



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CENTRO DE CIÊNCIAS INTEGRADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Matheus Faustino Silva

Transformada de Laplace: uma análise de seus teoremas e algumas aplicações

Araguaína/TO
2025

Matheus Faustino Silva

Transformada de Laplace: uma análise de seus teoremas e algumas aplicações

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Araguaína/TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586t Silva , Matheus Faustino .
Transformada de Laplace: uma análise de seus teoremas e algumas aplicações / Matheus Faustino Silva . - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.
61 f.
Monografia Graduação (Graduação - em Matemática) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.
Orientador: Alvaro Julio Yucra Hanco.
1. Métodos de transformação. 2. Equações Diferenciais Ordinárias.
3. Equações Algébricas.

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Matheus Faustino Silva

Transformada de Laplace: uma análise de seus teoremas e algumas aplicações

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco

Aprovada em: 04 / 12 / 2025 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco

Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

Dedico este trabalho a todos os amigos e pessoas que me apoiaram no percorrer do curso de Licenciatura em Matemática, em especial aos meus pais, Neidy e Oneildo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, eu agradeço a Deus pela vida e por poder estar terminando a minha graduação em um curso que amo.

Agradeço profundamente aos meus pais, Neidy e Oneildo, que sempre estiveram ao meu lado, me criando com carinho e amor. Tenho orgulho de dizer que sou quem eu sou hoje por causa deles.

Aos meus irmãos: Ana Késia, minha confidente; seu jeito de levar a vida sorrindo me motiva a cada dia. Ao meu irmão Guilherme, já fomos muitas vezes confundidos como gêmeos (eu discordo); não digo muito, mas o considero muito inteligente. E ao Samuel, o mais novo entre nós; infelizmente, não tive muito tempo para brincar com ele, mas espero poder mudar isso um dia.

Agradeço ao meu orientador, professor Álvaro, uma pessoa com uma paciência gigantesca. Há momentos em que penso: “como uma pessoa pode ser tão inteligente?” Eu me espelho na sua maneira de ensinar e almejo me tornar um profissional tão bom quanto ele.

Dedico um momento especial ao meu grupo de melhores amigos: Wagner, Kaylanne, Jucilene e, não menos importante, Ryckelly. Lembrar como conheci cada um de vocês enche meu coração de alegria. Estivemos lado a lado em tantos momentos: estudando sem parar, escrevendo trabalhos dentro de uma simples açáteria, eu ria constantemente enquanto o Wagner e a Ryckelly eram retirados da universidade porque já passava das 23 horas e o campus precisava fechar. Juntos, organizamos o chá de fraldas surpresa da Jucilene, e tivemos uma confraternização inesquecível na chácara Don Orione. Esses instantes, tão simples e tão nossos, marcaram a minha vida. São lembranças que guardarei para sempre, com todo o carinho que tenho por cada um de vocês.

Agradeço aos meus amigos Ana Laura, Sabrina, Tanielly, Whadyton, Felipe e Francisco. Já perdi a conta de quantas vezes fomos almoçar na casa da Tanielly por conta do Restaurante Universitário. Agradeço aos meus amigos Cricya, Luiz, Shamyra, Glaudston, Thatiany, Wellyson, Kalline e Yago; com vocês, tenho memórias de momentos incríveis que guardarei na minha lembrança.

Quero destacar um momento especial para minha amiga Sthefany ou, como eu a chamo, “Editora”. Agradeço por revisar e corrigir diversos textos desta monografia e de vários outros trabalhos meus. Sua dedicação é algo em que me inspiro e espero que continue sendo a pessoa incrível que você é.

Agradeço à professora Renata e ao professor José Carlos por aceitarem compor a banca desta monografia. Agradeço também ao colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, formado por ótimos professores. Agradeço por todo o tempo e aprendizado que me proporcionaram.

O presente é deles, o futuro, para qual eu realmente trabalhei, é meu.

Nikola Tesla

RESUMO

A Transformada de Laplace (TL) é um método de transformação que foi desenvolvido por diversos matemáticos, ao longo da história. Recebeu sua nomenclatura em homenagem a Pierre Simon de Laplace que contribuiu na consolidação do método. A TL faz a transformação de uma função no tempo para uma função no domínio da frequência, o que nos resulta em uma equação algébrica, tornando seu cálculo mais simples. Esse método é uma alternativa de resolução de uma Equação Diferencial Ordinária e, suas aplicações estão presentes em diversas áreas do conhecimento. Nesta monografia, são apresentadas duas aplicações: uma, na farmacologia, em que calculamos a concentração do medicamento no sistema corporal e encontramos a função que descreve a concentração do medicamento de acordo com o tempo desde a dosagem; já a segunda aplicação é feita na engenharia, em que encontramos a função que mostra o deslocamento das duas massas conectadas a molas para qualquer instante de tempo. Com base nos resultados obtidos, concluímos que a Transformada de Laplace é uma ferramenta matemática eficaz e versátil, capaz de simplificar a resolução de problemas modelados por equações diferenciais e de proporcionar interpretações precisas em contextos reais.

Palavras-chave: Métodos de transformação. Equações Diferenciais Ordinárias. Equações Algébricas.

ABSTRACT

The Laplace Transform (LT) is a transformation method that was developed by various mathematicians throughout history and was named in honor of Pierre-Simon Laplace, who contributed to the consolidation of the method. The LT transforms a function in the time domain into a function in the frequency domain, resulting in an algebraic equation, which makes its calculation simpler. This method is an alternative to the Ordinary Differential Equation (ODE). Its applications are present in several fields of knowledge. In this monograph, two applications are presented: one in pharmacology, in which we calculate the concentration of a drug in the body system and find the function that describes the drug concentration over time since administration; and the second application in engineering, in which we find the function that shows the displacement of two masses connected to springs at any given moment in time. Based on the results obtained, we conclude that the Laplace Transform is an effective and versatile mathematical tool, capable of simplifying the solution of problems modeled by differential equations and providing accurate interpretations in real-world contexts.

Keywords: Transformation Methods. Ordinary Differential Equations. Algebraic Equations.

Lista de Figuras

2.1	Função Degrau do Exemplo 2.2.	15
2.2	Função Degrau do Exemplo 2.3.	16
4.1	Gráfico da função e^{-x}	28
5.1	Concentração do medicamento no sistema corporal central em 3 horas.	48
5.2	Concentração do medicamento no sistema periférico em 3 horas.	49
6.1	Deslocamento das Masas em relação ao tempo de 10 segundos.	58

Sumário

1	Introdução	11
2	Noções Preliminares	14
2.1	Função Seccionalmente Contínua	14
2.2	Equação Diferencial Ordinária	16
2.3	Integral de uma Função	17
2.3.1	Integral Definida	19
2.3.2	Integral Imprópria	20
2.3.3	Integral convergente e divergente	21
3	Transformada de Laplace: um breve contexto histórico	23
4	Introdução à Transformada de Laplace	26
4.1	Formulação da Transformada de Laplace	26
4.2	Condição de Existência da Transformada de Laplace	29
4.3	Transformada Inversa de Laplace	32
4.4	Linearidade da Transformada de Laplace e Transformada de Laplace da Derivada de uma Função	34
4.5	Aplicação da Transformada de Laplace às Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	37
4.6	Resolução Matricial do Sistema no Domínio de Laplace	38
5	Aplicação da Transformada de Laplace na Dosagem de Medicamentos	40
6	Aplicação da Transformada de Laplace no Caso Massa - Mola	50
7	Considerações Finais	59
	Referências	61

Capítulo 1

Introdução

O conceito que fundamenta esta monografia é a Transformada de Laplace (TL). Mas, o que seria a TL? De forma direta, a TL é uma técnica que converte uma função do domínio do tempo em uma função analítica definida sobre uma região do plano complexo. A Transformada é utilizada, principalmente, como uma alternativa para o cálculo de equações diferenciais, tornando a sua resolução simples e prática. Contudo, sua utilização não é viável em todas as situações, pois em alguns casos o cálculo direto das equações diferenciais mostra-se mais apropriado sua utilização.

Acerca de sua nomenclatura, Transformada de Laplace, seria correto afirmar que foi Laplace quem desenvolveu essa teoria? É comum pensar que seu nome se deve ao grande matemático e astrônomo francês, marquês da corte de Napoleão Bonaparte, Pierre-Simon de Laplace (1749–1827). Entretanto, essa pergunta não pode ser respondida facilmente. Segundo Tonidandel e Araújo (2012).

[...] sua história é uma verdadeira saga de quase 200 anos, recheada de inovações empolgantes, disputas e mal-entendidos, que remonta aos primeiros trabalhos do matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) em 1737 e Laplace em 1774, passando por nomes como Joseph Louis Lagrange (1736–1813) e o conterrâneo de Laplace, Augustin Louis Cauchy (1789–1857), já no século XIX. (Tonidandel é Araújo, 2012, p.1)

A pesquisa teve seu início por meio do interesse sobre essa área, o qual se intensificou à medida que os estudos sobre o tema avançaram. A TL possui uma aplicabilidade diversificada, devido à sua utilidade. Um exemplo está na química: quando um medicamento é administrado no organismo por uma única dose, sendo eliminado de acordo com uma cinética de primeira ordem, o processo pode ser modelado por uma equação diferencial. A TL transforma essa equação diferencial em uma equação algébrica, simplificando sua resolução. Isso é confirmado por Sauter et al. (2022, p. 1): “essa transformação leva uma equação diferencial a uma nova equação em termos da função transformada, que é algébrica e pode ser resolvida facilmente”.

Dessa forma, este trabalho busca compreender de que forma a Transformada de Laplace contribui para a resolução de equações diferenciais e como se aplica em situações reais. Uma

das referências que serve de base para este projeto é o livro “Transformada de Laplace: um livro colaborativo”, de Sauter et al., que reúne diversos teoremas e aplicações da TL, apresentados de forma conjunta de diferentes autores.

O intuito da monografia é responder à seguinte pergunta: de que forma a Transformada de Laplace contribui para a resolução de equações diferenciais lineares com condição inicial, e como isso se aplica em contextos reais? Pretende-se responder a essa pergunta analisando suas aplicações e teoremas, a partir de uma pesquisa de caráter bibliográfico e qualitativo, onde buscamos utilizar os dados coletados para compreender a TL. No entanto, a simples obtenção dos dados não é o suficiente para essa compreensão, é essencial interpretá-los, pois somente assim vamos gerar significado e entendimento.

[...] a interpretação exige a comprovação ou refutação das hipóteses. Ambas só podem ocorrer com base nos dados coletados. Deve-se levar em consideração que os dados por si só nada dizem, é preciso que o cientista os interprete, isto é, seja capaz de expor seu verdadeiro significado e compreender as ilações mais amplas que podem conter. (Lakatos e Marconi, 1992, p. 51)

Esta monografia é composta por sete capítulos. O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução do que é a TL juntamente com o seu contexto histórico. Nele também são apresentados os aspectos gerais do trabalho como: objetivo, metodologia, justificativa e estrutura da monografia.

O Capítulo 2, intitulado “Noções Preliminares da Transformada de Laplace”, busca mostrar conceitos introdutórios a TL, trazendo as funções seccionalmente contínuas, equação diferencial ordinária, integral de uma função (tanto integral definida quanto imprópria), além das noções de integral convergente e divergente.

No Capítulo 3, intitulado “Transformada de Laplace: um breve contexto histórico”, apresenta a evolução histórica da TL, destacando que seu desenvolvimento teve início com Leonhard Euler, pioneiro no uso de integrais exponenciais para resolver equações diferenciais. Posteriormente, Pierre-Simon de Laplace contribuiu significativamente para a consolidação da Transformada de Laplace ao introduzir a noção de função geratriz de uma sequência. A partir dessas contribuições iniciais, a TL foi gradualmente aprimorada e estruturada pelos trabalhos de diversos outros matemáticos.

No Capítulo 4, intitulado “Introdução à Transformada de Laplace”, apresenta-se a definição formal da TL, bem como seus resultados fundamentais. Nesse capítulo, são discutidas a condição de existência da Transformada de Laplace, a Transformada Inversa, a propriedade de linearidade e a Transformada de Laplace da derivada de uma função. Além disso, são expostos os respectivos conceitos, teoremas e demonstrações que fundamentam cada um desses tópicos.

A aplicação da Transformada de Laplace na dosagem de medicamentos é apresentada no Capítulo 5. Nesse capítulo, determina-se a concentração de um medicamento no sistema central e periférico do corpo humano em determinado tempo. Essa aplicação é fundamental no controle de dosagens, pois, ao se conhecer a variação da concentração com o tempo, torna-se

possível determinar quando será seguro administrar uma nova dose.

A aplicação da Transformada de Laplace no caso massa - mola é apresentada no Capítulo 6. Nesse capítulo, analisa-se a oscilação de duas massas conectadas por molas. Com o uso da TL, calculamos a função que descreve o movimento dessas massas ao longo do tempo.

Finalizando, Capítulo 7 “Considerações Finais” evidencia a importância da Transformada de Laplace na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, destacando também o aprendizado adquirido ao longo da elaboração desta monografia.

A linguagem adotada neste trabalho foi desenvolvida para facilitar a compreensão do tema abordado por estudantes e profissionais das áreas de Matemática, Física e afins. Buscando essa facilidade, procurou-se apresentar exemplos, figuras e explicações detalhadas ao longo do texto. Entretanto, para que haja o melhor aproveitamento do conteúdo, sugere-se que o leitor tenha conhecimento prévio de Cálculo Diferencial, Equações Diferenciais Ordinárias e Álgebra Linear.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Este capítulo tem como objetivo auxiliar na compreensão da Transformada de Laplace. Para isso, serão apresentadas algumas definições e conceitos relacionados a essa transformada, os quais permitirão uma melhor compreensão de sua estrutura e aplicações. A elaboração deste capítulo baseia-se nos trabalhos [1, 3, 5, 9, 13].

2.1 Função Seccionalmente Contínua

Definição 2.1. Dizemos que uma função $f(x)$, definida em um intervalo fechado $[a, b]$, é uma função seccionalmente contínua em $[a, b]$ quando esse intervalo pode ser subdividido em um número finito de subintervalos nos quais $f(x)$ é contínua. Esses subintervalos são tomados a partir de uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

na qual $f(x)$ é contínua em cada intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) , permitindo-se descontinuidades apenas nos pontos de junção x_i . Se $f(x)$ é contínua em todos os subintervalos, então $f(x)$ é seccionalmente contínua.

Exemplo 2.2. Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0, \\ 2, & \text{se } 0 \leq x < 3, \\ x - 1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

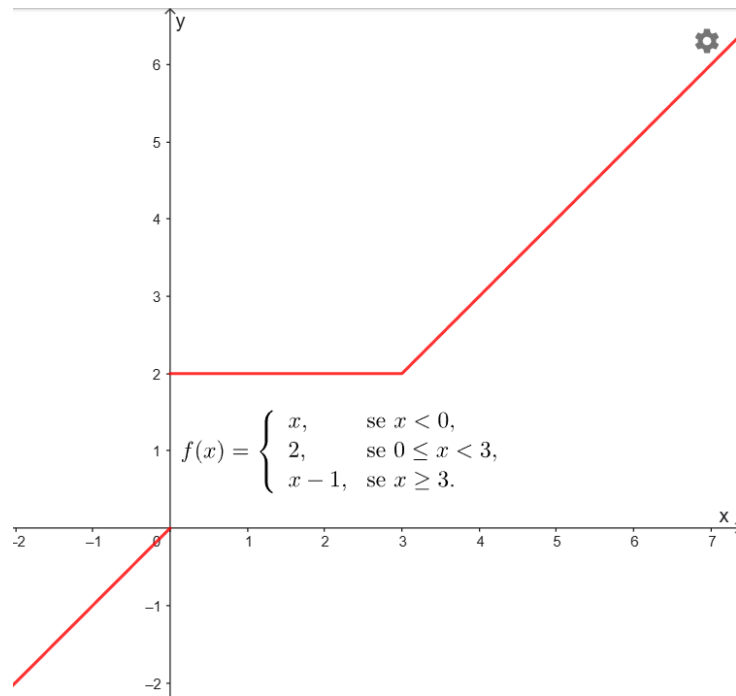
A função está formada por três trechos distintos:

- para $x < 0$, é uma função linear crescente;
- para $0 \leq x < 3$, assume valor constante igual a 2;

- para $x \geq 3$, volta a ser uma função linear, porém deslocada para baixo.

Essa função possui dois pontos de descontinuidade de salto finito $x = 0$ e $x = 3$. Como cada trecho é contínuo em seu intervalo de definição e o número de descontinuidades é finito, concluímos que $f(x)$ é uma função seccionalmente contínua.

Figura 2.1: Função Degrau do Exemplo 2.2.



Fonte: Autoria própria (elaborado no software Geogebra).

Exemplo 2.3. Considere a função definida por:

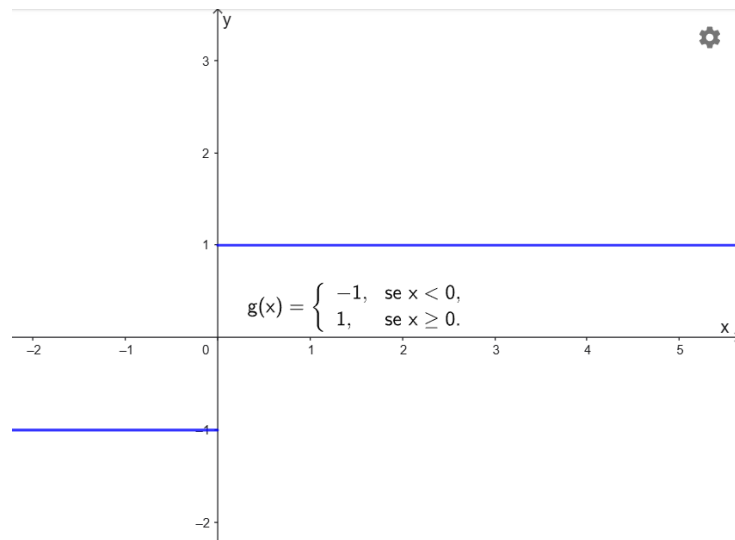
$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Essa função apresenta dois valores constantes:

- para $x < 0$, o valor de $g(x)$ é -1 ;
- para $x \geq 0$, o valor de $g(x)$ passa a ser 1 .

A função possui uma única descontinuidade de salto finito no ponto $x = 0$. Como cada trecho é contínuo em seu respectivo intervalo e há apenas um salto finito, concluímos que $g(x)$ é uma função seccionalmente contínua.

Figura 2.2: Função Degrau do Exemplo 2.3.



Fonte: Autoria própria (elaborado no software Geogebra).

Por fim, uma função $f(x)$ seccionalmente contínua sobre \mathbb{R} é uma função que, restrita a cada intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$, possui no máximo um número finito de descontinuidades de salto finito.

2.2 Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas em relação a uma única variável independente. Em termos gerais, uma EDO relaciona uma quantidade variável com a taxa de variação dessa mesma quantidade ao longo de outra variável, normalmente, o tempo.

EDOs são expressões que contêm derivadas ordinárias e são utilizadas para descrever fenômenos de uma única variável independente, um exemplo de EDO é:

$$\frac{dy}{dx} = x - y,$$

y é uma função de x . Diz-se que a derivada “depende de ambas as variáveis” porque a taxa de variação $\frac{dy}{dx}$ é calculada usando o valor de x e o valor de $y(x)$ ao mesmo tempo.

As EDOs podem ser classificadas de acordo com: ordinária (uma variável independente) ou parcial (mais de uma variável); ordem, determinada pela derivada de maior grau presente na equação; e linearidade, quando y e suas derivadas aparecem apenas ao primeiro grau no sentido linear, isto é, sem produtos entre y e suas derivadas, sem potências, razões ou funções não lineares aplicadas a y . Do contrário, a equação é não linear. É importante destacar que ?grau?

aqui não deve ser entendido como expoente no sentido algébrico, pois expressões como $1/y$ ou y^2 caracterizam não linearidade.

Resolver uma EDO significa encontrar a função $y(x)$ que satisfaz a relação diferencial proposta. Essa solução pode ser explícita (quando y é isolado) ou implícita (quando não é possível isolar y na equação).

Exemplo 2.4. A seguir, apresentamos alguns exemplos de EDOs:

1. EDO de 1ª ordem linear:

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

Aqui, a derivada de y depende de y e de x .

2. EDO de 1ª ordem separável:

$$\frac{dy}{dx} = x y.$$

É possível separar as variáveis e integrar:

$$\frac{1}{y} dy = x dx.$$

3. EDO de 2ª ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

4. EDO não linear:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x.$$

Nessa equação, y aparece com expoente maior que 1, o que a torna não linear.

2.3 Integral de uma Função

Quando desejamos calcular a área de uma região limitada por uma função contínua e positiva f , pelo eixo Ox e por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, dividimos essa região em vários retângulos. A soma das áreas desses retângulos aproxima a área real e, quanto menores forem os subintervalos, melhor será essa aproximação. Esse processo é formalizado pela definição de somas de Riemann.

Definição 2.5. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento, para cada $1 \leq i \leq n$, escolhamos t_i no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Fazendo $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, observamos que a área da região compreendida

entre o gráfico de f , o eixo $0x$ e as retas $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i.$$

A soma

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

é chamada de *soma de Riemann* associada à partição

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

de $[a, b]$.

Exemplo 2.6. Seja $f(x) = x$ no intervalo $[0, 2]$. Dividimos o intervalo em $n = 4$ subintervalos de mesmo comprimento:

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{4} = 0.5.$$

Os subintervalos são:

$$[0, 0.5], \quad [0.5, 1], \quad [1, 1.5], \quad [1.5, 2].$$

Escolhemos os pontos médios de cada subintervalo:

$$x_1^* = 0.25, \quad x_2^* = 0.75, \quad x_3^* = 1.25, \quad x_4^* = 1.75.$$

A soma de Riemann é

$$\sum_{i=1}^4 f(x_i^*) \Delta x \approx f(0.25) \cdot 0.5 + f(0.75) \cdot 0.5 + f(1.25) \cdot 0.5 + f(1.75) \cdot 0.5.$$

Substituindo $f(x) = x$:

$$0.25 \cdot 0.5 + 0.75 \cdot 0.5 + 1.25 \cdot 0.5 + 1.75 \cdot 0.5 \approx 2.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^4 f(x_i^*) \Delta x \approx 2,$$

confirmando que a área sob o gráfico de $f \approx 2$.

2.3.1 Integral Definida

Definição 2.7. Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, e seja

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

uma partição de $[a, b]$. Para cada subintervalo, definimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (1 \leq i \leq n),$$

e escolhamos um ponto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

A norma da partição $\|P\|$ é definida por

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i,$$

isto é, o comprimento do maior subintervalo da partição.

A *integral definida* de f no intervalo $[a, b]$ é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i,$$

desde que esse limite exista. Nesse caso, dizemos que f é integrável no sentido de Riemann, e o valor do limite, quando existe, é independente da partição P escolhida.

Exemplo 2.8. Vamos calcular a integral definida

$$\int_0^2 3 dx$$

utilizando a definição por limite da soma de Riemann.

Considere o intervalo $[0, 2]$ e uma partição regular com n subintervalos. Cada subintervalo tem comprimento

$$\Delta x = \frac{2}{n}.$$

Escolhemos como pontos de amostragem os extremos direitos:

$$t_i = \frac{2i}{n}.$$

Como $f(x) = 3$ é constante, temos $f(t_i) = 3$ para todo i . Assim, a soma de Riemann é

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n 3 \left(\frac{2}{n} \right) = \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{6}{n} \cdot n = 6.$$

Tomando o limite,

$$\int_0^2 3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 = 6.$$

Logo,

$$\int_0^2 3 dx = 6.$$

2.3.2 Integral Imprópria

A integral imprópria estende a integral definida, sendo utilizada quando os limites de integração tendem ao infinito ou quando a função apresenta pontos de descontinuidade. Nessas situações, não é possível calcular diretamente pelos métodos de integração definida.

Definição 2.9. Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq a$, tal que a integral $\int_a^b f(t) dt$ exista, qualquer que seja $b > a$. A *integral imprópria* da função $f(t)$ é definida por

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Essa definição significa que, para calcular uma integral cujo limite superior tende ao infinito, avaliamos inicialmente a integral até um valor finito b e, em seguida, verificamos o comportamento dessa integral quando b cresce indefinidamente.

Exemplo 2.10. Considere a função $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, definida para todo $t \geq 1$. Queremos analisar a integral imprópria

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

Calculamos a integral no intervalo $[1, b]$:

$$\begin{aligned} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{t}} dt &= \int_1^b t^{-1/2} dt \\ &= [2t^{1/2}]_1^b \\ &= 2\sqrt{b} - 2. \end{aligned}$$

Agora, tomamos o limite quando $b \rightarrow \infty$:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b} - 2) = \infty.$$

Assim, a integral imprópria

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

não possui limite finito.

Exemplo 2.11. Considere a função $f(t) = e^{-t}$, definida para todo $t \geq 1$. Vamos examinar a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} e^{-t} dt.$$

Calculamos a integral no intervalo $[1, b]$:

$$\begin{aligned} \int_1^b e^{-t} dt &= [-e^{-t}]_1^b \\ &= -e^{-b} + e^{-1}. \end{aligned}$$

Agora tomamos o limite quando $b \rightarrow \infty$:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1}.$$

Portanto, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} e^{-t} dt$$

tem valor finito e^{-1} .

2.3.3 Integral convergente e divergente

A integral imprópria, definida anteriormente, pode ou não ter um valor finito. Dizemos que a integral imprópria converge se o limite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$$

existe. Caso contrário, dizemos que a integral diverge.

A convergência indica que a área sob o gráfico de $f(t)$ no intervalo $[a, \infty)$ é finita, mesmo que o intervalo de integração seja ilimitado.

Exemplo 2.12. A seguir, apresentamos algumas integrais impróprias convergentes e divergentes.

Consideremos as seguintes integrais impróprias no intervalo $[1, \infty)$:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{e} \quad (b) \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx.$$

Caso (a): Temos uma integral convergente. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como o limite é finito, dizemos que a integral converge e seu valor é 1. Isso significa que a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, de 1 até o infinito, é finita.

Caso (b): Temos uma integral divergente. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.
\end{aligned}$$

Como o limite não é finito, a integral diverge. Logo, a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, \infty)$ é ilimitada.

Capítulo 3

Transformada de Laplace: um breve contexto histórico

Neste capítulo apresentamos um breve contexto histórico da construção da Transformada de Laplace (TL), com foco no seu processo de formação. A trajetória inicia-se com Leonhard Euler (1707-1783), a partir da análise da função exponencial, prossegue por diversos matemáticos como Lagrange, Laplace, Heaviside, Carson, Bromwich e culmina em Doetsch, que apresentou a TL na forma em que a conhecemos atualmente. A elaboração deste capítulo é baseada por [12]

Inicialmente, a Transformada de Laplace não era chamada dessa forma. Seu processo de desenvolvimento remonta a aproximadamente duzentos anos. O nome é uma homenagem ao marquês da corte de Napoleão Bonaparte, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) cujos trabalhos foram fundamentais para a formalização do método. Formalmente, a TL é definida pela seguinte equação:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

sendo $s = \sigma + i\omega$ uma variável complexa, e $\mathcal{L}\{\cdot\}$ o operador linear que representa a Transformada de Laplace, observa-se que a história da TL é marcada pela contribuição de diversos matemáticos. Conforme descrito anteriormente, seu desenvolvimento teve início com o suíço Leonhard Euler, que estudou integrais semelhantes à forma atual da Transformada de Laplace, como as apresentadas a seguir

$$y(u) = \int_a^b e^{K(u)Q(x)} P(x) dx. \quad (3.1)$$

Euler utilizava essa Transformada para resolver equações lineares de segunda ordem

com coeficientes variáveis, da forma:

$$L(u) \frac{d^2 y}{du^2} + M(u) \frac{dy}{du} N(u) y = R(u) e^{K(u)Q(u)}. \quad (3.2)$$

A aplicação da equação (3.2) em (3.1), permite encontrar a solução na forma da seguinte integral definida

$$y(x) = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V(u) du.$$

O resultado obtido é semelhante ao da Transformada de Laplace (TL), e essa semelhança se manifesta principalmente no termo exponencial. Ressalta-se que Euler não definiu formalmente a TL, mas foi pioneiro ao utilizar integrais exponenciais para resolver equações diferenciais, sendo possivelmente o primeiro a mostrar que essas integrais podem transformar um problema de natureza complexa em outro mais simples.

A partir dos trabalhos de Euler, Lagrange utilizou essas integrais no desenvolvimento de teoria das probabilidades. Essa abordagem influenciou Laplace a escrever diversos artigos sobre o tema, os quais culminaram na redação de sua obra *Théorie Analytique des probabilités*. Foi então, em 1779, que Laplace contribuiu para a consolidação da TL ao introduzir a notação da função geratriz de uma sequência, conforme apresentado a seguir:

$$u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} y^x t^x.$$

Para o caso em que y^x for definido para todo $x > 0$, a equação é transcrita como

$$u(t) = \int_0^{\infty} y^x t^x dx. \quad (3.3)$$

Essa formulação revela que, mesmo em sua época, Laplace já expressava a transformada de forma semelhante à utilizada atualmente. Reconhecida como Transformada de Mellin, a equação (3.3) ainda é utilizada para resolver certos tipos de equações diferenciais, por exemplo, as Equações de Euler-Cauchy, que aparecem em problemas de dinâmica dos fluidos e de eletricidade, definidas da seguinte forma:

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = f(x).$$

Por sua vez, Heaviside, no último quarto do século XIX, desenvolveu o cálculo operacional (3.4), em uma forma próxima da versão atual, incorporando a noção de operadores lineares. No entanto, sua formulação ainda não contemplava os conceitos de domínio da frequência e domínio do tempo. É importante destacar que Heaviside não introduziu ideias essencialmente novas para os matemáticos da época; sua verdadeira contribuição consistiu em mostrar a apli-

cabibilidade do cálculo operacional a problemas físicos de grande relevância. Em particular, destacou-se pelo chamado “ Teorema da Expansão”, que se assemelha ao que atualmente é conhecido como expansão em frações parciais de uma função racional.

$$\frac{1}{pZ(p)} = \int_0^{\infty} e^{-pt} A(t) dt. \quad (3.4)$$

O trabalho de Heaviside não possuía o rigor matemático necessário. Um de seus maiores admiradores, o engenheiro americano John Caeson, assumiu a responsabilidade de dar continuidade às suas ideias. Carson demonstrou que o cálculo operacional pode ser interpretado em termos da TL, conferindo-lhe fundamentação teórica e aplicabilidade prática na área da engenharia, e consolidando a TL como uma importante ferramenta matemática.

Todavia, o método apresentava dificuldades de aplicação, principalmente quando o resultado do problema não se encontrava na tabela de integrais elaborada por Carson. Entretanto, a limitação que comprometia o método já havia sido superado em 1916 pelo matemático britânico da Universidade de Cambridge, Thomas Jonh I’ Anson Bromwich (1875-1929), que interpretou o trabalho de Heaviside em termos de integrais complexas do “tipo Laplace”, usando a teoria das funções de variáveis complexa.

Por fim, a Transformada de Laplace passou a ser formalmente reconhecida na forma em que é utilizada atualmente, como a transformação da variável “ p ” para a variável “ s ”. Tal feito resultou dos esforços do matemático alemão Gustav Doetsch, que publicou, em 1937, seu livro “*Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*”, responsável por consolidar definitivamente os fundamentos teóricos da TL.

Capítulo 4

Introdução à Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace (TL) é essencialmente um método que serve como uma alternativa para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Trata-se de uma transformação integral que converte uma função do domínio do tempo em uma função do domínio da frequência complexa, onde o plano complexo, quando representado pela variável s , é denominado plano- s .

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados fundamentais relacionados à Transformada de Laplace. A elaboração deste capítulo está baseada nas referências [3, 5, 7, 9, 10, 11].

4.1 Formulação da Transformada de Laplace

Definição 4.1. Seja $f(t)$ uma função definida nos reais não negativos. A Transformada de Laplace de $f(t)$ é dada pela seguinte integral imprópria

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (4.1)$$

A TL $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de uma função $f(t)$ é uma função da variável s (complexa). A notação comumente utilizada é letra minúscula para a função e maiúscula para a transformada:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

A TL é, em sua essência, uma transformação análoga às operações de derivação e integração. Esses métodos de transformação auxiliam no entendimento do comportamento das funções. De forma ilustrativa, a TL leva a derivada de uma função em uma expressão algébrica envolvendo produtos da função original. Em outras palavras, ela transforma uma equação diferencial em outra equação dependente da função transformada.

Retomando a questão da estrutura da TL, analisando uma situação onde a função $f(t)$

definida para $t \geq 0$, a TL será representada por $F(s)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Como a integral imprópria possui intervalo de integração $[0, \infty[$, a TL será definida pelo limite

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t)e^{-st} dt,$$

caso o limite existir, essa integral imprópria será chamada convergente.

Com o objetivo de exemplificar o que foi apresentado, a seguir calcularemos a Transformada de Laplace de algumas funções.

Exemplo 4.2. Calculemos a transformada de Laplace de $f(t) = 1$.

Para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Considerando $u = -st$, $du = -s \cdot dt$, analisamos os limites de integração: se $t \rightarrow 0$, temos $u \rightarrow -s \cdot 0 = 0$, e, se $t \rightarrow A$, temos $u \rightarrow -s \cdot A$. Assim,

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} \int_0^{-sA} e^u du \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} (e^{-sA} - e^0) \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{-sA} + 1}{s} \right). \end{aligned}$$

Agora, analisando o termo e^{-sA} ,

$$\begin{aligned} e^{-sA} &= e^{-A(\alpha + \omega i)} = e^{-A\alpha - A\omega i} \\ &= e^{-A\alpha} e^{-A\omega i}. \end{aligned}$$

Observe que o termo $e^{-A\omega i}$ pode ser representado como

$$e^{-A\omega i} = \cos(A\omega) - i \sin(A\omega),$$

o que mostra que ele é sempre limitado, pois satisfaz $|e^{-A\omega i}| = 1$, independentemente de $A > 0$.

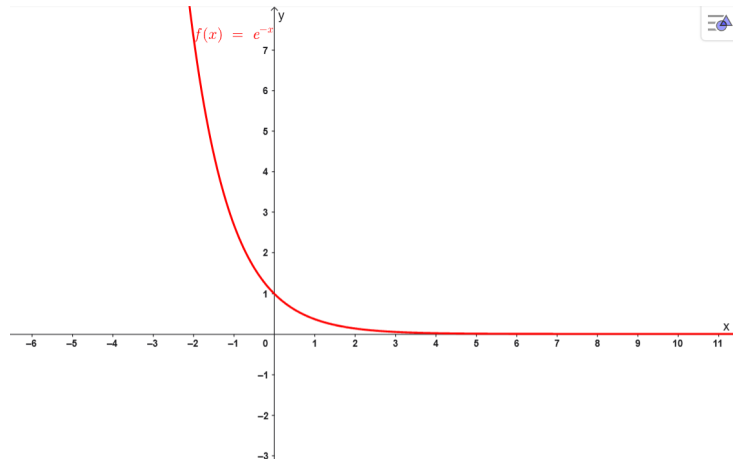
Entretanto, o termo $e^{-A\alpha}$ é quem realmente determina a convergência da expressão, por se tratar de uma função exponencial real. Considerando a seguinte figura, que ilustra o gráfico da função e^{-x} , observamos que:

- se $\alpha > 0$, então $e^{-A\alpha} \rightarrow 0$ quando $A \rightarrow \infty$; - se $\alpha = 0$, o termo permanece constante;

- se $\alpha < 0$, então $e^{-A\alpha} \rightarrow \infty$ quando $A \rightarrow \infty$.

Assim, a convergência não depende do termo complexo (que é apenas limitado), mas sim do comportamento do fator exponencial real $e^{-A\alpha}$.

Figura 4.1: Gráfico da função e^{-x} .



Fonte: Autoria própria (elaborado no software Geogebra).

Na Figura 4.1 observamos que, se $x \rightarrow \infty$, e^{-x} converge, e se $x \rightarrow -\infty$, e^{-x} diverge. Daqui, o expoente de $e^{-A\alpha}$ deve ser negativo para garantir a convergência,

$$-A\alpha < 0,$$

$$-\alpha < 0,$$

$$\alpha > 0.$$

Consequentemente, $\alpha = \Re\{s\} > 0$. Logo,

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{-sA} + 1}{s} \right) = \frac{0 + 1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Portanto, a TL para essa função de tempo contínuo $f(t) = 1$ é $F(s) = \frac{1}{s}$, com $s > 0$.

Exemplo 4.3. A Transformada de Laplace da função $f(t) = t$.

Para resolver a integral, utilizamos o método de integração por partes. Assim,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{t e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) dt \\ &= \left[-\frac{t e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

A notação $\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^\infty$ indica $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^a\right)$. Assim, a primeira parte do lado direito será 0 e a segunda será $\frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\}$. Logo,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

4.2 Condição de Existência da Transformada de Laplace

A integral que define a transformada de Laplace (TL) pode convergir ou divergir; caso a integral seja divergente, dizemos que a função não possui Transformada de Laplace. Por exemplo, a função $f(t) = e^{t^2}$ não possui a TL (ver Exemplo 4.7). Neste caso, consideraremos as funções que possuem um número finito de descontinuidades, isto é, funções contínuas por partes.

Teorema 4.4. *Se $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e de ordem exponencial¹, então existe um número $\alpha \geq 0$ tal que $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$ converge para todos os valores de $s > \alpha$.*

Demonstração: Sejam f e g funções integráveis no intervalo (a, b) , com $a < b \leq \infty$ e $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in (a, b)$. Então,

$$\int_a^\infty g(t)dt < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt < \infty.$$

Como $f(t)$ é de ordem exponencial, existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}.$$

Assim, Para verificar a existência da Transformada de Laplace, tomemos o módulo da integral:

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| |e^{-st}| dt.$$

Como $f(t)$ é de ordem exponencial, existe $C > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, para $s = \sigma + i\omega$ temos

$$|e^{-st}| = e^{-\sigma t},$$

¹Uma função $f(t)$ é chamada de função de ordem exponencial quando ela não cresce mais rápido do que uma exponencial. Em outras palavras, se existem constantes $M > 0$ e $\alpha > 0$ tais que, para todo $t \geq 0$, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

pois o termo complexo $e^{-i\omega t}$ é sempre limitado com módulo igual a 1.

Substituindo as estimativas acima, obtemos:

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \leq \int_0^{\infty} C e^{\alpha t} e^{-\sigma t} dt = C \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} dt.$$

Agora, a integral converge se, e somente se, $\sigma - \alpha > 0$, isto é,

$$\sigma = \operatorname{Re}(s) > \alpha.$$

Nesse caso,

$$\int_0^{\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} dt = \frac{1}{\sigma - \alpha},$$

e, portanto,

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \leq \frac{C}{\sigma - \alpha} < \infty, \quad \forall s \text{ com } \operatorname{Re}(s) > \alpha.$$

Assim, a Transformada de Laplace de $f(t)$ existe para todos os valores de s cuja parte real é maior do que α . \square

O Teorema 4.4 apresenta condições suficientes para a existência da TL de uma função f , porém, elas não são necessárias. Por exemplo, a função $f(t) = \ln(t)$ não é limitada quando $t \rightarrow 0^+$, não é contínua na origem, mas admite uma TL.

Exemplo 4.5. Considere a função:

$$f(t) = \ln(t)$$

Aplicando a TL

$$\mathcal{L}\{\ln(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \ln(t) dt$$

Para calcular, utilizamos integração por partes, com:

$$u = \ln(t) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{t} dt$$

$$dv = e^{-st} dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln(t) dt = -\frac{\ln(t)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt.$$

O primeiro termo tende a zero, pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) e^{-st} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) e^{-st} = 0,$$

para $s > 0$. Assim,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln(t) dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $u = st$:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln(t) dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-u} \ln\left(\frac{u}{s}\right) du = \frac{1}{s} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} \ln(u) du - \ln(s) \int_0^{\infty} e^{-u} du \right).$$

Como

$$\int_0^{\infty} e^{-u} du = 1,$$

e a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \ln(u) du = -\gamma \quad (\text{constante de Euler-Mascheroni}),$$

obtemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln(t) dt = \frac{1}{s} (-\gamma - \ln(s)) = -\frac{\gamma + \ln(s)}{s}.$$

Portanto, a Transformada de Laplace da função logaritmo natural é:

$$\mathcal{L}\{\ln(t)\} = -\frac{\gamma + \ln(s)}{s}.$$

A seguir, apresentamos uma propriedade para a TL de funções limitadas.

Teorema 4.6. (*Comportamento no infinito*) Se a transformada de Laplace de uma função limitada $f(t)$ existe, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Demonstração: A partir de,

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Fazendo $u = st$, temos

$$F(s) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{s}\right) e^{-u} du.$$

Como f é limitada, existe M tal que $|f(t)| < M$. Logo

$$|F(s)| \leq \frac{M}{s} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{M}{s}.$$

Quando $s \rightarrow \infty$, o que implica que $|F(s)| \rightarrow 0$. Daqui,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

Exemplo 4.7. Agora, analisamos uma função que não possui Transformada de Laplace, consideremos a função:

$$f(t) = e^{t^2}.$$

Para que uma função possua a TL, é necessário que a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

converja

Substituindo $f(t) = e^{t^2}$, temos

$$\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{t^2-st} dt.$$

Como o termo t^2 cresce mais rapidamente que o termo linear st , temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2-st} \rightarrow e^{\infty} \rightarrow \infty.$$

Logo, o integrando tende a infinito, e a integral

$$\int_0^{\infty} e^{t^2-st} dt$$

é divergente.

Portanto, a função $f(t) = e^{t^2}$ não possui TL.

4.3 Transformada Inversa de Laplace

Definição 4.8. Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ é a Transformada de Laplace de $f(t)$, então dizemos que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ é a Transformada inversa de Laplace da função $F(s)$.

Exemplo 4.9. Consideremos a função no domínio de Laplace:

$$F(s) = \frac{1}{s + \lambda}.$$

A transformada inversa de Laplace da função $F(s)$ é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \lambda}\right\} = e^{-\lambda t}.$$

Pois sabemos que

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)t} dt = \frac{1}{s + \lambda}.$$

Portanto, a transformada inversa confirma o resultado.

A definição da Transformada Inversa de Laplace fundamenta-se no fato de que a Transformada de Laplace é bijetora no conjunto de funções para as quais está definida, conforme apresentado em [11]. Assim, cada função $f(t)$ admite uma única transformada $F(s)$ e, reciprocamente, cada $F(s)$ corresponde a uma única função original.

Notemos que duas funções iguais a partir de $t = 0$ possuem a mesma TL; entretanto, se duas transformadas forem iguais para $s > s_0$, por exemplo, $F(s) = G(s)$, então

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt.$$

Logo,

$$\int_0^{\infty} (f(t) - g(t))e^{-st} dt = 0,$$

para cada $s > s_0$. O fato de essa integral ser nula não implica necessariamente que $f(t) - g(t) = 0$. Por exemplo, consideremos a função

$$m(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3, \\ 1, & t = 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

Notemos que essa função não é nula mas a integral

$$\int_0^{\infty} m(t)e^{-st} dt = 0, \forall s > s_0.$$

Dizemos que duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são iguais quase-sempre em $[a, b]$ se

$$\int_a^b |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0.$$

Por essa razão, se duas transformadas de Laplace são iguais, as respectivas inversas são iguais quase-sempre. Isso garante que a Transformada Inversa de Laplace esteja bem definida e matematicamente consolidada, mesmo que não apresentemos uma fórmula integral fechada para sua expressão geral.

4.4 Linearidade da Transformada de Laplace e Transformada de Laplace da Derivada de uma Função

Começamos estudando a propriedade de linearidade da Transformada de Laplace por meio do seguinte teorema.

Teorema 4.10. *A transformada de Laplace é uma operação linear; ou seja, para funções $f(t)$ e $g(t)$ quaisquer cujas transformadas existem, e para constantes a e b quaisquer, a transformada de Laplace de*

$$af(t) + bg(t)$$

existe, e

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Demonstração: Detalhando a propriedade de linearidade da Transformada de Laplace:

A Transformada de Laplace de uma combinação linear de funções pode ser calculada passo a passo:

Primeiro, aplicamos a definição da Transformada de Laplace à combinação linear:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-st} dt.$$

Em seguida, como as funções $f(t)$ e $g(t)$ possuem transformada de Laplace, distribuímos a integral sobre a soma:

$$\int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \alpha f(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \beta g(t)e^{-st} dt.$$

Depois, extraímos as constantes da integral:

$$\int_0^{\infty} \alpha f(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \beta g(t)e^{-st} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt.$$

Finalmente, reconhecemos as transformadas individuais:

$$\alpha \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

□

Aplicando a linearidade, podemos determinar TL das função cosseno e seno.

Exemplo 4.11. Determinemos a transformada de Laplace das funções $\cos(vt)$ e $\sin(vt)$, considerando que

$$e^{ivt} = \cos(vt) + i \sin(vt).$$

Como a TL é linear,

$$\mathcal{L}\{e^{ivt}\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(vt)\}(s) + i \mathcal{L}\{\sin(vt)\}(s).$$

Calculamos a TL de e^{ivt}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{ivt}\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{ivt} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-iv)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-iv)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-iv)t}}{-(s-iv)} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-iv)T} - 1}{-(s-iv)} \right) \\ &= \frac{0 - 1}{-(s-iv)} \quad (\text{pois } \operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow e^{-(s-iv)T} \rightarrow 0) \\ &= \frac{1}{s-iv}. \end{aligned}$$

Reescrevendo o resultado, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-iv} &= \frac{1}{s-iv} \cdot \frac{s+iv}{s+iv} \\ &= \frac{s+iv}{s^2+v^2} \\ &= \frac{s}{s^2+v^2} + i \frac{v}{s^2+v^2}. \end{aligned}$$

Comparando as partes real e imaginária, temos

$$\mathcal{L}\{\cos(vt)\}(s) = \frac{s}{s^2+v^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(vt)\}(s) = \frac{v}{s^2+v^2}.$$

Essas fórmulas são válidas para $\operatorname{Re}(s) > 0$, garantindo a convergência da integral imprópria.

A propriedade da Transformada de Laplace da derivada de uma função é expressa pelo seguinte teorema.

Teorema 4.12. *Se $f(t)$ é contínua e de ordem exponencial, e $f'(t)$ é contínua por partes para $t \geq 0$, então*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Demonstração:

Começamos com a definição da Transformada de Laplace aplicada à derivada $f'(t)$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt.$$

Aplicamos a integração por partes, escolhendo $u = f(t)$ e $dv = e^{-st} dt$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{dt}(e^{-st}) dt.$$

Calculamos a derivada de e^{-st} e simplificamos

$$[e^{-st} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st}) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Avaliando o limite no infinito e em zero, e reconhecendo a Transformada de $f(t)$, obtemos

$$(0 - f(0)) + s \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

□

Aplicando o teorema da Transformada da derivada na seguinte situação, temos:

Exemplo 4.13. Calculemos a Transformada de Laplace de $f(t) = \cos(t)$ usando o Teorema 4.12.

Notemos que a função $\cos(t)$ é de ordem exponencial pois $|\cos(t)| \leq 1 = 1 \cdot e^{0t}$.

Calculemos as derivadas:

$$f(t) = \cos(t),$$

$$f'(t) = -\text{sen}(t),$$

$$f''(t) = -f(t) = -\cos(t).$$

Aplicando a Transformada de Laplace e usando a propriedade descrita pelo Teorema 4.12, temos

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) = -F(s).$$

Sabemos que $f(0) = \cos(0) = 1$ e $f'(0) = -\text{sen}(0) = 0$. Substituindo esses valores,

obtemos

$$s^2 F(s) - s = -F(s).$$

Isolando $F(s)$:

$$s^2 F(s) + F(s) = s \Rightarrow F(s)(s^2 + 1) = s \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

4.5 Aplicação da Transformada de Laplace às Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Nesta seção, pretendemos ver como a transformada de Laplace é usada em Equações Diferenciais Ordinárias. Primeiro, vamos tentar encontrar a transformada de Laplace de uma função que seja uma derivada.

Suponha que $\mathcal{L}\{g(t)\}$ exista e, além disso, que $g'(t)$ seja uma função diferenciável de ordem exponencial. Segue do Teorema 4.12,

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} g'(t) dt = [e^{-st} g(t)]_0^{\infty} + s \mathcal{L}\{g(t)\} = -g(0) + s \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Repetimos esse procedimento para derivadas de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g''(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} g''(t) dt \\ &= [e^{-st} g'(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} g'(t) dt \\ &= -g'(0) + s(-g(0) + s \mathcal{L}\{g(t)\}) \\ &= -g'(0) - sg(0) + s^2 \mathcal{L}\{g(t)\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{g''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{g(t)\} - sg(0) - g'(0).$$

O procedimento também funciona para funções contínuas por partes e cuja derivada também é contínua por partes. O fato de a função ser de ordem exponencial é usado para garantir que os limites acima existam.

Exemplo de aplicação da TL em uma EDO difícil de resolver por métodos tradicionais. A Transformada de Laplace também se mostra extremamente útil em EDOs cujo termo

não homogêneo impede o uso direto de técnicas clássicas, como o método dos coeficientes indeterminados. Por exemplo, considere a EDO

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = e^t \frac{1}{t^2 + 1},$$

com condições iniciais

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

O termo não homogêneo

$$e^t \cdot \frac{1}{t^2 + 1},$$

não é do tipo polinomial, exponencial simples, ou senoidal padrão. Portanto, o método dos coeficientes indeterminados não pode ser aplicado, e mesmo a variação de parâmetros exige integrais de difícil tratamento analítico.

Nesse tipo de situação, a Transformada de Laplace se torna uma alternativa natural e eficiente: basta transformar ambos os lados da equação, resolver a expressão algébrica obtida para $\mathcal{L}\{y(t)\}$ e, em seguida, aplicar a transformada inversa. A TL permite resolver o problema sem integrar diretamente expressões complicadas como $e^t/(t^2+1)$, o que evidencia sua utilidade prática em EDOs cujo termo forçante é mais complexo que os casos usuais.

4.6 Resolução Matricial do Sistema no Domínio de Laplace

Agora, nesta seção, trata-se da forma que organizamos e escrevemos um sistema após a aplicação da Transformada de Laplace (TL) às Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de segunda ordem que compõem um sistema com duas equações.

Após a aplicação da TL, obtemos um sistema algébrico linear em termos das incógnitas $X_1(s)$ e $X_2(s)$. Essas expressões possuem a forma geral:

$$a_{11}(s)X_1(s) + a_{12}(s)X_2(s) = b_1(s),$$

$$a_{21}(s)X_1(s) + a_{22}(s)X_2(s) = b_2(s),$$

os coeficientes $a_{ij}(s)$ dependem dos parâmetros da variável complexa s . Esse formato mostra que a TL converteu o sistema de EDOs em um sistema linear de equações algébricas.

Com o objetivo de simplificar a notação e destacar a estrutura do sistema, escrevemos o conjunto de equações na forma matricial:

$$A(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}, \quad b(s) = \begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema pode ser escrito de maneira compacta como

$$A(s) X(s) = b(s).$$

Esse formato reduz o trabalho algébrico, já que evita a manipulação individual de cada equação e destaca o papel do determinante da matriz $A(s)$ na existência da solução. Para resolver o sistema, emprega-se a regra de Cramer que expressa cada incógnita como a razão entre dois determinantes. Seja

$$D(s) = \det A(s),$$

o determinante principal da matriz. Para cada variável $X_i(s)$, define-se o determinante auxiliar $D_i(s)$, obtido substituindo a coluna i de $A(s)$ pelo vetor $b(s)$. Assim, a solução é dada por

$$X_i(s) = \frac{D_i(s)}{D(s)}, \quad i = 1, 2.$$

Desse modo, obtemos expressões explícitas para $X_1(s)$ e $X_2(s)$, permitindo a etapa final de decomposição em frações parciais e posterior aplicação da transformada inversa de Laplace, necessária para determinar as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias original.

Essa estratégia de solução para um sistema de EDOs mostra-se particularmente importante, pois será utilizada no Capítulo 6 para determinar a solução do sistema de equações que descreve o movimento das massas no sistema massa - mola acoplado.

Capítulo 5

Aplicação da Transformada de Laplace na Dosagem de Medicamentos

Este capítulo tem como objetivo demonstrar como a Transformada de Laplace (TL) pode ser aplicada em uma situação real, especificamente no cálculo da dosagem de um medicamento. Mostraremos como a TL é utilizada para resolver sistemas de equações diferenciais, presentes na área da farmacologia. Este capítulo tem como principal referência o artigo [8].

A administração correta da dosagem de um medicamento foi um marco na área da medicina e da farmacologia, pois uma dosagem inferior à necessária é insuficiente para o tratamento, enquanto uma dosagem excessiva pode ser fatal para o paciente.

O corpo humano não é homogêneo e o medicamento não é absorvido de maneira uniforme, alguns órgãos e tecidos recebem o medicamento rapidamente, enquanto outras partes necessitam de mais tempo para absorvê-lo. Além disso, o organismo elimina o medicamento de forma constante, em taxa proporcional à sua concentração, o que torna possível modelar matematicamente esse processo. O problema fundamental pode ser formulado da seguinte maneira: dado um medicamento administrado em determinada dose, como podemos prever a concentração do fármaco nos diferentes sistemas corporais ao longo do tempo?

O comportamento da concentração do fármaco nos dois sistemas corporais (central e periférico) pode ser descrito pelo seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = -(k_{12} + k_e) C_1(t) + k_{21} \frac{V_2}{V_1} C_2(t), \\ \frac{dC_2}{dt} = k_{12} \frac{V_1}{V_2} C_1(t) - k_{21} C_2(t), \end{cases}$$

com as condições iniciais:

$$C_1(0) = C_0, \quad C_2(0) = 0.$$

A seguir, descrevemos os parâmetros que definem esse sistema de equações:

1. As constantes k_{12} , k_{21} e k_e representam as taxas de transferência do medicamento entre as diferentes regiões do corpo (ou compartimentos) e a taxa de eliminação do fármaco pelo organismo. Todas possuem unidade de medida em horas⁻¹ (h^{-1}), pois indicam a fração da substância que é transferida ou eliminada por unidade de tempo.
2. As variáveis dependentes são: $C_1(t)$ que representa a concentração do fármaco no sistema corporal central (sangue e órgãos bem perfundidos), $C_2(t)$ a concentração no sistema corporal periférico (tecidos de distribuição lenta).
3. V_1 e V_2 representam os volumes do sistema corporal central e periférico, em litros (L). Para fins didáticos assumiremos a razão $\frac{V_2}{V_1} = 1$

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = -(k_{12} + k_e) C_1(t) + k_{21} \rho C_2(t), \\ \frac{dC_2}{dt} = k_{12} \frac{1}{\rho} C_1(t) - k_{21} C_2(t), \end{cases}$$

onde $\rho = \frac{V_2}{V_1}$ é a razão volumétrica entre os compartimentos.

Na primeira equação:

$$\frac{dC_1}{dt} = -(k_{12} + k_e)C_1(t) + k_{21}\rho C_2(t),$$

aplicamos a TL e obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dC_1}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{-(k_{12} + k_e)C_1(t)\} + \mathcal{L}\{k_{21}\rho C_2(t)\}, \\ sC_1(s) - C_1(0) &= -(k_{12} + k_e)C_1(s) + k_{21}\rho C_2(s), \end{aligned}$$

onde $C_1(s)$ e $C_2(s)$ são as transformada de Laplace de $C_1(t)$ e $C_2(t)$, respectivamente. Substituindo $C_1(0) = C_0$, temos

$$sC_1(s) - C_0 = -(k_{12} + k_e)C_1(s) + k_{21}\rho C_2(s),$$

$$(s + k_{12} + k_e)C_1(s) - k_{21}\rho C_2(s) = C_0. \quad (5.1)$$

Agora, na segunda equação:

$$\frac{dC_2}{dt} = k_{12} \cdot \frac{1}{\rho} C_1(t) - k_{21} C_2(t),$$

aplicamos a TL e obtemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dC_2}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{k_{12} \cdot \frac{1}{\rho} C_1(t)\right\} - \mathcal{L}\{k_{21} C_2(t)\},$$

$$sC_2(s) - C_2(0) = k_{12} \cdot \frac{1}{\rho} C_1(s) - k_{21} C_2(s).$$

Substituindo $C_2(0) = 0$

$$sC_2(s) = \frac{k_{12}}{\rho} C_1(s) - k_{21} C_2(s),$$

$$\frac{-k_{12}}{\rho} C_1(s) + (s + k_{21}) C_2(s) = 0.$$

Isolando $C_2(s)$, obtemos

$$(s + k_{21}) C_2(s) = \frac{k_{12}}{\rho} C_1(s),$$

$$C_2(s) = \frac{\frac{k_{12}}{\rho} C_1(s)}{(s + k_{21})}. \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1),

$$(s + k_{12} + k_e) C_1(s) - k_{21} \left(\frac{k_{12} C_1(s)}{s + k_{21}} \right) = C_0,$$

$$C_1(s) \left[(s + k_{12} + k_e) - \frac{k_{21} k_{12}}{s + k_{21}} \right] = C_0.$$

$$C_1(s) = \frac{C_0}{(s + k_{12} + k_e) - \frac{k_{21} k_{12}}{s + k_{21}}}. \quad (5.3)$$

Simplificando o denominador do segundo membro, obtemos uma fração cujo numerador é dado por:

$$(s + k_{12} + k_e)(s + k_{21}) - k_{12} k_{21} = s^2 + s(k_{12} + k_{21} + k_e) + k_{21} k_e.$$

Portanto,

$$C_1(s) = \frac{C_0(s + k_{21})}{s^2 + s(k_{12} + k_{21} + k_e) + k_{21} k_e}. \quad (5.4)$$

Agora, calculamos os zeros do denominador, que é um polinômio quadrático:

$$s^2 + s(k_{12} + k_{21} + k_e) + k_{21} k_e,$$

chamemos

$$a = k_{12} + k_{21} + k_e, \quad b = k_{21}k_e,$$

logo, esse polinômio quadrático será denotado por

$$s^2 + as + b.$$

Para tornar o conceito mais concreto, consideremos os parâmetros do artigo [8]:

$$k_{12} = 0,10 \text{ h}^{-1}, \quad k_{21} = 0,05 \text{ h}^{-1}, \quad k_e = 0,02 \text{ h}^{-1}.$$

Desse modo,

$$a = 0,10 + 0,05 + 0,02 = 0,17$$

e

$$b = 0,05 \cdot 0,02 = 0,001.$$

Assim, as raízes do denominador são

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Sendo,

$$a^2 - 4b = 0,0289 - 0,004 = 0,0249.$$

$$\sqrt{0,0249} \approx 0,157797.$$

Logo,

$$\lambda_1 = \frac{0,17 + 0,157797}{2} \approx 0,1638987$$

e

$$\lambda_2 = \frac{0,17 - 0,157797}{2} \approx 0,0061013.$$

Para encontrarmos os coeficientes da solução no tempo, faremos uso da decomposição em frações parciais:

$$C_1(s) = \frac{C_0(s + k_{21})}{s^2 + s(k_{12} + k_{21} + k_e) + k_{21}k_e} = C_0 \frac{s + k_{21}}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} = \frac{A}{s + \lambda_1} + \frac{B}{s + \lambda_2}. \quad (5.5)$$

Multiplicando pelo denominador, obtemos

$$C_0(s + k_{21}) = A(s + \lambda_2) + B(s + \lambda_1).$$

Cálculo de A :

$$\text{Se } s = -\lambda_1 \Rightarrow C_0(-\lambda_1 + k_{21}) = A(-\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow A = C_0 \frac{-\lambda_1 + k_{21}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Calculando,

$$A_1 = \frac{-\lambda_1 + k_{21}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-0,1638987 + 0,05}{0,0061013 - 0,1638987} \approx 0,722.$$

Considerando os parâmetros do artigo [8], multiplicamos por $C_0 = 100 \text{ mg/L}$, e obtemos o coeficiente

$$A = A_1 \cdot C_0 \approx 72,18 \text{ mg/L}.$$

Cálculo de B :

$$\text{Se } s = -\lambda_2 \Rightarrow C_0(-\lambda_2 + k_{21}) = B(-\lambda_2 + \lambda_1) \Rightarrow B = C_0 \frac{-\lambda_2 + k_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Calculando,

$$B_1 = \frac{-\lambda_2 + k_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-0,0061013 + 0,05}{0,1638987 - 0,0061013} \approx 0,278.$$

Multiplicando por $C_0 = 100 \text{ mg/L}$, e obtemos o coeficiente

$$B = B_1 \cdot C_0 \approx 27,82 \text{ mg/L}.$$

Considerando (5.5), aplicamos a transformada inversa de Laplace, e encontramos a concentração do medicamento no sistema corporal central

$$C_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s + \lambda_1} + \frac{B}{s + \lambda_2} \right\}.$$

Usando a propriedade da transformada inversa: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda} \right\} = e^{-\lambda t}$,

$$C_1(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}.$$

Desse modo,

$$C_1(t) = 72,18 e^{-\lambda_1 t} + 27,82 e^{-\lambda_2 t}. \quad (5.6)$$

Para encontrar $C_2(s)$, substituímos (5.3) em (5.2), e obtemos

$$\begin{aligned}
 C_2(s) &= \frac{k_{12}}{\rho} \cdot \frac{\frac{C_0}{(s+k_{12}+k_e)} \frac{k_{21}k_{12}}{s+k_{21}}}{s+k_{21}} \\
 &= \frac{k_{12}}{\rho} \cdot \frac{C_0(s+k_{21})}{(s+k_{12}+k_e)(s+k_{21}) - k_{12}k_{21}} \\
 &= \frac{k_{12}}{\rho} \cdot \frac{C_0(s+k_{21})}{(s+k_{21}) [(s+k_{12}+k_e)(s+k_{21}) - k_{12}k_{21}]} \\
 &= \frac{k_{12}}{\rho} \cdot \frac{C_0}{(s+k_{12}+k_e)(s+k_{21}) - k_{12}k_{21}}.
 \end{aligned}$$

Usando $\rho = 1$, temos

$$C_2(s) = \frac{k_{12}C_0}{s^2 + s(k_{12} + k_{21} + k_e) + k_{21}k_e}.$$

Novamente, consideremos os parâmetros do artigo [8]:

$$k_{12} = 0,10, \quad k_{21} = 0,05, \quad k_e = 0,02, \quad C_0 = 100.$$

Substituindo os valores numéricos,

$$C_2(s) = \frac{0,10 \cdot 100}{s^2 + s(0,10 + 0,05 + 0,02) + 0,05 \cdot 0,02} = \frac{10}{s^2 + 0,17s + 0,001}.$$

Como vimos anteriormente, as raízes do polinômio quadrático que aparece no denominador de $C_2(s)$ (independentemente da ordem em que são apresentadas) são

$$\lambda_1 = \frac{0,17 - 0,1578}{2} = \frac{0,0122}{2} = 0,0061$$

e

$$\lambda_2 = \frac{0,17 + 0,1578}{2} = \frac{0,3278}{2} = 0,1639.$$

Utilizando frações parciais, decompomos

$$C_2(s) = \frac{A}{s + \lambda_1} + \frac{B}{s + \lambda_2}.$$

Sabendo que a nossa expressão original se torna

$$C_2(s) = \frac{10}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)},$$

igualamos

$$\frac{10}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} = \frac{A}{s + \lambda_1} + \frac{B}{s + \lambda_2}.$$

Para eliminar os denominadores, multiplicamos essa equação por $(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)$:

$$10 = A(s + \lambda_2) + B(s + \lambda_1),$$

$$10 = (A + B)s + (A\lambda_2 + B\lambda_1).$$

Daqui, o coeficiente de s deve ser zero (pois não há s à esquerda) e o termo constante deve ser igual a 10. Logo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A\lambda_2 + B\lambda_1 = 10. \end{cases}$$

Da primeira equação, concluímos que

$$B = -A.$$

Substituímos esse valor na segunda equação, e obtemos

$$A\lambda_2 - A\lambda_1 = 10.$$

$$A(\lambda_2 - \lambda_1) = 10.$$

Chamemos

$$\lambda_2 - \lambda_1 = V.$$

Daqui,

$$A = \frac{10}{V}.$$

Como no modelo farmacocinético típico, o termo 10 pode ser escrito como $k_{12}C_0$, temos

$$10 = k_{12}C_0,$$

e assim,

$$A = \frac{k_{12}C_0}{V}.$$

Finalmente,

$$A = \frac{0,10 \cdot 100}{0,1578} = \frac{10}{0,1578} = 63,39,$$

$$B = -A = -63,39.$$

Logo,

$$C_2(s) = 63,39 \left(\frac{1}{s + \lambda_1} - \frac{1}{s + \lambda_2} \right).$$

Aplicando a Transformada inversa de Laplace a ambos os lados dessa igualdade, e considerando que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \lambda_i} \right\} = e^{-\lambda_i t},$$

obtemos

$$C_2(t) = 63,39 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Substituindo os valores de λ_1 e λ_2 :

$$C_2(t) = 63,39 (e^{-0,0061t} - e^{-0,1639t}). \quad (5.7)$$

A equação $C_1(t)$ mostra um decaimento proporcional, confirmando como o sistema corporal central elimina o medicamento e, $C_2(t)$ mostra uma distribuição lenta e a concentração do medicamento no sistema corporal periférico.

Exemplo 5.1. Como ilustração, calculemos a concentração do fármaco no sistema corporal central e periférico, $C_1(t)$ e $C_2(t)$, respectivamente, para o tempo de $t = 3$ horas.

Cálculo de $C_1(3)$

Lembremos que estamos usando os seguintes dados:

$$k_{12} = 0,10 \text{ h}^{-1}, \quad k_{21} = 0,05 \text{ h}^{-1}, \quad k_e = 0,02 \text{ h}^{-1}, \quad C_0 = 100 \text{ mg/L}.$$

Segue de (5.6) que a concentração do fármaco no sistema corporal central está definida por

$$C_1(t) = 72,18 e^{-\lambda_1 t} + 27,82 e^{-\lambda_2 t}.$$

Agora, calculamos para $t = 3$ horas:

$$e^{-\lambda_1 \cdot 3} = e^{-0,1638985 \times 3} = e^{-0,4916955} \approx 0,61159$$

$$e^{-\lambda_2 \cdot 3} = e^{-0,0061015 \times 3} = e^{-0,0183045} \approx 0,98186$$

$$C_1(3) = 72,18 \times 0,61159 + 27,82 \times 0,98186$$

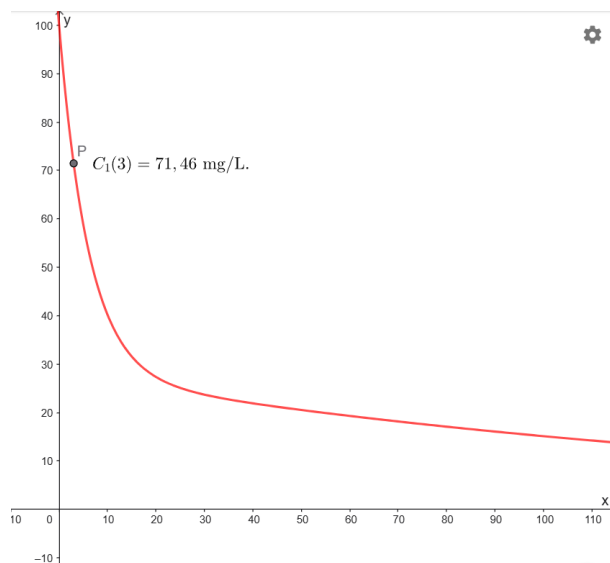
$$C_1(3) = 44,12 + 27,34 = 71,46 \text{ mg/L}.$$

$$\boxed{C_1(3) \approx 71,46 \text{ mg/L.}}$$

Esse resultado mostra que, em 3 horas, a concentração do medicamento no sistema corporal central é aproximadamente $C_1(3) \approx 71,46 \text{ mg/L}$, mostrando o processo de eliminação

do medicamento.

Figura 5.1: Concentração do medicamento no sistema corporal central em 3 horas.



Fonte: Autoria própria (elaborado no software Geogebra).

Aplicando a função $C_1(t)$ no Geogebra obtemos $C_1(3) \approx 71,46$ mg/L.

Cálculo de $C_2(3)$

Segue de (5.7) que a concentração do fármaco no sistema corporal periférico está definida por

$$C_2(t) = 63,39 (e^{-0,0061t} - e^{-0,1639t}).$$

Substituindo $t = 3$, temos

$$C_2(3) = 63,39 (e^{-0,0061 \cdot 3} - e^{-0,1639 \cdot 3}).$$

Logo,

$$C_2(3) = 63,39 (e^{-0,0183} - e^{-0,4917}).$$

Considerando que

$$e^{-0,0183} \approx 0,98188, \quad e^{-0,4917} \approx 0,61163.$$

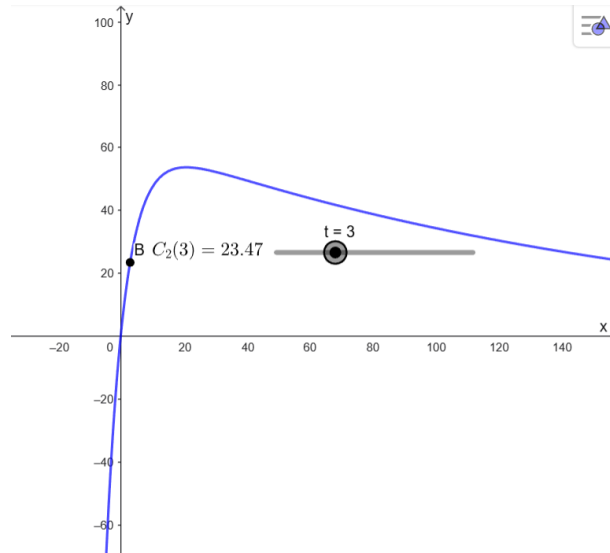
Podemos concluir,

$$C_2(3) = 63,39(0,98188 - 0,61163),$$

$$C_2(3) = 63,39 \cdot 0,37025,$$

$$C_2(3) \approx 23,47\text{mg/L.}$$

Figura 5.2: Concentração do medicamento no sistema periférico em 3 horas.



Fonte: Autoria Própria (elaborado no software Geogebra).

O exemplo mostra que, no sistema periférico, a concentração do medicamento é aproximadamente $C_2(3) \approx 23,47 \text{ mg/L}$, mostrando a absorção do medicamento.

Capítulo 6

Aplicação da Transformada de Laplace no Caso Massa - Mola

Neste capítulo será apresentada outra aplicação envolvendo a Transformada de Laplace (TL). Nosso objetivo será determinar o movimento de duas massas, m_1 e m_2 ligadas por molas com constantes elásticas conhecidas. As massas encontram-se sobre uma superfície sem atrito, conectadas conforme o esquema tradicional de massas acopladas.

Nessa situação, observa-se que os movimentos das duas massas variam com o tempo. O objetivo desta aplicação é determinar as equações que descrevem os movimentos dessas massas e analisar a influência da conexão entre elas. Para simplificar o estudo, considera-se um sistema ideal, ou seja, sem a presença de atrito ou outras forças dissipativas. Este capítulo é baseado na referência [2].

As equações de movimento para o sistema massa mola acoplado são dadas por:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 (x_2 - x_1). \end{cases}$$

Observemos que:

- As massas m_1 e m_2 estão conectadas por molas lineares com constantes elásticas k_1 e k_2 .
- O sistema encontra-se sobre uma superfície perfeitamente lisa, isto é, sem atrito.
- $x_1(t)$ e $x_2(t)$ representam os deslocamentos das massas m_1 e m_2 em relação à posição de equilíbrio.
- As condições iniciais são:

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \quad \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

- Os parâmetros numéricos utilizados são:

$$m_1 = 3 \text{ kg}, \quad m_2 = 2 \text{ kg}, \quad k_1 = 6 \text{ N/m}, \quad k_2 = 4 \text{ N/m}.$$

Substituindo esses valores, obtemos

$$\begin{cases} 3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -6x_1 + 4(x_2 - x_1), \\ 2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -4(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace da derivada de uma função, para determinar a transformada de Laplace da segunda derivada de $x(t)$, temos

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\} = s^2 X(s) - s x(0) - \frac{dx}{dt}(0). \quad (6.1)$$

onde $X(s) = \mathcal{L}x(t)$.

Considerando essa transformada de Laplace, a primeira equação do sistema e as condições iniciais, obtemos

$$3(s^2 X_1 - 2s) + 10X_1 - 4X_2 = 0,$$

onde $X_1(s) = \mathcal{L}x_1(t)$ e $X_2(s) = \mathcal{L}x_2(t)$. Assim,

$$(3s^2 + 10)X_1 - 4X_2 = 6s.$$

Agora, considerando (6.1), a segunda equação do sistema e as condições iniciais, temos

$$-4X_1 + 2(s^2 X_2 - s) + 4X_2 = 0,$$

$$-4X_1 + (2s^2 + 4)X_2 = 2s.$$

Escrevendo essas equações na forma matricial: $A(s)X(s) = b(s)$

$$\begin{bmatrix} 3s^2 + 10 & -4 \\ -4 & 2s^2 + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6s \\ 2s \end{bmatrix}.$$

Para calcular $X_1(s)$ e $X_2(s)$ utilizaremos a Regra de Cramer. Para esse fim, calculamos primeiro o determinante da matriz $A(s)$

$$\begin{aligned} D(s) &= (3s^2 + 10)(2s^2 + 4) - 16 \\ &= 6s^4 + 32s^2 + 24. \end{aligned}$$

Agora, calculamos o determinante da matriz obtida de substituir a primeira coluna de $A(s)$ pelo vetor $b(s)$

$$\begin{aligned} D_1(s) &= \det \begin{bmatrix} 6s & -4 \\ 2s & 2s^2 + 4 \end{bmatrix} \\ &= 12s^3 + 32s. \end{aligned}$$

Por outro lado, calculamos o determinante da matriz obtida de substituir a segunda coluna de $A(s)$ pelo vetor $b(s)$

$$\begin{aligned} D_2(s) &= \det \begin{bmatrix} 3s^2 + 10 & 6s \\ -4 & 2s \end{bmatrix} \\ &= 6s^3 + 44s. \end{aligned}$$

Assim, pela Regra de Cramer, temos

$$X_1(s) = \frac{12s^3 + 32s}{6s^4 + 32s^2 + 24}, \quad X_2(s) = \frac{6s^3 + 44s}{6s^4 + 32s^2 + 24}.$$

Com a finalidade de decompor $X_1(s)$ e $X_2(s)$ em frações parciais, primeiro fatoramos o denominador:

$$D(s) = 6s^4 + 32s^2 + 24,$$

colocando 6 em evidência obtemos um polinômio em potências pares ou biquadrado

$$\begin{aligned} D(s) &= 6\left(s^4 + \frac{32}{6}s^2 + 4\right), \\ &= 6\left(s^4 + \frac{16}{3}s^2 + 4\right). \end{aligned}$$

Para fatorar esse biquadrado é conveniente fazer a substituição $u = s^2$. Assim, o polinômio interior passa a ser uma quadrática em u ,

$$s^4 + \frac{16}{3}s^2 + 4 \longrightarrow u^2 + \frac{16}{3}u + 4.$$

As raízes dessa quadrática em u são obtidas pela Fórmula Quadrática (ou Fórmula de

Bhaskara). Primeiro, calculamos o discriminante

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= \frac{256}{9} - 16 \\ &= \frac{256-144}{9} \\ &= \frac{112}{9} \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 7.\end{aligned}$$

Aplicando Fórmula Quadrática para u , obtemos

$$\begin{aligned}u &= \frac{-\frac{16}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{-16 \pm 4\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{3}.\end{aligned}$$

Chamando essas raízes de u_1 e u_2 , temos

$$u_1 = \frac{-8 - 2\sqrt{7}}{3}, \quad u_2 = \frac{-8 + 2\sqrt{7}}{3}.$$

Lembrando que $u = s^2$, a fatoração em s é

$$s^4 + \frac{16}{3}s^2 + 4 = (s^2 - u_1)(s^2 - u_2).$$

Para escrever os fatores na forma usual $s^2 + \omega^2$ definimos $\omega^2 = -u$. Assim

$$\omega_1^2 = -u_1, \quad \omega_2^2 = -u_2.$$

Substituindo u_1 e u_2 obtemos

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= -\frac{-8 - 2\sqrt{7}}{3} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{3}, \\ \omega_2^2 &= -\frac{-8 + 2\sqrt{7}}{3} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{3}.\end{aligned}$$

Daqui,

$$X_1(s) = \frac{12s^3 + 32s}{6s^4 + 32s^2 + 24} = \frac{12s^3 + 32s}{6(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)},$$

e

$$X_2(s) = \frac{6s^3 + 44s}{6s^4 + 32s^2 + 24} = \frac{6s^3 + 44s}{6(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}.$$

Como o denominador é produto de dois termos quadráticos e o numerador é ímpar em s , a decomposição de $X_1(s)$ em frações parciais é da forma:

$$X_1(s) = A \frac{s}{s^2 + \omega_1^2} + B \frac{s}{s^2 + \omega_2^2},$$

para constantes reais A e B a serem determinadas.

Comparando os coeficientes, obtemos

$$As(s^2 + \omega_2^2) + Bs(s^2 + \omega_1^2) = \frac{12s^3 + 32s}{6}.$$

Considerando $s \neq 0$ e desenvolvendo essa equação, encontramos $A = 1$ e $B = 1$. Assim,

$$X_1(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{s}{s^2 + \omega_2^2}.$$

Similarmente, temos a decomposição de $X_2(s)$ em frações parciais:

$$X_2(s) = \alpha \frac{s}{s^2 + \omega_1^2} + \beta \frac{s}{s^2 + \omega_2^2},$$

para constantes reais α e β .

Agora, comparando os coeficientes, obtemos

$$\alpha s(s^2 + \omega_2^2) + \beta s(s^2 + \omega_1^2) = \frac{6s^3 + 44s}{6}.$$

Novamente, podemos cancelar $s \neq 0$, e desenvolvendo essa equação, encontramos

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}.$$

Usando a transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \cos(\omega t),$$

temos

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t),$$

$$x_2(t) = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{1 + \sqrt{7}}{2} \cos(\omega_2 t),$$

sendo

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{3}} \approx 2.1049, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{3}} \approx 0.9502.$$

Verificando as condições iniciais

$$x_1(0) = 1 + 1 = 2, \quad x_2(0) = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} + \frac{1 + \sqrt{7}}{2} = 1.$$

$$\frac{dx_1}{dt}(0) = \frac{dx_2}{dt}(0) = 0.$$

Exemplo 6.1. A seguir, analisamos a aplicação para o caso em que $t = 5$ s

Para determinar as posições $x_1(5)$ e $x_2(5)$, utilizamos as expressões gerais:

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t),$$

$$x_2(t) = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{1+\sqrt{7}}{2} \cos(\omega_2 t).$$

Iniciamos calculando as frequências naturais

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{3}} \approx 2,1048755008 \approx 2,1049, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{3}} \approx 0,9501749625 \approx 0,9502.$$

Assim, encontramos os argumentos dos cossenos em $t = 5$ s

$$\omega_1 t = 2,1048755008 \times 5 = 10,5243775042,$$

$$\omega_2 t = 0,9501749625 \times 5 = 4,7508748123.$$

Logo,

$$\cos(\omega_1 t) = \cos(10,5243775042) \approx -0,453953,$$

$$\cos(\omega_2 t) = \cos(4,7508748123) \approx 0,038476.$$

Substituindo em $x_1(t)$, temos

$$x_1(5) = \cos(\omega_1 \cdot 5) + \cos(\omega_2 \cdot 5),$$

$$x_1(5) = (-0,453953) + (0,038476).$$

$$\boxed{x_1(5) \approx -0,4155.}$$

Para determinar $x_2(5)$, inicialmente calculamos os coeficientes

$$\frac{1-\sqrt{7}}{2} = \frac{1-2,6457513111}{2} = -0,8228756556 \quad \frac{1+\sqrt{7}}{2} = \frac{1+2,6457513111}{2} = 1,8228756556.$$

Assim,

$$x_2(5) = (-0,8228756556)(-0,453953) + (1,8228756556)(0,038476),$$

$$x_2(5) \approx 0,373973 + 0,069711,$$

$$\boxed{x_2(5) \approx 0,4437.}$$

Podemos oferecer uma interpretação física da seguinte forma:

Em $t = 5$ s, as posições das massas são aproximadamente:

$$x_1(5) \approx -0,4155, \quad x_2(5) \approx 0,4437,$$

esses resultados indicam que a massa m_1 desloca-se para o lado negativo do eixo, enquanto a massa m_2 se move para o lado positivo, mostrando um comportamento fora do sistema acoplado¹.

Exemplo 6.2. Agora, analisamos a aplicação para o caso em que $t = 10$ s

Para determinar as posições $x_1(10)$ e $x_2(10)$, utilizamos as expressões gerais:

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t),$$

$$x_2(t) = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{1+\sqrt{7}}{2} \cos(\omega_2 t).$$

Primeiramente, calculando as frequências naturais

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{3}} \approx 2,1048755008 \approx 2,1049, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{3}} \approx 0,9501749625 \approx 0,9502.$$

Sendo os argumentos dos cossenos em $t = 10$ s

$$\omega_1 t = 2,1048755008 \times 10 = 21,0487550084,$$

$$\omega_2 t = 0,9501749625 \times 10 = 9,5017496246.$$

Assim,

$$\cos(\omega_1 t) = \cos(21,0487550084) \approx -0,587853,$$

$$\cos(\omega_2 t) = \cos(9,5017496246) \approx -0,997039.$$

¹Sistema acoplado é aquele onde duas ou mais partes estão conectadas de modo que o movimento de uma altera o movimento da outra, resultando nas oscilações interdependentes.

Substituindo em $x_1(t)$,

$$x_1(10) = \cos(\omega_1 \cdot 10) + \cos(\omega_2 \cdot 10),$$

$$x_1(10) = (-0,587853) + (-0,997039).$$

$$\boxed{x_1(10) \approx -1,5849.}$$

Para calcular $x_2(10)$, primeiramente encontramos o valor dos coeficientes

$$\frac{1-\sqrt{7}}{2} = -0,8228756556 \quad \frac{1+\sqrt{7}}{2} = 1,8228756556.$$

Logo,

$$x_2(10) = (-0,8228756556)(-0,587853) + (1,8228756556)(-0,997039),$$

$$x_2(10) \approx 0,483116 - 1,816864.$$

$$\boxed{x_2(10) \approx -1,3337.}$$

Também podemos interpretar fisicamente da seguinte forma:

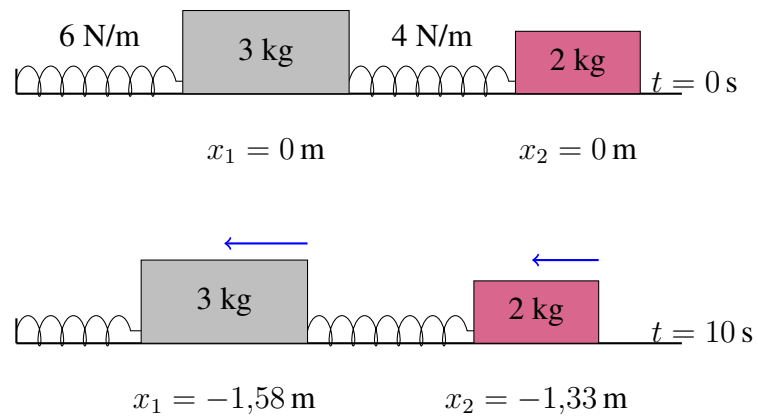
Em $t = 10$ s, as posições das massas são aproximadamente:

$$x_1(10) \approx -1,5849, \quad x_2(10) \approx -1,3337.$$

Nesse instante, ambas as massas encontram-se deslocadas para o lado negativo do eixo, com amplitudes comparáveis, evidenciando o caráter oscilatório acoplado e a interferência entre os modos naturais.

Supondo que $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$ representem as posições iniciais das massas, medidas a partir da posição de equilíbrio (isto é, com deslocamento inicial igual a zero metros), então, para $t = 10$ segundos, obtemos aproximadamente $x_1 = -1,58$ e o $x_2 = -1,33$ valores que descrevem o deslocamento das massas nesse instante de tempo.

Figura 6.1: Deslocamento das Masas em relação ao tempo de 10 segundos.



Fonte: Autoria própria.

Capítulo 7

Considerações Finais

A Transformada de Laplace (TL) é um método utilizado para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Essa afirmação foi ressaltada ao longo de todo o trabalho, mas ela se mostra especialmente relevante em situações em que a EDO apresenta termos não usuais ou grau de complexidade elevado, tornando a aplicação da TL uma alternativa mais viável em comparação aos métodos tradicionais.

Um exemplo disso já foi apresentado anteriormente, na EDO cuja parte não homogênea é dada por

$$e^t \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Nesse caso específico, o método dos coeficientes indeterminados não pode ser aplicado, pois o termo não homogêneo não é polinomial, nem puramente exponencial, nem senoidal ? isto é, não pertence às classes tratáveis por esse método.

A Transformada de Laplace, por outro lado, permite resolver o problema por meio de manipulações algébricas e do uso direto das propriedades conhecidas da TL, evitando o cálculo de integrais complicadas que surgiriam na aplicação de métodos tradicionais, como a variação de parâmetros. Assim, a TL se destaca como uma ferramenta eficiente quando o termo forçante da EDO apresenta estrutura que dificulta abordagens clássicas.

Nas aplicações deste trabalho, há outro exemplo que demonstra como a TL simplifica a resolução de uma EDO. No caso da dosagem de um medicamento, foram determinadas as funções que descrevem a concentração da substância nos sistemas central e periférico. Utilizando manipulações algébricas e algumas propriedades da TL, calculou-se que a concentração do medicamento no sistema central de um ser humano, após 3 horas, é de aproximadamente 71,46mg/L.

Na aplicação do modelo massa - mola, determinamos o movimento das massas utilizando a Transformada de Laplace, por meio da qual obtivemos as funções que descrevem o deslocamento de cada massa. Dessa forma, tornou-se possível encontrar a posição de cada massa em qualquer instante de tempo.

Portanto, a TL aplica-se de maneira eficaz na resolução de EDOs, sendo escolhida por simplificar o processo de solução, em contraste com os métodos clássicos que demandam maior esforço algébrico.

A elaboração desta monografia contribuiu de forma significativa para a formação do autor, especialmente no estudo de conceitos e métodos matemáticos. Esse processo também auxiliou na interpretação de resultados matemáticos em contextos reais e possibilitou a integração de diferentes áreas do conhecimento.

Referências

- [1] ARAÚJO, André dos Santos. Cálculo de áreas por meio das integrais definidas e impróprias. 2020. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, Duas Estradas, 2020.
- [2] ARIFIN, Syamsul. **Matrix Laplace Transform Method and its applications on spring-mass systems**. Factor M: Focus ACTION Of Research Mathematic, v. 2, n. 2, p. 17, jun. 2020.
- [3] JUNIOR, Valci Rodrigues Balbino. **Transformada de Fourier e Aplicações**. 2006. 54 f. Trabalho de Graduação (Bacharelado em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.
- [4] KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior para Engenharia**. Vol. 1. 10. ed. Curitiba: LTC Editora, 2019. 464 p. ISBN 978-85-216-3608-3.
- [5] JÚNIOR, Valmei Abreu. **Transformada de Laplace: uma introdução com aplicações**. 2011. Monografia (Especialização em Matemática, Formação de Professores) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- [6] LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia do trabalho científico**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1992.
- [7] LEBL, Jiri. **Differential Equations for Engineers**. [S. l.]: LibreTexts, 2025. Disponível em: <https://math.libretexts.org/@go/page/24035>. Acesso em: 22 de Nov. 2025.
- [8] MARYALA, Anya; GARIMELLA, Powlomi; BHASKAR, Udaya. **Modeling the pharmacokinetics of drugs within the human body using differential equations in a one compartment model and a two compartment model**. International Education & Research Journal, v. 10, n. 12, p. 17, dec. 2024.
- [9] MELCHIADES, Lucas Franco. **Transformada de Laplace: introdução com aplicações em equações diferenciais lineares de segunda ordem**. 2016. 33 f. Trabalho de Conclusão de

Curso (Licenciatura em Matemática) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus Birigui, Birigui, 2016.

- [10] SANTOS, Erika Oliveira dos. **A Transformada de Laplace em Sistemas de Equações Diferenciais Lineares**. 2019. 95 f. Monografia (Bacharelado em Ciência e Tecnologia) ? Centro Multidisciplinar de Angicos, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Angicos, 2019.
- [11] SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de; STRAUCH, Irene Maria Fonseca. **Transformada de Laplace: um livro colaborativo**. Porto Alegre: UFRGS, 2022. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-tl/main.html>. Acesso em: 6 jun. 2025.
- [12] TONIDANDEL, Danny Augusto Vieira; ARAÚJO, Antônio Emílio Angueth de. **Transformada de Laplace: uma obra de engenharia**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 34, n. 2, p. 6, 2012. Disponível em: www.sbfisica.org.br. Acesso em: 13 jun. 2025.
- [13] SOUZA, Marijane de. **Introdução às equações diferenciais ordinárias**. 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.