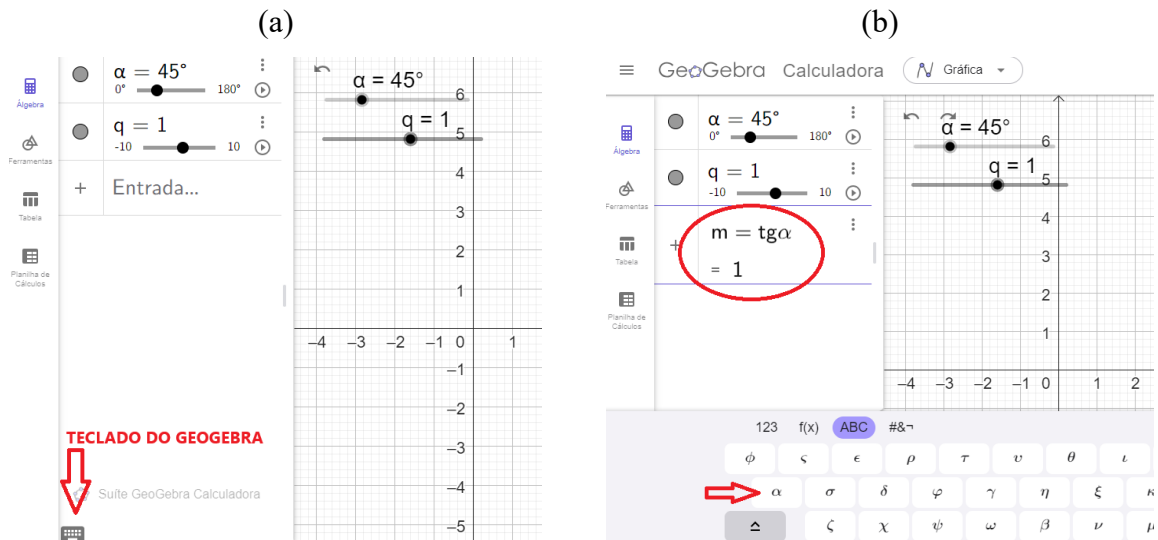
Figura 42: Coeficiente Linear.



Fonte: Autor.

- 3- Agora, construiremos o coeficiente angular, escrevendo no campo de entrada  $m = tg\alpha$ . Para colocar a letra grega  $\alpha$  você poderá estar utilizando o teclado do Geogebra clicando no símbolo do teclado no canto inferior esquerdo da tela, como mostra as figuras abaixo. Observe as figuras 43 (a) e (b).

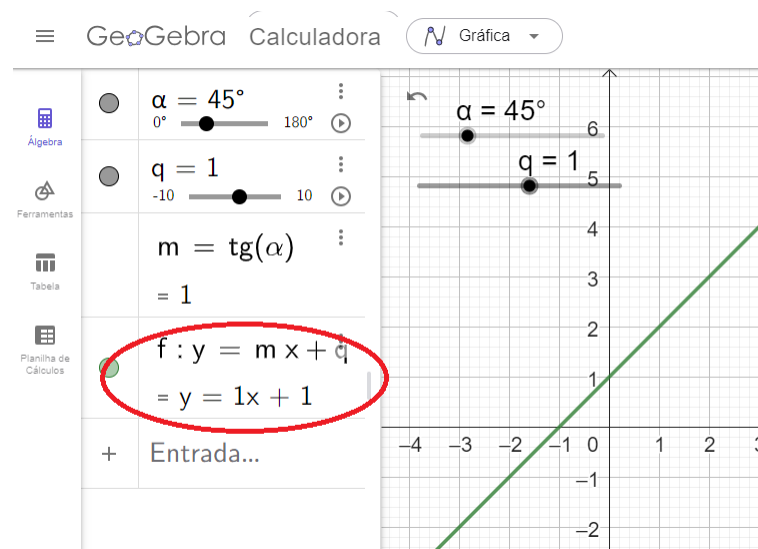
Figura 43: Teclado do Geogebra.



Fonte: Autor.

- 4- No campo de entrada, coloque a equação reduzida da reta  $y = mx + q$ .

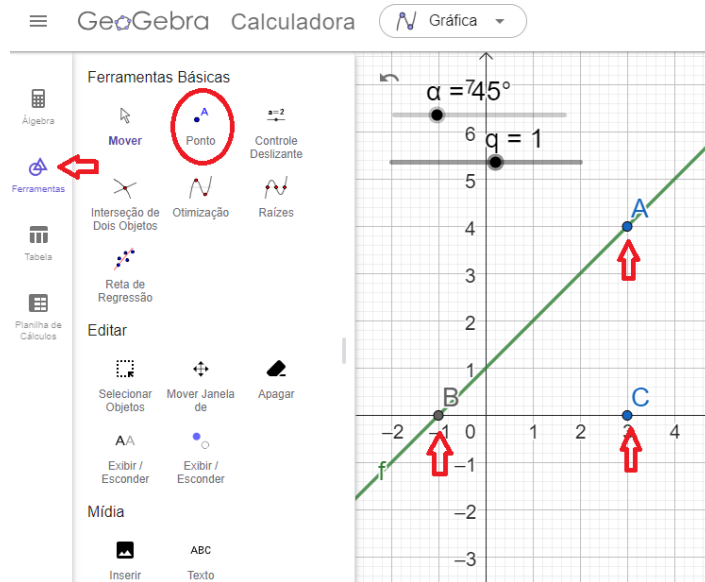
Figura 44: Equação Reduzida da reta.



Fonte: Autor.

- 5- Agora, na aba “ferramentas” selecione a opção “Ponto” e insira um ponto sobre o eixo das abscissas, outro no ponto de intersecção da reta com o eixo x, e um terceiro ponto sobre a reta, de acordo com a figura abaixo.

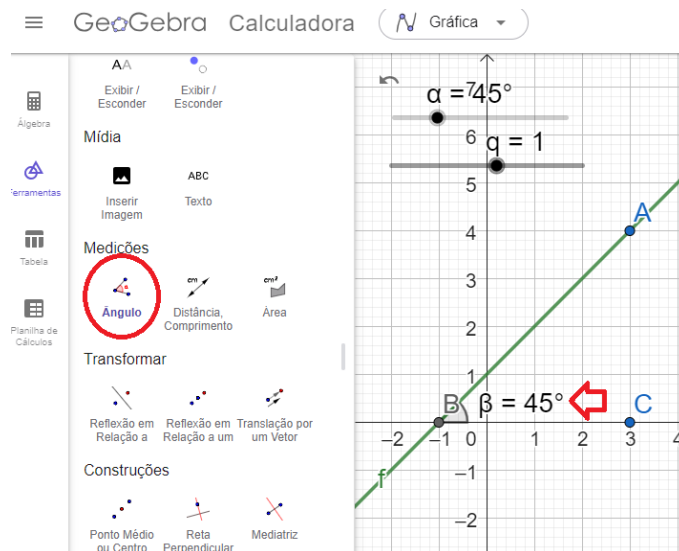
Figura 45: Criando pontos.



Fonte: Autor.

- 6- Ainda em ferramentas, agora selecionando a opção “Ângulo”, clique sobre os pontos A, B e C criado no item anterior.

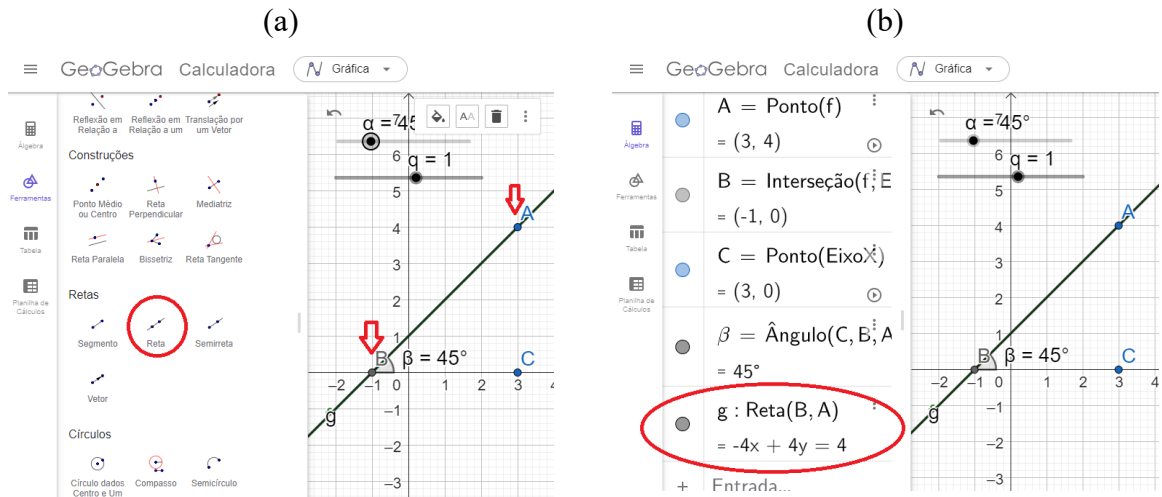
Figura 46: O ângulo de inclinação da reta.



Fonte: Autor.

7- Com a ferramenta “Reta”, clique sobre os pontos A e B que pertencem a reta (Figura 47 a), assim você poderá observar a equação geral da reta no campo algébrico do Geogebra (figura 46 b).

Figura 47: Expressão geral na janela algébrica.



Fonte: Autor.

Observe que a equação da reta apresentada no campo algébrico da Figura 47 (b) está na forma geral, dado que o coeficiente  $c$  está no segundo membro das equações, temos  $ax + by = -c$ . Se  $ax + by = -c$ , então  $ax + by + c = 0$ .

Agora, alterando os valores correspondentes ao ângulo de inclinação da reta e o coeficiente linear, compare-os com o valor de “ $m = tg\alpha$ ” construído no terceiro passo desta questão. Analisando o exposto, procure uma explicação para  $m = tg\alpha$ .

#### 4.5 Atividade 5: Relação Relativas entre Retas Coplanares.

##### Planejamento da Atividade

###### • Objetivo da Atividade:

Compreender e reconhecer as posições relativas entre retas no plano a partir das equações reduzidas da reta, assim como criar e formalizar tais relações a partir dos coeficientes angular e linear.

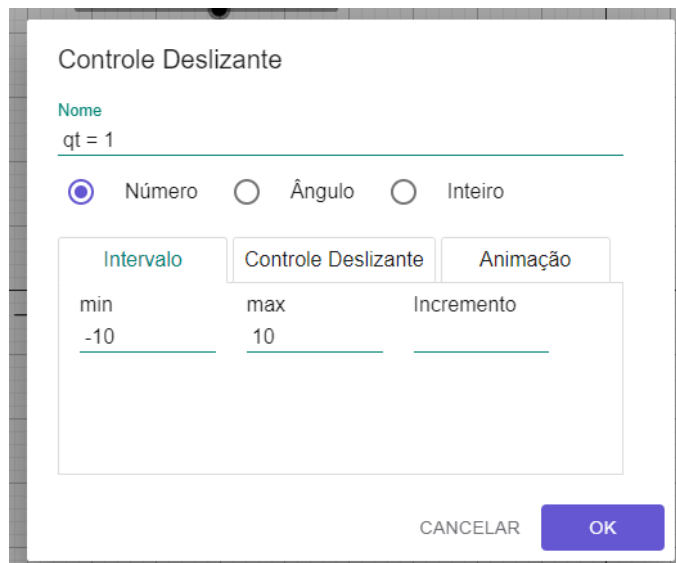
###### • Conteúdos abordados:

→ Posições relativas entre retas.

### Desenvolvimento da Atividade

- 1- Inicialmente, usando a ferramenta “Controle Deslizante” construa 4 controles, seleccionando o campo ‘número’, com intervalo de -10 a 10, renomeie de mr, qr, mt e qt, como na Figura 48. Esses serão os coeficientes angulares e lineares das retas r e t que construiremos adiante, respectivamente.

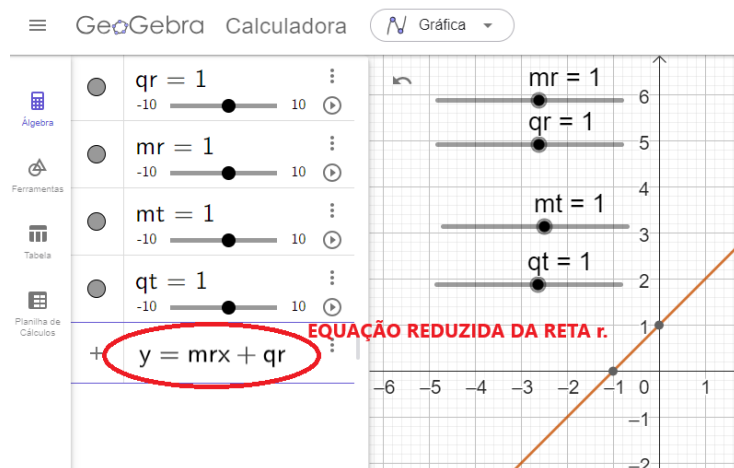
Figura 48: Coeficientes das retas r e t.



Fonte: Autor.

- 2- Agora, no campo de entrada do Geogebra, coloque a equação reduzida da reta r, escrevendo “ $r: y = mr * x + qr$ ”.

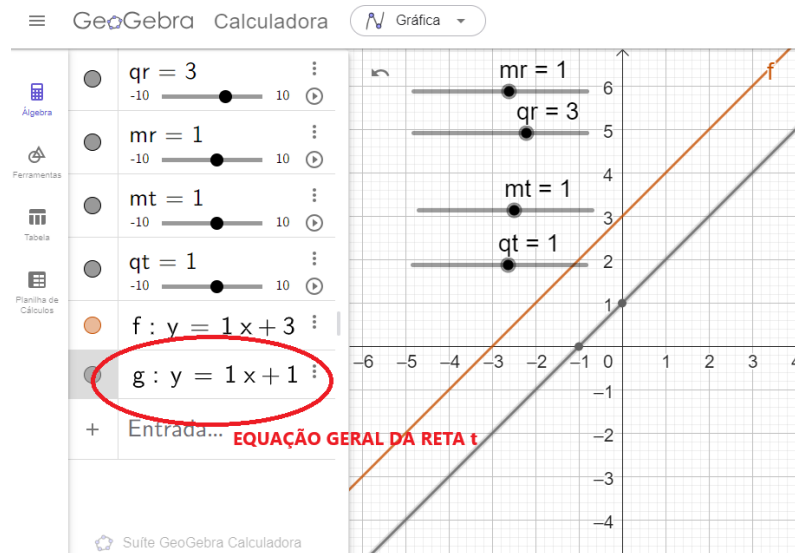
Figura 49: Equação reduzida da reta r.



Fonte: Autor.

3- Ainda no campo “entrada” do Geogebra, coloque agora a equação reduzida da reta  $t$ , escrevendo “s:  $y = mt * x + qt$ ”.

Figura 50: Equação reduzida da reta  $t$ .



Fonte: Autor.

Podemos observar na Figura 49, que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas distintas. Alterando os valores dos coeficientes da equação reduzidas das retas  $r$  e  $s$  procure formalizar o que torna as retas paralelas distintas, coincidentes, concorrentes, e quando além de concorrentes serão também perpendiculares.

O objetivo desta atividade é reconhecer a relação entre retas no plano cartesiano através dos coeficientes angulares e lineares. Assim, mesmo sem a representação gráfica, contando apenas com a equação reduzida é suficiente para identificar a relação entre as retas.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta didática de utilizar o software Geogebra no ensino de equações das retas se mostrou uma estratégia relevante para promover um aprendizado mais intuitivo dos conceitos envolvidos. Através das atividades de construções geométricas apresentadas neste trabalho, o estudante pode integrar teoria e prática de forma dinâmica, tornando a compreensão mais acessível e envolvente. A possibilidade de alterar os coeficientes, manipular o gráfico e observar suas implicações nas retas, facilita a conexão entre a álgebra e a geometria, assim, o educando poderá compreender e formalizar o seu conhecimento, no tocante, equações das retas e suas relações no plano.

É importante destacar que a utilização da tecnologia desempenha um papel fundamental ao potencializar a análise e a percepção dos alunos de modo mais abrangente, a qual promove a interação entre conceitos matemáticos e a geração de novas ideias. Com isso, o uso do geogebra mostra-se uma ferramenta extremamente importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática, permitindo não apenas a visualização mais clara do conteúdo, mas também o fortalecimento da relação entre teoria e prática. A interatividade proporcionada pelo aplicativo Geogebra facilita de modo significativo a compreensão dos temas abordados, além de promover maior engajamento dos estudantes com a geometria analítica, no tocante, equações das retas.

Durante minha carreira profissional como professor, pude perceber o quanto o Geogebra pode somar no plano de ensino do professor. Não apenas nas aulas sobre equações das retas mais em diversos outros assuntos. Utilizar do Geogebra não apenas facilita a compreensão teórica, mas também estimula a curiosidade, incentivando os estudantes a explorarem diferentes situações matemáticas. Além disso, percebe-se que ao integrar ferramentas visuais e manipuláveis ao com a matemática, o Geogebra proporciona uma aprendizagem personalizada, permitindo que cada aluno avance seus estudos no seu próprio ritmo.

A partir dos resultados obtidos aplicando esta proposta didática durante minha carreira profissional pude perceber que o uso da tecnologia no ambiente educacional apresenta um impacto positivo, tanto que diz respeito ao estímulo ao aprendizado quanto à motivação dos estudantes. Conforme Capoano (2022), o Geogebra transforma a aprendizagem ao introduzir uma abordagem mais dinâmica, superando as limitações dos métodos tradicionais, como o uso quadro e giz e o uso de livro didático. Por muitas vezes é notório o desinteresse, a desmotivação com a matemática diante de métodos tradicionais de ensino, as ferramentas tecnológicas, por sua natureza dinâmica e interativa, despertam o interesse dos alunos, a inserção consciente e

planejada de recursos tecnológicos permite não apenas diversificar as estratégias de ensino, mas também ressignificar conteúdos já consolidados.

Neste trabalho, propusemos um conjunto de atividades que, ao longo do tempo foi constantemente aprimorada e refinada. Observou-se não apenas uma boa aceitação da proposta didática, implementada, mas também um desempenho satisfatório nas atividades desenvolvidas. A expectativa é que essas atividades possam enriquecer os planos de ensino sobre equações de retas dos leitores deste trabalho.

Espera-se que as atividades apresentadas ao longo deste trabalho contribuam para o enriquecimento dos planos de ensino relacionados ao estudo das equações das retas, oferecendo aos leitores, um método prático e metodológicos capazes de tornar o processo de ensino e aprendizagem mais eficaz. A intenção é que os educadores se sintam inspirados a adaptar e aplicar essa proposta didática em sala de aula, promovendo uma abordagem envolvente do conteúdo matemático. Isso porque ensinar é mais do que transmitir fórmulas, é traçar caminhos que levam à descoberta.

## BIBLIOGRAFIA

- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação (MEC). Brasília, 2018
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- CALINANI, F. J. O. **Um aplicativo de celular como alternativa metodológica para o ensino de semelhança de triângulos e pirâmides**. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2021.
- CAPOANO, A. L. O. **O som das funções: possibilidades em tecnologias digitais e educação matemática para futuros professores**. Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2022.
- FARIAS, J. V.; MARTINS, G. F. D.; SANTOS, A.S. B. dos. **Matemática, arte e Geogebra: fazendo arte com a função quadrática e com tecnologias digitais**. *Holos*, v. 4, p. 1-19, 2021.
- GANETO, José Pedro A. et al. **Geogebra no Estudo de Geometria no 2º Ano do 2º Ciclo de Ensino Básico de Escolaridade**, (Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo) São Paulo - SP, 2018.
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar, 7: geometria analítica** – 6 ed.- São Paulo: Atual, 2013.
- LEIVAS, J. C. P.; SOUZA, H. M. de; PORTELLA, H. P. de. **Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na Escola Básica no Brasil com Geogebra**. (Revista Thema) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-grandense. Pelotas – RS, 2017.
- LIBÂNEO, José Carlos. **PEDAGOGIA TRADICIONAL: NOTAS INTRODUTÓRIAS**. Pontifícia Universidade de Goiás. 2012.
- LIMA, M. G. & ROCHA, A. A. S. da . (2022). **AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA**. *Revista Ibero-Americana De Humanidades, Ciências E Educação*, 8(5), 729–739. <https://doi.org/10.51891/rease.v8i5.5513>

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** In: A Educação Matemática em Revista, n. 4., setembro (1995)

NACIMENTO, Eimard G. A. **Avaliação do software Geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola**, (Conferencia Latinoamericana de GeoGebra) Uruguai, 2012.

PERES, G. **A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus, no estado de São Paulo**, São Paulo: Educação Matemática em Revista. SBEM, n. 4, 1995.

PEREIRA, Edecarlos. **A utilização de Applets no Geogebra para a aprendizagem da Trigonometria no Ensino médio**, 2015. Dissertação (Mestrado em ensino de ciência e matemática) Universidade Federal de Alagoas. Maceió - AL 2015.

PIRES, Manuel Vara. **Investigações matemáticas: aprender matemática com compreensão**. Artigos em revistas (Escola Superior de Educação de Paulo Frassinetti) 2015.

PONTE, J. P. Formação do professor de Matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática** 1. ed. [S.l: s.n.], 2014. p. 343–360.

SKOVSMOVE, O. **Um convite à educação crítica**, Rio Claro: Editora Papirus, 2014.

TORTORA, E. & PIROLA, N. A. **Resolução de problemas geométricos: um estudo sobre o desenvolvimento conceitual e os conhecimentos declarativos de figuras planas nos anos iniciais do ensino fundamental**. REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, Brasil, v. 4, n. 1, p. 104–125, 2016