



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CENTRO DE CIÊNCIAS INTEGRADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Shamyra Melo de Sousa

Um estudo sobre as funções Gama e Beta e algumas aplicações

Araguaína/TO
2025

Shamyra Melo de Sousa

Um estudo sobre as funções Gama e Beta e algumas aplicações

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco

Araguaína/TO

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M528e Melo de Sousa, Shamyra.

Um estudo sobre as funções Gama e Beta e algumas aplicações /
Shamyra Melo de Sousa. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO,
2025.

50 f.

Monografia Graduação (Graduação - em Matemática) --
Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientador: Alvaro Julio Yucra Hanco.

1. Funções Gama . 2. Função Beta. 3. Integral.

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Shamyra Melo de Sousa

Um estudo sobre as funções Gama e Beta e algumas aplicações

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco

Aprovada em: 02 / 12 / 2025 .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco

Prof.^a Dra. Fernanda Vital de Paula

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e por todas as bênçãos, força e proteção durante esses quatro anos.

Agradeço aos meus pais, Erica e Júnior, por todo o cuidado e incentivo, pelos dias e noites dedicados à minha formação, pelo amor, paciência, orações e conselhos. Agradeço aos meus familiares, em especial às minhas avós Vanda e Raimunda, aos meus tios Vanilsa e Alex, pelas palavras de incentivo, pela preocupação e por toda ajuda nos momentos em que precisei. À minha princesa Aryana, minha irmã, que em dias difíceis sempre me trazia paz e alegria.

Sou grata aos meus amigos Cricya, Thelly e Kalline Borges, minhas melhores amigas de graduação, Luiz Fernando e Miguel Assunção, por todos os momentos que tivemos juntos, sejam eles de risadas, brincadeiras ou estudos. Vocês fizeram tudo ser mais leve.

Em especial ao Glaudston, minha dupla e parceiro em todos os momentos. Obrigada por todo incentivo, pela paciência e por sempre acreditar em mim.

Agradeço ao meu orientador, professor Alvaro, por toda paciência e compreensão durante essa jornada, por todos os conhecimentos compartilhados. Admiro o seu trabalho e o tenho como inspiração. À minha banca, professor José Carlos e professora Fernanda Vital, por quem tenho muita admiração, obrigada por todos os ensinamentos.

RESUMO

Neste trabalho temos como intuito destacar a função Gama e a função Beta, cujas definições são desenvolvidas por integrais, com propriedades que podem ser utilizadas em diferentes contextos para aplicações. Estas funções foram determinadas por Leonhard Euler, que tinha como objetivo encontrar uma expressão que resultasse em valores fatoriais, considerando que sua variável assume valores para além dos números naturais. O problema da pesquisa consiste em como desenvolver aplicações por meio das funções Gama e Beta? Tendo como objetivo desenvolver aplicação na resolução de integrais não triviais, determinando exemplos de integrais que podem ser solucionadas pelas funções Gama e Beta, bem como abordar a aplicação dessas funções na Probabilidade, através das distribuições Gama e Beta, realizando cálculos de acordo com temáticas reais. A pesquisa tem caráter bibliográfico baseada no levantamento de bibliografias como livros, artigos, monografias e dissertações que contemplam a temática, com abordagem quantitativa por se tratar da descrição e coleta de dados numéricos e teorias matemáticas. Os resultados da pesquisa evidenciam que as funções Gama e Beta são funções a serem consideradas na resolução de integrais não triviais, pois podem proporcionar resoluções eficientes, simplificando em certos casos cálculos extensos. Além dos seus modelos probabilísticos apresentarem utilidade na análise de temas reais, como o tempo de uso do aparelho celular e teor de açúcar em refrigerantes. Sendo as propriedades destas funções elementos primordiais no desenvolvimento das aplicações.

Palavras-chave: Função Gama. Função Beta. Integral. Probabilidade.

ABSTRACT

In this work, we aim to highlight the Gamma function and the Beta function, whose definitions are developed through integrals, with properties that can be used in different contexts for applications. These functions were determined by Leonhard Euler, who sought to find an expression that would result in factorial values, considering that its variable takes on values beyond natural numbers. The research problem consists of how to develop applications through the Gamma and Beta functions. The objective is to develop applications in solving non-trivial integrals, determining examples of integrals that can be solved using the Gamma and Beta functions, as well as addressing the application of these functions in Probability, through the Gamma and Beta distributions, performing calculations according to real-world scenarios. The research has a bibliographic nature, based on the bibliographic survey of books, articles, monographs, and dissertations that cover the theme, with a quantitative approach as it involves the description and collection of numerical data and mathematical theories. The research results show that the Gamma and Beta functions are functions to be considered in the resolution of non-trivial integrals, as they can provide efficient solutions, simplifying extensive calculations in certain cases. In addition to their probabilistic models being useful in the analysis of real-world topics, such as the usage time of mobile phones and sugar content in soft drinks. Their properties are fundamental elements in the development of applications.

Keywords: Gamma Function. Beta Function. Integral. Probability.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação gráfica do Exemplo 2.2.	14
2.2	Representação do ponto $P(x, y)$ em coordenadas polares.	15
5.1	Histograma dos dados da distribuição Gama.	33
5.2	Representação gráfica do Caso 2: $P(X > 5) \approx 81,5\%$	34
5.3	Representação gráfica do Caso 3: $P(X \geq 8) \approx 35,9\%$	35
5.4	Principais usos do celular pelos estudantes da amostra	35
5.5	Histograma dos dados da distribuição Beta.	41
5.6	Representação gráfica do Caso 2 (200ml): $P(X < 0,25) \approx 99,7\%$	43
5.7	Representação gráfica do Caso 2 (400ml): $P(X < 0,25) \approx 1,9\%$	44
5.8	Representação gráfica do Caso 3: $P(0,25 < X < 0,50) \approx 90,1\%$	45
5.9	Representação gráfica do Caso 4: $P(X < 0,50) \approx 10,6\%$	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	NOÇÕES PRELIMINARES	13
2.1	Soma de Riemann	13
2.2	Integral Definida	14
2.3	Coordenadas Polares	15
2.4	Integrais Impróprias	16
2.5	Distribuições de Probabilidade Contínuas	17
3	FUNÇÃO GAMA E FUNÇÃO BETA	18
3.1	Função Gama	18
3.1.1	Algumas propriedades da função Gama	18
3.1.2	Exemplos de cálculo utilizando as propriedades da função Gama	19
3.2	Função Beta	20
3.2.1	Algumas propriedades da função Beta	20
3.2.2	Exemplos de cálculo utilizando as propriedades da função Beta	22
4	FUNÇÃO GAMA E BETA NA RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS NÃO TRIVIAIS	23
4.1	Resolução de integrais utilizando a função Gama	23
4.2	Resolução de integrais utilizando a função Beta	25
5	APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES GAMA E BETA NA PROBABILIDADE	27
5.1	Distribuição Gama	27
5.1.1	Esperança matemática da distribuição Gama	28
5.1.2	Variância da distribuição Gama	29
5.1.3	Estimação dos Parâmetros da Distribuição Gama	30
5.1.4	Análise do tempo de permanência no aparelho celular dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática por meio da distribuição Gama	31
5.1.5	Alguns resultados do questionário	35
5.2	Distribuição Beta	36
5.2.1	Esperança Matemática da distribuição Beta	36
5.2.2	Variância da distribuição Beta	37
5.2.3	Determinação dos Parâmetros da Distribuição Beta	38
5.2.4	Análise do Teor de Açúcar em Refrigerantes Via Distribuição Beta	39
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47

1 INTRODUÇÃO

As funções Gama e Beta são consideradas funções especiais do Cálculo. A função Gama, em particular, é considerada uma generalização da função fatorial, apresentando como resultado de uma de suas propriedades, um número fatorial, se sua variável assume valores naturais. Ambas funções possui aplicabilidade em diferentes áreas como na Estatística e Probabilidade, na obtenção de soluções de equações diferenciais, no Cálculo Fracionário, na convergência de séries e, principalmente, na resolução de integrais não triviais.

Essas funções surgiram durante a fusão de várias correntes matemáticas entre 1729 e 1730, a partir da troca de correspondências de Leonhard Euler com Christian Goldbach. Uma das correntes é denominada teoria da interpolação, que discutia um problema importante entre matemáticos da época, como Goldbach, Daniel Bernoulli e James Stirling; entretanto, esses matemáticos não tiveram sucesso em sua solução. Outra corrente destacada é do cálculo integral e a formulação sistemática das fórmulas de integração indefinida

O problema da interpolação consiste de uma análise sobre a sequência dos números triangulares, representada por: $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, \dots$, conhecida na Álgebra pela fórmula $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, em que n representa a posição do termo. Ao substituir-se o sinal de adição por multiplicação na sequência, a expressão resulta na sequência dos fatoriais. Considerando a relevância dos fatoriais em diversos contextos da Matemática, Davis (1959, p. 852) aponta que o problema de interpolação que levou à definição da função Gama surgiu a partir de questões como: “É possível obter uma fórmula simples para calcular os fatoriais? E é possível interpolar entre os fatoriais? O que deveria ser $5,5!$?”

Por meio de cartas, Euler anuncia a solução do problema de interpolação a Goldbach. Para resolver essa problemática, Euler buscava encontrar uma expressão analítica que resultasse nos valores dos fatoriais para números inteiros positivos e que ao mesmo tempo, fosse válida para outros valores da variável. Ele determinou que a expressão do produto infinito, quando sua variável é um número inteiro positivo, tinha como resultado o fatorial.

Apesar de já ter obtido uma solução, Euler prosseguiu com suas análises, considerando também expressões envolvendo integrais indefinidas. A primeira delas ficou conhecida posteriormente como função Beta. Após diversas manipulações, ele chegou a uma expressão do fatorial representada por uma integral, cuja variável admite valores além dos inteiros positivos, conforme era o objetivo de Euler, sendo esta expressão a função Gama.

Em diferentes bibliografias que tratam das funções Gama e Beta, é evidente a importância de suas aplicações na resolução de diferentes problemas matemáticos. Assim, neste trabalho, pretendemos apresentar as funções Gama e Beta em suas definições usuais, destacando suas principais propriedades e sua relevância no campo teórico da Matemática, além de abordar aplicações em contextos não necessariamente matemáticos. Diante disso, nesta pesquisa trata-

remos da seguinte problemática: como desenvolver aplicações por meio das funções Gama e Beta? Como objetivo, buscamos desenvolver aplicações na resolução de integrais não triviais e em contextos probabilísticos.

Resolver integrais não triviais é um desafio que ocorre não apenas na Matemática, mas também em áreas que utilizam a teoria do Cálculo e suas aplicações. Há casos em que utilizar determinadas ferramentas matemáticas na resolução de integrais podem tornar o processo de resolução mais ágeis do que se utilizar os métodos elementares. Desta forma, abordaremos soluções baseadas nas funções Gama e Beta que otimizem cálculos extensos, proporcionando resoluções simplificadas e eficientes. A probabilidade fornece ferramentas que permitem aplicações abordando temáticas em contextos reais, sendo uma delas os modelos probabilísticos. Assim, pretendemos abordar, como aplicação, modelos probabilísticos, ou seja, funções densidade de probabilidade (f.d.p.) que são desenvolvidos a partir das funções Gama e Beta.

Para esta pesquisa, realizamos o levantamento de materiais bibliográficos que tratam da parte teórica das funções e dados para aplicações. Dessa forma, utilizaremos como método a pesquisa bibliográfica, que deve ser elaborada

[...] a partir de materiais já publicados, como por exemplo: livros, revistas, jornais, panfletos, monografias, artigos científicos, dissertações, teses, material cartográfico, publicações em periódicos, internet; onde o pesquisador vai entrar em contato com materiais que contém informações sobre um determinado conteúdo de sua pesquisa (Almeida, 2021, p. 32).

Assim, este método se adequa aos processos desta pesquisa, em que utilizaremos principalmente de livros, artigos, monografias e dissertações como referenciais teóricos para a descrição e análise do tema. Quanto à abordagem utilizamos a quantitativa, pois a pesquisa envolve a descrição de dados numéricos, fundamentada em teorias e métodos matemáticos. Segundo Zanella (2011, p. 62), “a abordagem quantitativa enfatiza números ou informações conversíveis em números. Os dados são analisados com apoio da estatística ou de outras técnicas matemáticas”.

A partir da temática da pesquisa, abordaremos, no capítulo 2, noções preliminares que envolvem conceitos e resultados estudados em disciplinas de Cálculo e que são necessários para a compreensão do tema do trabalho. Destacamos definições essenciais, para apresentação da definição de integrais impróprias, conceito importante para a compreensão das funções estudadas.

No capítulo 3, apresentamos a definição usual da função Gama, bem como suas principais propriedades, demonstrando-as e apresentando alguns exemplos. Do mesmo modo, tratamos da função Beta, destacando propriedades relevantes para o trabalho, suas demonstrações e exemplos.

Uma das aplicações das funções Gama e Beta presentes neste trabalho consiste em utilizar essas funções na resolução de integrais não triviais, apresentadas por meio de exemplos

no capítulo 4. Nesse capítulo, fornecemos explicações detalhadas com o objetivo de evidenciar resoluções que podem ser consideradas mais eficientes e simplificadas quando se utilizam essas funções.

Por fim, no capítulo 5, apresentamos as distribuições probabilísticas associadas às funções Gama e Beta e seus principais resultados, para então desenvolver aplicações dessas funções na probabilidade. Assim, evidenciamos cálculos probabilísticos por meio da distribuição Gama, considerando o tempo de permanência no aparelho celular dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, e da distribuição Beta, considerando o teor de açúcar em refrigerantes.

Para melhor compreensão deste trabalho, recomenda-se que o leitor possua conhecimentos prévios de Cálculo Diferencial e de Probabilidade.

2 NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados que são necessários para compreensão do tema abordado, ou utilizados ao decorrer do trabalho. O desenvolvimento deste capítulo está baseado nos autores George (2012), Guidorri (2013) e Stewart (2006).

2.1 Soma de Riemann

A principal ideia de integral é que muitas quantidades podem ser calculadas dividindo-as em pequenas partes e, em seguida, somando a contribuição de cada parte, o que corresponde ao conceito de soma de Riemann.

Definição 2.1. Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Uma partição P deste intervalo é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. A partição P divide o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, sendo k um número entre 1 e n . Para cada subintervalo selecionamos um ponto c_k , e construímos um retângulo vertical que tem base no eixo x e toca a curva no ponto $(c_k, f(c_k))$, em que $f(c_k)$ representa a altura e Δx_k a largura. Em cada subintervalo realizamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$, cujo resultado pode ser positivo, negativo ou nulo. Quando $f(c_k) > 0$, o produto corresponde à área do retângulo, já para $f(c_k) < 0$, o produto é um número negativo, sendo o oposto da área desse retângulo. Assim, a soma S_P de todos esses produtos é denominada soma de Riemann de f no intervalo $[a, b]$:

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k.$$

Exemplo 2.2. Considerando a função $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $[0, 2]$. Divida esse intervalo em quatro subintervalos de comprimentos iguais e faça o gráfico da função, adicionando os retângulos associados à soma de Riemann, tomando c_k como a extremidade direita de cada subintervalo.

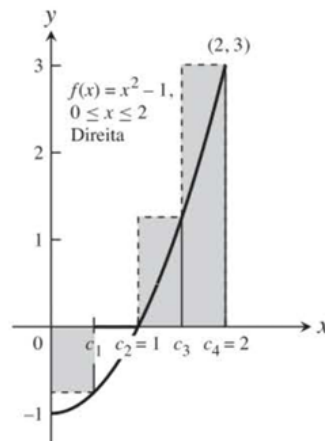
Solução: Dividindo o intervalo $[0, 2]$ em quatro subintervalos de mesmo comprimento, obtemos $P : [0, 0,5], [0,5, 1], [1, 1,5], [1,5, 2]$, desse modo, $\Delta x_k = 0,5$. Os pontos à direita são $c_k = x_k \in \{0,5; 1; 1,5; 2\}$. Podemos então calcular a altura $f(c_k)$, em que

$$f(0,5) = -0,75, \quad f(1) = 0, \quad f(1,5) = 1,25, \quad f(2) = 3.$$

Assim, a soma de Riemann é

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = (-0,75) \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 + 1,25 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 = 1,75.$$

Figura 2.1 – Representação gráfica do Exemplo 2.2.



Fonte: Thomas (2012).

2.2 Integral Definida

Nesta seção, apresentamos a definição de integral definida, bem como o teorema que garante a integrabilidade de funções contínuas.

Definição 2.3. Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que L é o limite das somas de Riemann, se for satisfeito a seguinte condição: para qualquer número $\epsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que para toda partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$, e para qualquer escolha de c_k em $[x_{k-1}, x_k]$, temos

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k - L \right| < \epsilon,$$

em que $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e $\|P\|$ denota a norma da partição P , isto é, o comprimento do maior subintervalo.

Nesse caso, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ e definimos a integral definida de $f(x)$ em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(x) dx = L,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k.$$

Teorema 2.4. Se uma função f é contínua no intervalo $[a, b]$, então a integral definida da função existe e f é integrável em $[a, b]$.

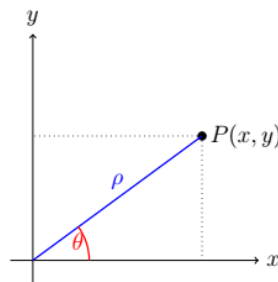
Demonstração: A prova desse teorema pode ser encontrada em Guidorri (2013, p. 525). \square

2.3 Coordenadas Polares

Quando trabalhamos com integrais duplas e a região de integração envolve arcos de circunferência, é conveniente utilizar o sistema de coordenadas polares (ρ, θ) ao invés do retangular (x, y) .

Definição 2.5. Seja P um ponto do plano xy , com coordenada $(x, y) \neq (0, 0)$. Este ponto tem coordenadas polares (ρ, θ) , com $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Figura 2.2 – Representação do ponto $P(x, y)$ em coordenadas polares.



Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que pelo Teorema de Pitágoras, temos $\rho^2 = x^2 + y^2$, de modo que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Além disso, por meio de conceitos trigonométricos no triângulo retângulo, obtemos

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \theta.$$

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável, onde Ω é uma região polar:

$$\Omega = \{(\rho, \theta) : a \leq \rho \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Assim a integral dupla pode ser calculada por meio da mudança de coordenadas polares

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

Exemplo 2.6. Calcule $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, onde Ω é a região no semiplano superior limitado pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: A região Ω em coordenadas polares é dada por:

$$\Omega = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Utilizando coordenadas polares, temos que $x^2 + y^2 = \rho^2$ e $dx dy = \rho d\rho d\theta$, assim

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \rho^3 d\rho d\theta \\
 &= \left(\int_0^{\pi} d\theta \right) \left(\int_1^2 \rho^3 d\rho \right) \\
 &= [\theta]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \\
 &= \pi \cdot \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) \\
 &= \pi \cdot \left(\frac{15}{4} \right) \\
 &= \frac{15\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

2.4 Integrais Impróprias

Para casos onde a integral definida possui intervalos infinitos, a integral é chamada de integral imprópria. Nesta seção, definiremos integrais impróprias do Tipo 1.

Definição 2.7. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, +\infty)$. Então,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

se o limite existir.

Definição 2.8. Seja f uma função contínua no intervalo $(-\infty, b]$. Então,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

se o limite existir.

Definição 2.9. Seja f uma função contínua no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,$$

se os limites existirem.

Observação 2.10. Se os limites existirem, dizemos que a integral imprópria é convergente. Se os limites não existirem, dizemos que a integral imprópria é divergente.

Exemplo 2.11. Calculemos a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ pela Definição 2.7

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 0 + 1 = 1.$$

Exemplo 2.12. A integral imprópria $\int_{-\infty}^0 e^{5x} dx$, é calculada utilizando a Definição 2.8

$$\int_{-\infty}^0 e^{5x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{5} e^{5x} \right]_a^0 = \frac{1}{5} e^0 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{5} e^{5a} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}.$$

2.5 Distribuições de Probabilidade Contínuas

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos importantes para a compreensão da aplicação das funções Gama e Beta na probabilidade.

Definição 2.13. Uma variável aleatória contínua é uma função X , definida sobre um espaço amostral, cujos valores pertencem a um intervalo de números reais.

Alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas incluem o tempo, a altura, o peso, a distância, entre outros.

Definição 2.14. Seja X uma variável aleatória contínua. Dizemos que uma função $f(x)$, associada a X é uma função densidade de probabilidade se satisfaz as seguintes condições:

- (I) $f(x) \geq 0$ para todo x em \mathbb{R} ;
- (II) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Podemos calcular a probabilidade (proporção teórica) por meio da área sob a curva da função $f(x)$, compreendida em um intervalo limitado por dois valores a e b da abscissa x . Essa probabilidade é representada por

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

3 FUNÇÃO GAMA E FUNÇÃO BETA

As funções Gama e Beta, também conhecidas como funções eulerianas, possuem propriedades que se destacam em diferentes contextos e aplicações. Neste capítulo, apresentamos suas definições usuais e principais propriedades acompanhadas de suas demonstrações, além de exemplos. Para a elaboração deste capítulo, utilizamos como referência os trabalhos de Junior (2010), Melo (2020) e Spiegel (1976).

3.1 Função Gama

Definição 3.1. Denotada por $\Gamma(n)$, a função Gama é uma integral imprópria convergente se $n > 0$, definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx. \quad (3.1)$$

A demonstração da convergência da função Gama pode ser encontrada em Junior (2010, p. 35).

3.1.1 Algumas propriedades da função Gama

Apresentamos, nesta subseção, as propriedades mais relevantes da função Gama acompanhadas de suas demonstrações.

Propriedade 3.2. De forma simples, $\Gamma(1) = 1$.

Demonstração: Utilizando a definição de função Gama, dada pela equação (3.1), temos que:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_{x=0}^{x=a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-a} - (-e^0)] = 1.$$

□

Propriedade 3.3. Seja $n > 0$. É válida a seguinte relação de um número sucessor, aplicado na função Gama

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Demonstração: $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^{n+1-1} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx$

Utilizando integração por partes, com $u = x^n$ e $dv = e^{-x} dx$. Temos que $du = nx^{n-1} dx$ e $v = -e^{-x}$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^a x^n e^{-x} dx &= [-x^n e^{-x}]_{x=0}^{x=a} + n \int_0^a e^{-x} x^{n-1} dx \\ &= [-a^n e^{-a} - (0^n e^0)] + n \int_0^a e^{-x} x^{n-1} dx \\ &= \frac{-a^n}{e^a} + n \int_0^a e^{-x} x^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Aplicando L'Hôpital, obtemos $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{-a^n}{e^a} = 0$. Daqui,

$$\Gamma(n+1) = \lim_{a \rightarrow +\infty} n \int_0^a x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(n).$$

□

Propriedade 3.4. A seguinte propriedade destaca a representação da função Gama com um número fatorial, cuja variável admite valores além dos inteiros positivos.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Demonstração: A demonstração será feita por meio do Princípio da Indução Matemática. Inicialmente, devemos verificar se expressão é válida para $n = 1$, ou seja, $\Gamma(1+1) = 1!$. Pela Propriedade 3.3, $\Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1!$, logo vale para o primeiro.

Suponha que a propriedade vale para n , isto é:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Vamos provar que vale para $n+1$, ou seja, provemos que $\Gamma(n+2) = (n+1)!$. De fato,

$$\begin{aligned} \Gamma(n+2) &= \Gamma((n+1)+1) \\ &= (n+1)\Gamma(n+1) \\ &= (n+1)n! \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.5. Outro resultado importante é $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (veja o Exemplo 3.14).

3.1.2 Exemplos de cálculo utilizando as propriedades da função Gama

Exemplo 3.6. Determine o valor das seguintes expressões:

(a) $\frac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)}$;

(b) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Solução:

(a) Usando a definição da função Gama e a Propriedade 3.4, temos

$$\frac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)} = \frac{6!}{2 \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 30.$$

(b) Usando as Propriedades 3.3 e 3.5, temos

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \pi\sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.7. Podemos calcular a integral $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$, utilizando a definição da função Gama e a Propriedade 3.4

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = \Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4! = 24.$$

3.2 Função Beta

Definição 3.8. Denotada por $B(m, n)$, a função Beta é convergente quando $m > 0$ e $n > 0$, definida por

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx. \quad (3.2)$$

Uma forma de analisar a convergência da função Beta pode ser encontrada em Marín (2010, p. 14).

3.2.1 Algumas propriedades da função Beta

A seguir, destacamos as propriedades da função Beta, que são amplamente utilizadas nos contextos de suas aplicações.

Propriedade 3.9. Assumindo $x = \sin^2 \theta$, a função Beta pode expressa pela seguinte integral

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2m-1} (\cos \theta)^{2n-1} d\theta.$$

Demonstração:

Para a transformação, determina-se $x = \sin^2 \theta$, e $dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$, quando $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$, e se $x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Assim, substituindo em (3.2), temos

$$\begin{aligned}B(m, n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2(m-1)} (1 - \sin^2 \theta)^{n-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\cos \theta)^{2(n-1)} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2m-1} (\cos \theta)^{2n-1} d\theta.\end{aligned}$$

□

Propriedade 3.10. A seguinte propriedade é uma relação com a função Gama

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Demonstração: Substituindo $t = z^2$, em $\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-t} dt$, temos $dt = 2z dz$, se $t = 0 \Rightarrow z = 0$, e se $t = +\infty \Rightarrow z = +\infty$.

Assim,

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} z^{2(m-1)} e^{-z^2} 2z dz = 2 \int_0^{+\infty} z^{2m-1} e^{-z^2} dz,$$

de modo análogo,

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^{+\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy.$$

Daqui,

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \left(\int_0^{+\infty} z^{2m-1} e^{-z^2} dz \right) \left(\int_0^{+\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy \right) \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} z^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(z^2+y^2)} dz dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, faremos $z = \rho \cos \phi$ e $y = \rho \sin \phi$, assim

$$dzdy = \left| \frac{\partial(z, y)}{\partial(\rho, \phi)} \right| d\rho d\phi \Rightarrow dzdy = \rho d\rho d\phi$$

Para os limites de integração, como z e y varia entre $[0, +\infty)$, estamos no primeiro quadrante do plano (z, y) , logo $\rho \in [0, +\infty)$ e $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \phi)^{2m-1} (\rho \sin \phi)^{2n-1} e^{-[(\rho \cos \phi)^2 + (\rho \sin \phi)^2]} \rho d\phi d\rho \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{2(m+n)-1} e^{-\rho^2} (\cos \phi)^{2m-1} (\sin \phi)^{2n-1} d\phi d\rho \\ &= 4 \left(\int_0^{+\infty} \rho^{2(m+n)-1} e^{-\rho^2} d\rho \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{2m-1} (\sin \phi)^{2n-1} d\phi \right) \\ &= 2 \Gamma(m+n) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi)^{2m-1} (\sin \phi)^{2n-1} d\phi \right), \end{aligned}$$

pela Propriedade 3.9

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n) B(m, n)$$

Portanto,

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

□

Propriedade 3.11. Comutatividade entre as variáveis

$$B(m, n) = B(n, m).$$

Demonstração: Substituindo $t = 1 - x$ em (3.2), segue que $x = 1 - t$ e $dx = -dt$, para $x = 0 \Rightarrow t = 1$, e se $x = 1 \Rightarrow t = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_1^0 (1-t)^{m-1}(t)^{n-1} - dt = - \int_1^0 (1-t)^{m-1}(t)^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^{m-1}(t)^{n-1} dt = \int_0^1 (t)^{n-1}(1-t)^{m-1} dt = B(n, m). \end{aligned}$$

□

Propriedade 3.12. Por decorrência das Propriedades 3.9 e 3.10, temos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sen \theta)^{2m-1} (\cos \theta)^{2n-1} dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}.$$

3.2.2 Exemplos de cálculo utilizando as propriedades da função Beta

A seguir, apresentamos alguns exemplos em que as Propriedades da função Beta são utilizadas.

Exemplo 3.13. Calcule

(a) $B(3, 4)$;

(b) $B\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Solução:

(a) Pela Propriedade 3.10, temos

$$B(3, 4) = \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2! \cdot 3!}{6!} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}.$$

(b) Usando as Propriedades 3.3, 3.4, 3.5, 3.10, obtemos

$$B\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+2\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1!}{\frac{5}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} = \frac{4}{15}.$$

Exemplo 3.14. Verifiquemos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Inicialmente, calculamos $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ utilizando a Propriedade 3.10.

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2. \quad (3.3)$$

Pela Propriedade 3.9

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sen \theta)^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} (\cos \theta)^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2 \left[\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \pi. \quad (3.4)$$

Igualando as expressões (3.3) e (3.4), temos

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4 FUNÇÃO GAMA E BETA NA RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS NÃO TRIVIAIS

Há integrais que demandam mais de uma técnica para serem resolvidas ou que não podem ser solucionadas por métodos elementares. Diante disso, faz-se necessária a utilização de ferramentas mais avançadas da Matemática, como as funções Gama e Beta. Por meio de exemplos, nesta seção apresentamos como essas funções contribuem para a simplificação e o cálculo eficiente de determinadas integrais não triviais. Para este capítulo utilizamos como base a obra de Spiegel (1976).

4.1 Resolução de integrais utilizando a função Gama

Exemplo 4.1. Observe que a seguinte integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \sqrt{4x} e^{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} dx,$$

para ser resolvida por métodos elementares, exigiria, inicialmente, o cálculo da integral definida

$$\int_0^r \sqrt{4x} e^{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} dx,$$

a fim de determinar sua primitiva. Entretanto, este processo pode ser complexo devido a função integrando envolver a função exponencial, cujo expoente envolve uma raiz quadrada de x , uma forma de resolvê-la é utilizando uma substituição adequada e posteriormente o método de integração por partes. Após calcular a primitiva seria necessário verificar se o limite existe.

Utilizar a função Gama nesse caso, pode tornar mais simples o cálculo dessa integral. Podemos resolvê-la, realizando a seguinte substituição:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 2y \Rightarrow x = 4y^2, \text{ assim } dx = 8y dy.$$

Analisando os limites de integração, quando $x = 0 \Rightarrow y = 0$, se $x = \infty \Rightarrow y = \infty$. Substituindo na integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sqrt{4x} \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} dx &= \int_0^{\infty} \sqrt{4 \cdot 4y^2} \cdot e^{-y} \cdot 8y dy \\ &= \int_0^{\infty} 4y \cdot e^{-y} \cdot 8y dy \\ &= 32 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy \\ &= 32 \cdot \Gamma(3) \\ &= 64. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Consideremos a seguinte integral definida

$$\int_0^1 \frac{x \cdot e^{\left(-\frac{x}{1-x}\right)}}{(1-x)^3} dx,$$

notemos que para resolver essa integral pelos métodos elementares, inicialmente podemos utilizar uma substituição e, em seguida, resolver a integral resultante pelo método da integração por partes, pois a função integrando apresenta como um de seus termos a função exponencial. Assim, sua resolução se torna extensa, além de apresentar a necessidade de calcular o limite, pois a substituição resulta em uma integral imprópria.

Uma forma de resolvê-la é iniciando com a seguinte substituição:

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}, \text{ desse modo, } dx = \frac{1}{(1+y)^2} dy.$$

Analisamos os limites, se $x = 0 \Rightarrow y = 0$, para $x = 1 \Rightarrow y = +\infty$. Assim, substituindo na integral, temos como resultado uma integral em termos da função Gama, que ao utilizar suas propriedades, proporciona uma resolução direta e simplificada:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x \cdot e^{\left(-\frac{x}{1-x}\right)}}{(1-x)^3} dx &= \int_0^{\infty} \frac{y}{1+y} \cdot e^{-y} \cdot (1+y)^3 \cdot \frac{1}{(1+y)^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} y \cdot e^{-y} dy \\ &= \Gamma(2) = 1. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3. O exemplo a seguir

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx,$$

é uma integral definida que por apresentar o termo $\sqrt{-\ln x}$ no denominador, não pode ser resolvida apenas utilizando métodos elementares, sendo necessário recorrer a outros resultados teóricos de integração. Uma forma de resolvê-la é realizando a seguinte substituição: $y = -\ln x$, na qual temos $x = e^{-y}$ e $dx = -e^{-y} dy$. Analisando os limites, quando $x = 0 \Rightarrow y = \infty$, para $x = 1 \Rightarrow y = 0$. Assim, ao substituir na integral, obtemos a possibilidade de utilizar a função Gama para resolvê-la:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx &= \int_{\infty}^0 \frac{-e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

4.2 Resolução de integrais utilizando a função Beta

Exemplo 4.4. A seguinte integral definida

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}},$$

pode ser resolvida por diferentes métodos. Entre eles, destaca-se o uso das funções Beta e Gama, as quais podem proporcionar uma simplificação significativa nos cálculos. Realizando a substituição $x = 3t \Rightarrow dx = 3dt$. Em relação aos limites de integração, quando $x = 0 \Rightarrow t = 0$, para $x = 3 \Rightarrow t = 1$. Daqui, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}} &= \int_0^1 \frac{3 dt}{\sqrt{9t - 9t^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{3 dt}{\sqrt{9(t - t^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{3 dt}{\sqrt{9t(1 - t)}} \\ &= \int_0^1 \frac{3 dt}{3\sqrt{t(1 - t)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1 - t)}} \\ &= \int_0^1 t^{-1/2}(1 - t)^{-1/2} dt \\ &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5. Neste exemplo, a integral definida

$$\int_0^3 x^4 \sqrt{9 - x^2} dx$$

pode ser resolvida por substituições trigonométricas, com o uso de identidades conhecidas. Outra possibilidade é aplicar substituições e manipulações algébricas que resultam em uma integral em termos da função Beta, podendo tornar sua solução mais simples e direta.

Desse modo, realizando a substituição, $x = 3\sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{3}{2\sqrt{t}}$. Quando $x = 0 \Rightarrow t = 0$, para $x = 3 \Rightarrow t = 1$. Substituindo, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x^4 \sqrt{9-x^2} dx &= \int_0^1 (3\sqrt{t})^4 \sqrt{9-(3\sqrt{t})^2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{t}} dt \\
&= \int_0^1 81t^2 \sqrt{9-9t} \cdot \frac{3}{2\sqrt{t}} dt \\
&= \frac{243}{2} \int_0^1 t^{3/2} \sqrt{1-t} dt \\
&= \frac{243}{2} \int_0^1 t^{3/2} (1-t)^{1/2} dt \\
&= \frac{243}{2} \cdot B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{243}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{243}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right) \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)}{6} \\
&= \frac{243}{2} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{729\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.6. A seguinte integral definida

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta,$$

necessita para sua resolução o uso de identidades trigonométricas para reduzir a potência, quantas vezes necessário, de modo que a integral resultante possa ser resolvida pelos métodos elementares. Outra possibilidade, é o uso das funções Beta e Gama, utilizando em específico a Propriedade 3.12. Fazendo $2m - 1 = 0$ e $2n - 1 = 6$, temos que $m = \frac{1}{2}$ e $n = \frac{7}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta \\
&= 4 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \frac{15}{8}\sqrt{\pi}}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{\frac{15}{4}\pi}{6} \\
&= \frac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

5 APLICAÇÃO DAS FUNÇÕES GAMA E BETA NA PROBABILIDADE

As funções Gama e Beta, além de sua aplicação no cálculo de integrais, também desempenham um papel importante na probabilidade, por meio de modelos probabilísticos que são desenvolvidos a partir destas funções. As distribuições Gama e Beta são utilizadas para modelar diferentes tipos de fenômenos. A distribuição Gama é adequada para tratar de análises e problemas que têm como característica o tempo. Já a distribuição Beta é aplicada em situações nas quais as variáveis estão restritas ao intervalo $[0, 1]$. O desenvolvimento deste capítulo tem como base as referências dos autores Afonso e Nunes (2019), Manchini, Portella e Bayer (2019), Morettin e Bussad (2010) e Owen (2008).

5.1 Distribuição Gama

A distribuição Gama é utilizada para modelar valores de dados reais positivos, assumindo uma forma assimétrica. Segundo Afonso e Nunes (2019, p. 116), sua variável aleatória representa “o tempo de espera até à ocorrência do n -ésimo sucesso”. Nesse contexto, é considerada uma extensão da distribuição fatorial, que modela o tempo entre eventos. Sua aplicabilidade também está relacionada, segundo Melo (2020, p.57)

[...] a estudos de meteorologia, para descrever distribuição de precipitação, e em engenharia, para obtenção do tempo de retorno de um equipamento com falha e confiabilidade: capacidade de fornecer serviços que podem ser defensivamente confiáveis dentro de um período de tempo.

Desse modo, propomos como aplicação da distribuição Gama uma análise, por meio de uma pesquisa, sobre o tempo de permanência dos alunos que cursam Licenciatura em Matemática no aparelho celular. Inicialmente, apresentaremos sua definição e ferramentas importantes para os cálculos realizados em relação a essa distribuição.

Definição 5.1. A distribuição Gama é um modelo para uma variável aleatória contínua X , que assume valores positivos, com parâmetros α e $\beta \in \mathbb{R}^+$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

A seguir provamos que a função (5.1) é uma função densidade de probabilidade.

Demonstração: No caso em que $x > 0$, como $\alpha, \beta > 0$, $x^{\alpha-1}$, $e^{-x/\beta}$, $\Gamma(\alpha)$ e β^α são também maiores que zero. Assim, satisfaz que $f(x) \geq 0 \forall x$, item I da Definição 2.14. Para o item II, quando $x < 0$, temos $\int_{-\infty}^0 0 dx = 0$. Para $x > 0$, determina-se $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$.

Fazendo uma mudança de variável, com $y = \frac{x}{\beta}$ e $dx = \beta dy$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{+\infty} (y \cdot \beta)^{\alpha-1} e^{-y} \beta dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \beta^\alpha \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = 0 + 1 = 1.$$

Está provado que a distribuição Gama é uma função densidade de probabilidade. \square

Outra notação usual para a distribuição Gama, presente nos livros de Estatística, é obtida quando realiza-se uma mudança de parâmetros, fazendo $\alpha = r$ e $\frac{1}{\beta} = \lambda$. Assim, temos a seguinte definição alternativa para a distribuição Gama.

Definição 5.2. Uma variável aleatória contínua X , que assume valores positivos, possui uma distribuição Gama com parâmetros $r > 0$ e $\lambda > 0$, se sua função densidade de probabilidade dada por

$$f(x; r, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Observação 5.3. Ao longo deste trabalho, será considerada a Definição 5.2 como base para a distribuição Gama.

5.1.1 Esperança matemática da distribuição Gama

A esperança matemática, no contexto da probabilidade, representa o valor médio ou esperado de uma variável aleatória. Esse conceito permite identificar a medida de tendência central em distribuições de probabilidade, como é o caso da distribuição Gama. Mostraremos a seguir como determinar a média da distribuição Gama considerando a função densidade de probabilidade (5.2).

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x; r, \lambda) dx \\
&= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} x^r e^{-\lambda x} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável, com $y = \lambda x$, temos que $dx = \frac{dy}{\lambda}$. Para $x = 0 \Rightarrow y = 0$, se $x = +\infty \Rightarrow y = +\infty$. Assim

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^r e^{-y} \frac{dy}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} y^r e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda \Gamma(r)} \cdot \Gamma(r+1) \\
&= \frac{1}{\lambda \Gamma(r)} \cdot r \cdot \Gamma(r) \\
&= \frac{r}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Portanto, a média da distribuição Gama é calculada por

$$E(X) = \frac{r}{\lambda}. \quad (5.3)$$

5.1.2 Variância da distribuição Gama

A variância é uma medida de dispersão que quantifica o quanto os valores de uma variável aleatória se afastam da média. Quando a variância assume um valor baixo, isso indica que os dados estão mais concentrados em torno da média. Por outro lado, uma variância mais alta revela que os valores estão mais distantes da média.

A variância de uma variável aleatória X é dada por:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \quad (5.4)$$

Usando a função densidade de probabilidade (5.2), calculamos

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x; r, \lambda) dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} x \cdot x^r e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}$$

Realizado uma mudança de variável, com $y = \lambda x \Rightarrow dx = \frac{dy}{\lambda}$. Para $x = 0 \Rightarrow y = 0$, se $x = +\infty \Rightarrow y = +\infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} \frac{y}{\lambda} \cdot \left(\frac{y}{\lambda}\right)^r e^{-y} \frac{dy}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} y^{r+1} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(r)} \cdot \Gamma(r+2) \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(r)} \cdot (r+1) \cdot \Gamma(r+1) \\
&= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(r)} \cdot (r+1) \cdot r \cdot \Gamma(r).
\end{aligned}$$

Daqui,

$$E(X^2) = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}. \quad (5.5)$$

Sabemos que:

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} \Rightarrow [E(X)]^2 = \frac{r^2}{\lambda^2}.$$

Juntando os resultados, segue de (5.4)

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{r(r+1) - r^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{r}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}. \quad (5.6)$$

5.1.3 Estimação dos Parâmetros da Distribuição Gama

Os parâmetros da distribuição Gama podem ser obtidos pelo método dos momentos, uma técnica que consiste em igualar os momentos teóricos (populacionais), definidos por valores esperados aos momentos amostrais correspondentes.

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias, com função densidade de probabilidade $f(x; \theta_1, \dots, \theta_p)$. O k -ésimo momento populacional para uma variável aleatória contínua é dado por:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x; \theta_1, \dots, \theta_p) dx, \quad k \in \{1, 2, \dots\}.$$

O k -ésimo momento amostral é definido como:

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k \in \{1, 2, \dots\}.$$

Dessa forma, os estimadores dos parâmetros são obtidos ao se igualar os primeiros momentos populacionais aos respectivos momentos amostrais, o que gera um sistema de equações:

$$\begin{cases} E(X) = m_1, \\ E(X^2) = m_2, \\ E(X^3) = m_3, \\ \vdots \end{cases}$$

A solução desse sistema fornece expressões para os parâmetros da distribuição em função dos momentos amostrais. Em específico para a distribuição Gama, utilizando (5.3) e (5.5) temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{r}{\lambda} = \bar{X}, \\ \frac{r(r+1)}{\lambda^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2. \end{cases}$$

A primeira equação permite isolar o parâmetro r em função de λ

$$\frac{r}{\lambda} = \bar{X} \Rightarrow r = \bar{X} \cdot \lambda.$$

Substituindo essa expressão na segunda equação do sistema, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X}\lambda \cdot (\bar{X}\lambda + 1)}{\lambda^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ \frac{\bar{X}^2\lambda + \bar{X}}{\lambda} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ \frac{\bar{X}^2\lambda}{\lambda} + \frac{\bar{X}}{\lambda} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ \frac{\bar{X}}{\lambda} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \\ \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2} &= \frac{\lambda}{\bar{X}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2}. \quad (5.7)$$

Substituindo a expressão de $\hat{\lambda}$ na equação $r = \bar{X} \cdot \lambda$, obtemos:

$$\hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2}. \quad (5.8)$$

5.1.4 Análise do tempo de permanência no aparelho celular dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática por meio da distribuição Gama

O uso de aparelhos eletrônicos, como o celular, tornou-se, nos tempos atuais, essencial no cotidiano, sendo utilizado para o trabalho, os estudos, o lazer e diversas outras finalidades.

Nesta subseção, será apresentada uma aplicação da distribuição Gama, tendo como temática o tempo de permanência no aparelho celular de alguns estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT). Para a coleta dos dados, foi elaborado um questionário aplicado a uma amostra composta por 12 alunos, selecionados por meio de amostragem não probabilística por conveniência. Nesse método, segundo Fávero e Belfiore (2017) “os elementos da amostra são escolhidos por uma questão de conveniência ou simplicidade, por exemplo, amigos, vizinhos ou estudantes”. Essa técnica foi adotada em razão da maior acessibilidade aos participantes e por atender ao objetivo desta

aplicação, que consiste em utilizar dados reais para a realização de cálculos probabilísticos da distribuição Gama, de forma contextualizada com a temática proposta. Desse modo, os resultados apresentados dizem respeito apenas à amostra analisada.

No questionário, os participantes informaram o tempo de uso do aparelho celular de segunda-feira a sexta-feira, em horas e minutos, obtidos a partir da ferramenta de monitoramento de uso de tela denominada “Bem-Estar Digital” em dispositivos Android e “Tempo de Uso” nos dispositivos iOS. Em seguida, foi calculada a média do tempo de utilização de cada aluno dos dias coletados, além de converter o resultado para horas.

Na Tabela 5.1 a seguir, são apresentados os resultados da média de tempo de uso do aparelho celular pelos 12 estudantes em horas, calculada a partir dos dados coletados, com os valores aproximados para até duas casas decimais.

Tabela 5.1 – Tempo médio de uso diário do celular em horas.

Estudante	Tempo médio
1	5,84
2	15,37
3	8,22
4	7,3
5	6
6	6,13
7	8,21
8	7,58
9	6,51
10	6,66
11	5,26
12	5,17

Fonte: Elaborado pela autora.

Apresentamos nessa aplicação alguns exemplos separado por casos, de cálculos feitos utilizando a distribuição Gama, considerando os dados da tabela e a temática em questão. É válido ressaltar que, nos cálculos dos parâmetros utilizamos seis casas decimais, considerando o resultado final com duas casas decimais. Além disso, para obtermos o resultado dos cálculos das probabilidades, contamos com o auxílio do *software* Microsoft Excel.

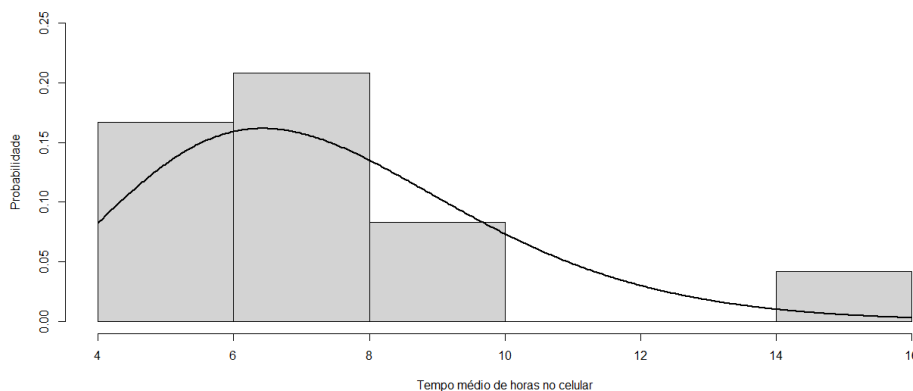
Com base nos dados, temos que $\bar{X} \approx 7,354167$, o que implica que, $\bar{X}^2 \approx 54,083772$. Além disso, obtém-se $\frac{1}{n} \sum X_i^2 \approx 60,897542$. Com esses resultados, utilizando (5.7) e (5.8), podemos calcular os parâmetros λ e r .

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2} \approx \frac{7,354167}{60,897542 - 54,083772} \approx \frac{7,354167}{6,81377} \approx 1,08,$$

$$\hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2} \approx \frac{54,083772}{60,897542 - 54,083772} \approx \frac{54,083772}{6,81377} \approx 7,94.$$

Ressalta-se que os dados podem ser ajustados por outras distribuições probabilísticas, contudo, nesta análise, adotou-se a distribuição Gama como aplicação, com o intuito de evidenciar o uso da função Gama. Para verificar o ajuste dos dados à distribuição Gama, apresentamos, na Figura 5.1, um histograma em que se observa que os dados se ajustam à curva teórica da distribuição.

Figura 5.1 – Histograma dos dados da distribuição Gama.



Fonte: Elaborado pela autora.

Além da análise gráfica, também foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov¹, o qual indicou que os dados apresentam um bom ajuste à distribuição Gama.

Obtido o resultado dos parâmetros e verificado o ajuste dos dados em relação a distribuição, podemos analisar e calcular os seguintes casos.

Caso 1

Suponha que haja o interesse em conhecer a tendência central e a dispersão dos dados relacionados ao tempo de uso do celular pelos estudantes. Dessa forma, propõe-se determinar:

Qual é a média e a variância do tempo médio de uso do aparelho celular pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática? Por (5.3), temos

$$E(X) = \frac{7,94}{1,08} \approx 7,35.$$

Pela equação (5.6), obtém-se

$$\text{Var}(X) = \frac{7,94}{1,08^2} = \frac{7,94}{1,1664} \approx 6,81.$$

¹Teste utilizado para verificar a aderência de um conjunto de dados a uma distribuição de probabilidade, por meio do cálculo da diferença absoluta máxima entre as distribuições de frequência acumulada empírica e teórica (Barbetta; Reis; Borna, 2010, p. 277).

Portanto, com base nos dados da amostra, estima-se que os alunos passam em média, 7,35 horas diárias utilizando o aparelho celular. Com os dados tendo uma variância aproximada de 6,81.

Caso 2

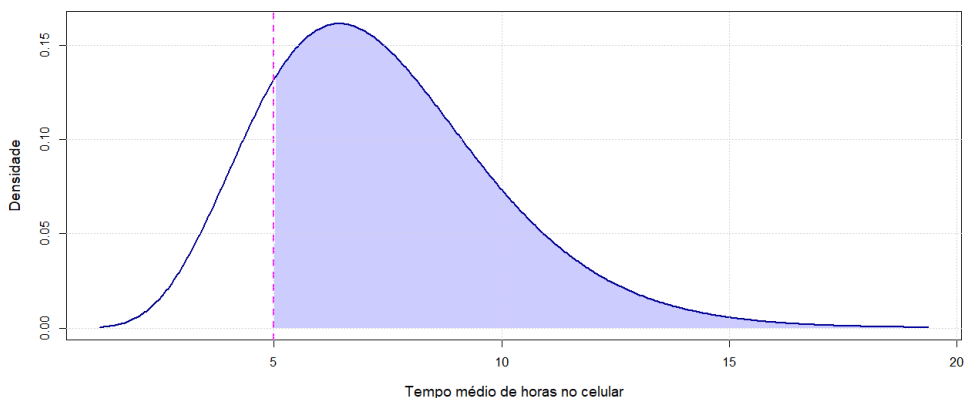
Estudos indicam que o uso do celular por mais de cinco horas diárias está associado a distúrbios como insônia e diminuição da duração do sono, comprometendo, assim, a qualidade do sono, conforme relatado por Tamura et al. (2017) e Hatori et al. (2017), citados por Moraes et al. (2023). Assim questionamos:

Qual a probabilidade de os alunos do curso de Licenciatura em Matemática usarem o celular por mais de 5 horas diárias?

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 \frac{(1,08)^{7,94}}{\Gamma(7,94)} x^{7,94-1} e^{-1,08x} dx \approx 0,815587.$$

Logo, o resultado indica que a probabilidade de que os alunos da amostra utilizem o celular por mais de 5 horas diárias é de aproximadamente 81,5%. Assim estes estudantes estão expostos aos distúrbios do sono como insônia e diminuição do sono, o que segundo Moraes et al. (2023, p. 200) pode desenvolver “dificuldades no avanço dos estudos, uma vez que o sono de má qualidade desencadeia baixa funcionalidade cognitiva”.

Figura 5.2 – Representação gráfica do Caso 2: $P(X > 5) \approx 81,5\%$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Caso 3

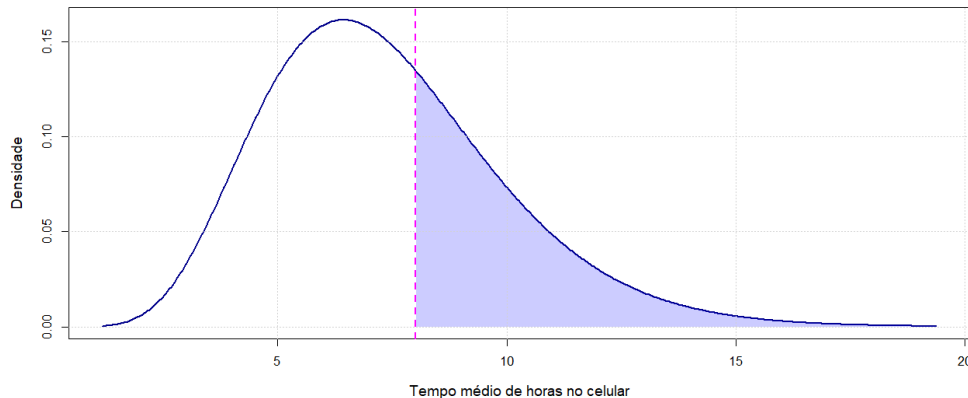
De acordo com o estudo realizado por Rafique et al. (2020), que investigou a associação entre o uso do celular e os parâmetros fisiológicos da má qualidade do sono em estudantes universitários, o uso do celular por 8 horas ou mais está positivamente associado à má qualidade do sono. Diante disso, realizamos a seguinte indagação:

Qual é a probabilidade de que o tempo de uso diário do celular pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática seja ou ultrapasse 8 horas?

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \int_0^8 \frac{(1,08)^{7,94}}{\Gamma(7,94)} x^{7,94-1} e^{-1,08x} dx \approx 0,359696$$

Portanto, o cálculo indica que a probabilidade de que os estudantes da amostra usem o celular por 8 horas ou mais é de aproximadamente 35,9%.

Figura 5.3 – Representação gráfica do Caso 3: $P(X \geq 8) \approx 35,9\%$.



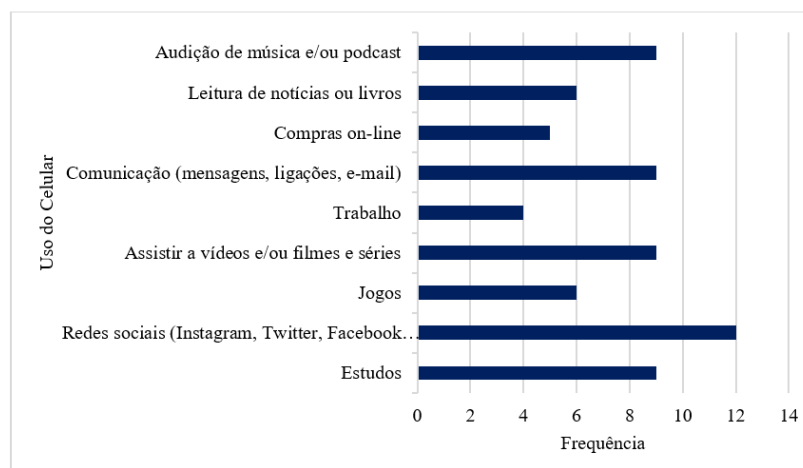
Fonte: Elaborado pela autora.

5.1.5 Alguns resultados do questionário

O presente tópico tem como finalidade apresentar alguns resultados de questões propostas no questionário. Além de coletar o tempo de uso do aparelho celular pelos estudantes, indagamos se os estudantes trabalhavam além de estudar, obtemos como resultado que 58,33% dos estudantes da amostra não trabalham e 41,67% trabalham.

Além disso, foi incluída uma questão de múltipla escolha sobre os principais usos do celular no cotidiano dos estudantes da amostra. Apresentamos os resultados no gráfico abaixo.

Figura 5.4 – Principais usos do celular pelos estudantes da amostra



Fonte: Elaborado pela autora.

A partir do gráfico, observa-se que todos os participantes (100%) indicaram utilizar o aparelho para acessar redes sociais. Já 75% afirmaram utilizá-lo para estudos, comunicação (mensagens, ligações e e-mails), para assistir a vídeos, filmes e séries, bem como para audição de músicas e/ou podcasts. Além disso, 50% utilizam o celular para jogos e para leitura de notícias ou livros. Ademais, 42% dos estudantes da amostra relataram utilizar o celular para realizar compras on-line. Por fim, 33% o utilizam para atividades relacionadas ao trabalho.

5.2 Distribuição Beta

A distribuição Beta é determinada por dois parâmetros, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Sua aplicabilidade está relacionada a fenômenos restritos ao intervalo $[0, 1]$. Desse modo, o modelo é adequado para representar variáveis aleatórias associadas a proporções, porcentagens e probabilidades.

Definição 5.4. A variável aleatória contínua X tem distribuição Beta, com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.9)$$

A seguir provamos que a função (5.9) é uma função densidade de probabilidade.

Demonstração: A distribuição Beta satisfaz o item I da Definição (2.14), pois sua função densidade é não negativa no intervalo $0 < x < 1$. De fato, como $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, temos que $x^{\alpha-1} \geq 0$ e $(1-x)^{\beta-1} \geq 0$ para todo $x \in (0, 1)$, o que garante que $f(x; \alpha, \beta) \geq 0$ nesse intervalo. Com relação ao item II, temos que $\int_{-\infty}^0 0 dx = 0$ e $\int_1^{+\infty} 0 dx = 0$. Assim, a integral total se restringe ao intervalo $(0, 1)$, onde:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^1 f(x; \alpha, \beta) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} B(\alpha, \beta) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a distribuição Beta é uma função densidade de probabilidade. \square

5.2.1 Esperança Matemática da distribuição Beta

De modo análogo ao que foi feito para a esperança da distribuição Gama, representaremos por $E(X)$ o valor esperado da distribuição Beta, também conhecido como sua média. A

seguir, realizamos o cálculo correspondente.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x; \alpha, \beta) dx.$$

Da equação (5.9) e a propriedade 3.10, temos

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha + 1, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}{(\alpha + \beta) \cdot \Gamma(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Assim, a média da distribuição Beta é definida por

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (5.10)$$

5.2.2 Variância da distribuição Beta

Na distribuição Beta, a variância que é uma medida de dispersão que indica o quanto os valores de um conjunto de dados variam em relação à média pode ser calculada por meio da expressão (5.4). Usando a função densidade de probabilidade (5.9) e a Propriedade 3.10, calculamos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x; \alpha, \beta) dx \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha + 2, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(\alpha + 1) \cdot \alpha \cdot \Gamma(\alpha)}{(\alpha + \beta + 1) \cdot (\alpha + \beta) \cdot \Gamma(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados anteriores na fórmula da variância (5.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \\
 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \\
 &= \frac{(\alpha^2 + \alpha)(\alpha + \beta) - \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2 + \alpha\beta - (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha^2)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\
 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.
 \end{aligned}$$

Logo, a variância da distribuição Beta é dada por

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (5.11)$$

5.2.3 Determinação dos Parâmetros da Distribuição Beta

Na distribuição Beta, o método dos momentos, assim como na distribuição Gama, é uma técnica eficaz para estimar seus parâmetros. Nesse caso, utilizando (5.10) e (5.11), igualam-se a média e a variância populacionais às respectivas média e variância amostrais, como apresentamos no sistema:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \bar{X}, \\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = S^2. \end{cases}$$

Sendo $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Podemos manipular a primeira equação desse sistema isolando β :

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)\bar{X} &= \alpha \\
 \beta\bar{X} &= \alpha - \alpha\bar{X},
 \end{aligned}$$

desse modo,

$$\beta = \frac{\alpha}{\bar{X}} - \alpha. \quad (5.12)$$

Substituindo β na segunda equação, segue

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta &= (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)S^2 \\
 \alpha \left(\frac{\alpha}{\bar{X}} - \alpha \right) &= \left(\alpha + \frac{\alpha}{\bar{X}} - \alpha \right)^2 \left(\alpha + \frac{\alpha}{\bar{X}} - \alpha + 1 \right) S^2 \\
 \frac{\alpha^2}{\bar{X}} - \alpha^2 &= \left(\frac{\alpha}{\bar{X}} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{\bar{X}} + 1 \right) S^2 \\
 \alpha^2 \left(\frac{1}{\bar{X}} - 1 \right) &= \alpha^2 \left(\frac{1}{\bar{X}^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\bar{X}} + 1 \right) S^2 \\
 \frac{1}{\bar{X}} - 1 &= \frac{S^2}{\bar{X}^2} \left(\frac{\alpha}{\bar{X}} + 1 \right) \\
 \left(\frac{1}{\bar{X}} - 1 \right) \left(\frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) &= \frac{\alpha}{\bar{X}} + 1 \\
 \left(\frac{\bar{X}}{S^2} - \frac{\bar{X}^2}{S^2} \right) &= \frac{\alpha}{\bar{X}} + 1 \\
 \left(\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} \right) &= \frac{\alpha}{\bar{X}} + 1 \\
 \hat{\alpha} &= \bar{X} \left(\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Sabendo a estimativa do parâmetro α , de (5.12) podemos concluir que o parâmetro β é definido por

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{\alpha}{\bar{X}} - \alpha \\
 \beta &= \alpha \left(\frac{1 - \bar{X}}{\bar{X}} \right) \\
 \beta &= \left(\frac{1 - \bar{X}}{\bar{X}} \right) \bar{X} \left(\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} - 1 \right) \\
 \hat{\beta} &= (1 - \bar{X}) \left(\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

5.2.4 Análise do Teor de Açúcar em Refrigerantes Via Distribuição Beta

O consumo frequente de bebidas que contêm adição de açúcar ou adoçantes, como refrigerantes, está associado a diversos problemas de saúde. Os estudo de Campos e Teixeira (2023, p. 733), apontam que esse hábito pode contribuir para “obesidade, diabetes, doenças cardíacas, doenças renais, doenças hepáticas não alcoólicas, cáries dentárias e gota, um tipo de artrite”.

Considerando que o teor de açúcar em refrigerantes é um tema relevante para a saúde humana e que, a depender do nível de consumo, pode trazer malefícios, apresentamos, nessa subseção, uma aplicação da distribuição Beta, com exemplos de cálculos probabilísticos que tratam de informações sobre o consumo de açúcar associado ao consumo de refrigerantes. Nesse contexto, utilizamos como base o artigo de Campos e Teixeiras (2023), que aborda uma

investigação sobre a quantidade de açúcar em refrigerantes comercializados no mercado brasileiro.

Os dados utilizados para aplicação foram extraídos do artigo base no qual o teor de açúcar dos refrigerantes é apresentado em gramas por 100 ml. Para possibilitar o uso da distribuição Beta, expressamos esses teores como proporções relativas ao volume de referência, obtendo valores naturalmente restritos ao intervalo [0,1], conforme requerido pela definição dessa distribuição. Em relação aos exemplos propostos, destacamos outras conversões que também são compatíveis com a distribuição Beta, apresentadas na tabela abaixo.

Tabela 5.2 – Teor de açúcar em refrigerante.

Refrigerante	g/100 mL	P _{100 mL}	P _{200 mL}	P _{350 mL}	P _{400 mL}	P _{700 mL}
Coca-Cola	8,7	0,087	0,174	0,3045	0,348	0,609
Fanta	9,0	0,090	0,180	0,3150	0,360	0,630
Guaraná Antarctica	10,0	0,100	0,200	0,3500	0,400	0,700
Guaraná Kuat	6,5	0,065	0,130	0,2275	0,260	0,455
Sprite	10,5	0,105	0,210	0,3675	0,420	0,735
Mate Couro	8,9	0,089	0,178	0,3115	0,356	0,623
Sukita	8,0	0,080	0,160	0,2800	0,320	0,560
Siciliano Heineken	7,5	0,075	0,150	0,2625	0,300	0,525
Schweppes	9,4	0,094	0,188	0,3290	0,376	0,658

Fonte: Elaborado pela autora com base nos dados de Campos e Teixeira (2023).

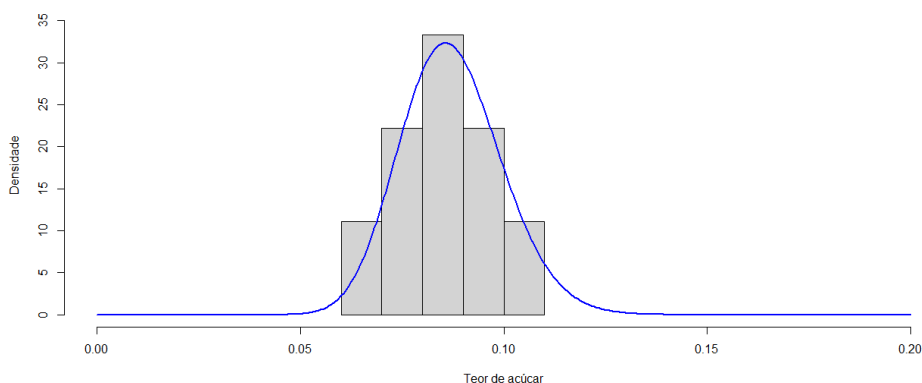
Para verificar o ajuste dos dados à distribuição Beta, apresentamos um histograma considerando os dados de P_{100mL}, a partir do qual inicialmente obtemos os parâmetros α e β . Com base nesses dados, determinamos que a média e a variância amostrais são, respectivamente, $\bar{X} \approx 0,087222$ e $S^2 \approx 0,000154$. A partir desses resultados, obtemos os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= \bar{X} \left(\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} - 1 \right) \\
 &\approx 0,087222 \left(\frac{0,087222(1 - 0,087222)}{0,000154} - 1 \right) \\
 &\approx 0,087222 \left(\frac{0,079614}{0,000154} - 1 \right) \\
 &\approx 0,087222 (516,974026 - 1) \\
 &\approx 0,087222 \cdot 515,974026 \\
 &\approx 45,00.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (1 - \bar{X}) \left(\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} - 1 \right) \\
&\approx (1 - 0,087222) \left(\frac{0,087222 (1 - 0,087222)}{0,000153} - 1 \right) \\
&\approx 0,912778 \left(\frac{0,079614}{0,000154} - 1 \right) \\
&\approx 0,912778 (516,974026 - 1) \\
&\approx 0,912778 \cdot 515,974026 \\
&\approx 470,97.
\end{aligned}$$

A partir dos dados e dos parâmetros obtidos, geramos um histograma em que se observa um bom ajuste dos dados à curva teórica da distribuição, como podemos analisar na Figura 5.5. Além disso, utilizamos o teste de Kolmogorov-Smirnov, que também indicou um bom ajuste à distribuição Beta.

Figura 5.5 – Histograma dos dados da distribuição Beta.



Fonte: Elaborado pela autora.

É válido destacar que a Organização Mundial da Saúde (OMS), recomenda uma redução do consumo diário de açúcar para crianças e adultos para menos de 10%, o que equivale a aproximadamente 50 gramas de açúcar por dia. Além disso, pode ser feita uma redução ainda mais acentuada, de cerca de 5%, representando aproximadamente 25 gramas diárias, o qual pode proporcionar benefícios adicionais à saúde (WHO, 2015).

A seguir, apresentamos exemplos separados por casos que retratam o teor de açúcar nos refrigerantes. Para os cálculos dos parâmetros, fixou-se o uso de seis casas decimais, considerando duas casas decimais para a apresentação dos resultados finais. O cálculo das probabilidades foi realizado com o auxílio do software Microsoft Excel.

Caso 1:

Após a determinação dos parâmetros, realizamos a seguinte indagação

Qual o teor médio de açúcar nos refrigerantes?

Sendo $\hat{\alpha} = 45$ e $\hat{\beta} = 470,97$, e utilizando a esperança matemática da distribuição Beta (5.10), tem-se:

$$E(X) = \frac{45}{45 + 470,97} = \frac{45}{515,97} \approx 0,087.$$

Portanto, o teor médio de açúcar nos refrigerantes é de aproximadamente 8,7g/100 ml.

Caso 2

Utilizando os dados da tabela de P_{200mL}, obtém-se a média amostral $\bar{X} \approx 0,174444$ e a variância amostra $S^2 \approx 0,000616$. Com base nesses valores, determinam-se os parâmetros α e β da distribuição Beta, como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\approx 0,174444 \left(\frac{0,174444(1 - 0,174444)}{0,000616} - 1 \right) \\ &\approx 0,174444 \left(\frac{0,144013}{0,000616} - 1 \right) \\ &\approx 0,174444 (232,787338 - 1) \\ &\approx 0,174444 \cdot 231,787338 \\ &\approx 40,43. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\approx (1 - 0,174444) \left(\frac{0,174444(1 - 0,174444)}{0,000616} - 1 \right) \\ &\approx 0,825556 \left(\frac{0,144013}{0,000616} - 1 \right) \\ &\approx 0,825556 (233,787338 - 1) \\ &\approx 0,825556 \cdot 232,787338 \\ &\approx 192,18. \end{aligned}$$

Obtidos os valores dos parâmetros podemos analisar a seguinte situação:

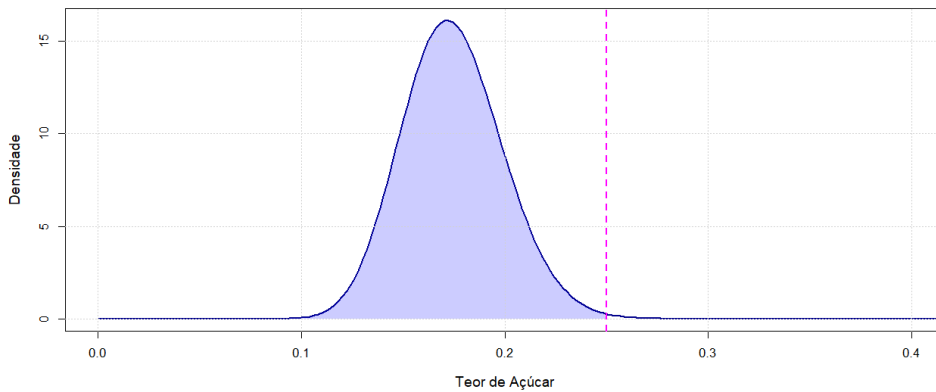
O teor de açúcar em refrigerantes é uma variável aleatória com distribuição Beta. Considerando um copo de refrigerante de 200 ml, e os parâmetros $\hat{\alpha} = 40,43$ e $\hat{\beta} = 192,24$. Qual a probabilidade de que o consumo de um copo de refrigerante, não ultrapasse a recomendação diária mais acentuada de 25 gramas de açúcar?

$$P(X < 0,25) = \int_0^{0,25} \frac{\Gamma(40,43 + 192,24)}{\Gamma(40,43)\Gamma(192,24)} x^{39,43} (1 - x)^{191,24} dx \approx 0,997640.$$

Assim, ao consumir um copo de refrigerante de 200 ml, a probabilidade de que atinja a recomendação de 25 gramas de açúcar é de aproximadamente 99,7%. O resultado mostra que é muito improvável que esse consumo ultrapasse, isoladamente, a recomendação diária mais

restritiva de 25 g de açúcar. Contudo, embora não ultrapasse, o consumo de um único copo já se aproxima desse limite recomendado.

Figura 5.6 – Representação gráfica do Caso 2 (200ml): $P(X < 0,25) \approx 99,7\%$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Podemos ainda estender essa análise para o caso de dois copos (400 ml), realizando o seguinte questionamento:

Qual a probabilidade de que, ao consumir dois copos de refrigerante, ou seja 400 ml, o teor de açúcar permaneça abaixo da recomendação de 25 g?

Pelos dados, tem-se $\bar{X} \approx 0,348889$ e $S^2 \approx 0,002463$. Assim, os parâmetros são determinados por:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &\approx 0,348889 \left(\frac{0,348889(1 - 0,348889)}{0,002463} - 1 \right) \\ &\approx 0,348889 \left(\frac{0,227165}{0,002463} - 1 \right) \\ &\approx 0,348889 (92,231019 - 1) \\ &\approx 0,348889 \cdot 91,231019 \\ &\approx 31,83.\end{aligned}$$

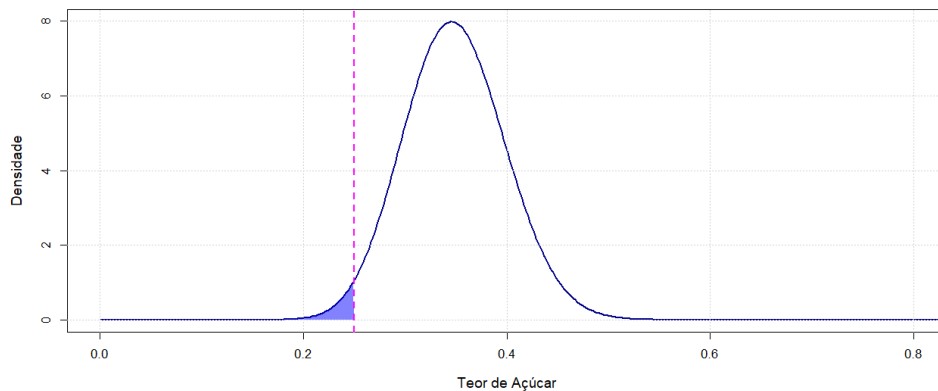
$$\begin{aligned}\hat{\beta} &\approx (1 - 0,348889) \left(\frac{0,348889(1 - 0,348889)}{0,002463} - 1 \right) \\ &\approx 0,651111 \left(\frac{0,227165}{0,002463} - 1 \right) \\ &\approx 0,651111 (92,231019 - 1) \\ &\approx 0,651111 \cdot 91,231019 \\ &\approx 59,40.\end{aligned}$$

A probabilidade é dada por:

$$P(X < 0,25) = \int_0^{0,25} \frac{\Gamma(31,83 + 59,40)}{\Gamma(31,83)\Gamma(59,40)} x^{30,83} (1 - x)^{58,40} dx \approx 0,019027.$$

Portanto, a probabilidade de ingerir menos de 25 gramas de açúcar ao consumir dois copos de refrigerante é de aproximadamente 1,9%. Dessa forma, é provável que, ao ingerir 400 ml de refrigerante, a recomendação mais acentuada seja atingida.

Figura 5.7 – Representação gráfica do Caso 2 (400ml): $P(X < 0,25) \approx 1,9\%$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Caso 3

Considerando os dados $P_{350\text{mL}}$, determina-se $\bar{X} \approx 0,305278$ e $S^2 \approx 0,001886$. A partir desses resultados podemos calcular os parâmetros α e β .

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\approx 0,305278 \left(\frac{0,305278 (1 - 0,305278)}{0,001886} - 1 \right) \\ &\approx 0,305278 \left(\frac{0,212083}{0,001886} - 1 \right) \\ &\approx 0,305278 (112,451220 - 1) \\ &\approx 0,305278 \cdot 111,451220 \\ &\approx 34,02. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\approx (1 - 0,305278) \left(\frac{0,305278 (1 - 0,305278)}{0,001886} - 1 \right) \\ &\approx 0,694722 \left(\frac{0,212083}{0,001886} - 1 \right) \\ &\approx 0,694722 (112,451220 - 1) \\ &\approx 0,694722 \cdot 111,451220 \\ &\approx 77,43. \end{aligned}$$

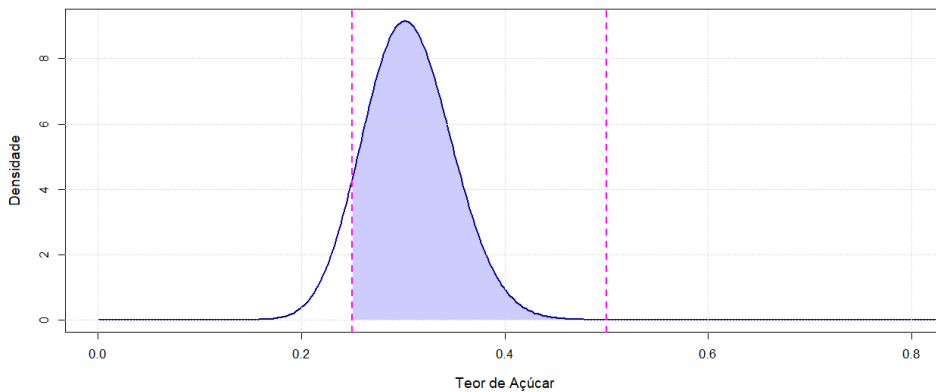
Obtido os parâmetros, realizamos a análise da seguinte situação:

Considerando uma lata de refrigerante de 350 ml. A variável aleatória X tem distribuição Beta, com parâmetros $\hat{\alpha} = 34,02$ e $\hat{\beta} = 77,43$. Qual a probabilidade que em uma lata de refrigerante de 350 ml contenha entre 25 e 50 gramas de açúcar?

$$P(0,25 < X < 0,50) = \int_{0,25}^{0,50} \frac{\Gamma(34,02 + 77,43)}{\Gamma(34,02)\Gamma(77,43)} x^{33,02} (1 - x)^{76,43} dx \approx 0,901022.$$

Assim, o resultado de 90,1% indica uma probabilidade elevada de que o teor de açúcar em uma lata de refrigerante esteja dentro da faixa recomendada pela OMS, ou seja, entre 25 g, considerado o consumo ideal, e 50 g, que representa o limite máximo do consumo de açúcar.

Figura 5.8 – Representação gráfica do Caso 3: $P(0,25 < X < 0,50) \approx 90,1\%$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Caso 4

Considerando os dados de $P_{700\text{mL}}$, temos como resultado que $\bar{X} \approx 0,610556$ e $S^2 \approx 0,007543$. Assim, podemos calcular os parâmetros α e β .

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\approx 0,610556 \left(\frac{0,610556(1 - 0,610556)}{0,007543} - 1 \right) \\ &\approx 0,610556 \left(\frac{0,237777}{0,007543} - 1 \right) \\ &\approx 0,610556 (31,522869 - 1) \\ &\approx 0,610556 \cdot 30,522869 \\ &\approx 18,64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &\approx (1 - 0,610556) \left(\frac{0,610556(1 - 0,610556)}{0,007543} - 1 \right) \\
&\approx 0,389444 \left(\frac{0,237777}{0,007543} - 1 \right) \\
&\approx 0,389444 (31,522869 - 1) \\
&\approx 0,389444 \cdot 30,522869 \\
&\approx 11,89.
\end{aligned}$$

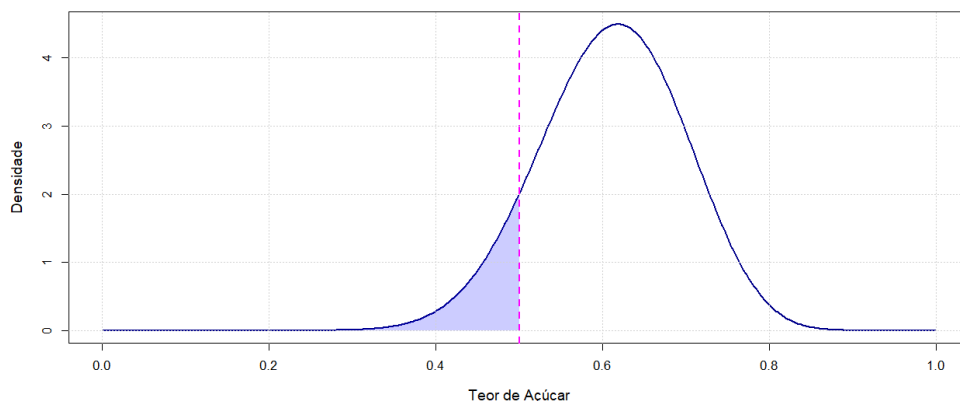
Obtido os parâmetros podemos fazer a análise do seguinte contexto:

Considerando duas lata de refrigerante contendo 350 ml cada, com parâmetros $\hat{\alpha} = 18,64$ e $\hat{\beta} = 11,89$. Qual a probabilidade que em duas latas de refrigerantes tenham menos de 50 gramas de açúcar?

$$P(X < 0,50) = \int_0^{0,50} \frac{\Gamma(18,64 + 11,89)}{\Gamma(18,64)\Gamma(11,89)} x^{17,64} (1 - x)^{10,89} dx \approx 0,106762.$$

Como resultado, a probabilidade calculada corresponde a 10,6%, indicando ser pouco provável que duas latas de refrigerante contenham menos de 50 gramas de açúcar. Ou seja, nesse consumo, há uma chance considerável de ultrapassar a recomendação diária sugerida pela Organização Mundial da Saúde.

Figura 5.9 – Representação gráfica do Caso 4: $P(X < 0,50) \approx 10,6\%$.



Fonte: Elaborado pela autora.

De modo geral, a aplicação da distribuição Beta permitiu analisar casos sobre o teor de açúcar presente em diferentes porções de refrigerante, em que o cálculo da probabilidade evidenciou que determinados consumos podem ou não atingir as recomendações da Organização Mundial da Saúde. Dessa forma, ressalta-se a relevância de tais análises para alertar sobre o consumo excessivo de bebidas açucaradas, como o refrigerante.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta monografia, destacamos a função Gama e a função Beta, apresentando suas definições usuais e principais propriedades para o contexto desta pesquisa, sendo a problemática como desenvolver aplicações de ambas as funções. Propusemo-nos a evidenciar sua relevância tanto no âmbito da Probabilidade quanto na resolução de integrais, apresentando exemplos e casos que permitem detalhar alguns dos aspectos de suas aplicações.

Identificamos que o uso das propriedades das funções em questão, foi essencial para o desenvolvimento das aplicações, bem como, para demonstrar resultados relacionados aos contextos apresentados neste trabalho e utilizados para descrevê-las. Observamos, na resolução de integrais não triviais, exemplos que quando manipulados, representavam a função Gama ou Beta, sendo necessário o uso de suas propriedades para concluir a solução, que proporcionaram simplificações nos cálculos, em comparação ao se utilizar outros métodos de integração.

No contexto da aplicação da probabilidade, foi necessário inicialmente definir e demonstrar alguns conceitos e resultados como da esperança, variância e determinação dos parâmetros. Observamos, nesse processo, a necessidade do uso das propriedades das funções Gama e Beta para determinar principalmente a esperança, conceito utilizado para determinação das demais ferramentas das distribuições

Ademais, os resultados mostram que, no caso da aplicação de resolução de integrais não triviais, o uso das definições e propriedades das funções Gama e Beta pode contribuir para resoluções com cálculos mais simplificados e diretos, proporcionando resoluções eficientes do que aqueles obtidos por métodos tradicionais de integração. Assim, tais funções tornam-se ferramentas relevantes a serem consideradas na resolução de integrais não triviais.

Para a aplicação na probabilidade, os dados referente ao tempo de permanência no aparelho celular dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática mostraram um bom ajuste em relação à distribuição Gama. Os resultados obtidos pela amostra analisada indicaram que esses alunos utilizam o celular por, em média 7,35 horas diárias, possuindo os dados uma variabilidade significativa, indicando que há alunos que utilizam o aparelho por um tempo maior ou menor em comparação a outros. Os cálculos de probabilidade mostraram que é mais provável que um estudante utilize o celular por mais de 5 horas do que por mais de 8 horas diárias.

A distribuição Beta, aplicada à temática do teor de açúcar em refrigerantes, apresentou um bom ajuste aos dados observados. Nessa aplicação, realizamos a análise de diferentes casos em relação a porções de refrigerante e concentrações de açúcar, considerando as recomendações do consumo de açúcar da Organização Mundial da Saúde. Constatamos que, ao consumir um copo de refrigerante de 200 ml, é pouco provável atingir a recomendação mais acentuada de redução de açúcar, equivalente a 25 gramas. Em contraste ao consumir dois copos (400 ml), que indica uma probabilidade considerável de que ultrapasse tal recomendação. Em relação à

recomendação limite de 50 gramas de açúcar diários, os cálculos indicaram que em uma lata de refrigerante de 350 ml, é provável que, a concentração de açúcar esteja entre 25 gramas e 50 gramas. Ademais, ao consumir duas latas (700 ml), há uma possibilidade considerável de atingir a recomendação limite de 50 gramas.

Em relação aos desafios enfrentados na elaboração deste trabalho, identifiquei entre eles a escolha das temáticas para os cálculos das distribuições e alguns processos nessa aplicação. Ressalto também a aprendizagem no uso de softwares anteriormente não utilizados e, em alguns momentos a conciliação do tempo de estudos e vida pessoal com a pesquisa realizada.

O tema da pesquisa se deu pela afinidade da autora com os conteúdos estudados na disciplina de Cálculo II, e do interesse na aplicabilidade de integrais. Além disso, a realização deste trabalho contribuiu para o propósito de prosseguir com estudos em nível de pós-graduação na área.

REFERÊNCIAS

- AFONSO, A.; NUNES, C. **Probabilidades e Estatísticas: aplicações e soluções em SPSS**. Universidade de Évora, 2019.
- ALMEIDA, Í. A. **Metodologia do trabalho científico**. Recife: UFPE, 2021. E-book. Disponível em: <https://editora.ufpe.br/books/catalog/view/674/684/2134>. Acesso em: 23 nov. 2024.
- BARBETTA, P. A.; REIS, M. M.; BORNIA, A. C. **Estatística para cursos de engenharia e informática**. 3. ed. São Paulo: atlas, 2010.
- CAMPOS, L. M. M.; TEIXEIRA, A. Z. A. Investigação das bebidas açucaradas no mercado de refrigerantes brasileiros. **REASE**, São Paulo, v. 9, n. 7. p. 731-740, 2023.
- DAVIS, P. J. Leonhard Euler's integral: a historical Pprofile of the Gamma fuction. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 66, n.10, p. 849-869, 1959. Disponível em: <https://people.math.osu.edu/gautam.42/S20/DavisGammaFunction.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2024.
- FÁVERO, L.; P. BELFIORE, P. **Manual de análise de dados**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.
- GEORGE, B. T. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- GUIDORRIZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- JUNIOR, O. B. **Integral imprópria e funções eulerianas**. 2010. Monografia (Pós-graduação em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2010.
- MANCHINI, C. E. F.; PORTELLA, L.; BAYER, F. M. Estimação robusta dos parâmetros da distribuição Beta. **Brazilian Journal of Biometrics**, Lavras, v. 37, n. 3, p. 350-371, 2019. Disponível em: <https://biometria.ufla.br/index.php/BBJ/article/view/404/238>. Acesso em: 20 ago. 2025.
- MARÍN, R. Uma maneira simples de se demonstrar que Gama de meio é raiz quadrada de pi. **Matemática Universitária**, Santiago, n. 47, p, 14-15, 2010.
- MELO, K. G. **A função Gama como extensão da função fatorial e aplicações**. 2020. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

MORAES, V. R. Y. *et al.* O uso excessivo de aparelhos eletrônicos e a qualidade do sono em estudantes jovens. *In: SOUSA, J. R. (org.). Estudos Multidisciplinares Sobre Emergência e Terapia Intensiva.* Bahia: Instituto Academic, 2023. p. 190-203.

MORETTIN, P. A.; BUSSAD, W. O. **Estatística básica.** 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 540 p.

OWEM, C. E. B. **Parameter estimation for the Beta distribution.** 2008. Dissertação (Mestre em Ciências) - Universidade Brigham Young, Provo, 2008.

RAFIQUE, N. *et al.* Effects of Mobile Use on Subjective Sleep Quality. **Nature and Science of Sleep.** Londres, v. 2020, n. 12, p. 357?364, 2020.

SPIEGEL, M. R. Função Gama, função Beta e outras funções especiais. *In: SPIEGEL, Murray R. Análise de Fourier.* São Paulo: McGraw-Hill, 1976. 249 p.

STEWART, J. **Cálculo.** 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2006.

World Health Organization (WHO). **WHO calls on countries to reduce sugars intake among and children.** 4 March 2015. Disponível em: <https://www.who.int/news/item/04-03-2015-who-calls-on-countries-to-reduce-sugars-intake-among-adults-and-children>. Acesso em: 04 set. 2025.

ZANELLA, L. C. H. **Metodologia da Pesquisa.** 2. ed. Florianópolis: rev.atual, 2011.